

УДК 539.3

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА В МЯГКИЙ СЛОЙ<sup>1</sup>***Волков С. С.<sup>2</sup>, Айзикович С. М.<sup>3</sup>, Погоцкая И. В.<sup>4</sup>*

ANALYTIC SOLUTION OF THE AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR PENETRATION OF A INDENTER IN THE SOFT LAYER

Volkov S. S., Aizikovich S. M., Pogotskaya I. V.

In this paper we construct approximate analytic solution of axisymmetric contact problem on penetration of indenter with flat bottom in the soft layer, which is lying on more rigid elastic base. The obtained results allow to make approximate analytic solution within the permissible range of values of typical geometrical parameter of the problem. Elastic features of layer and base can differ by more than 100 times.

Keywords: contact problems, the soft elastic layer, the approximate analytical solution, soft elastic layer.

**Введение**

К решению задачи о взаимодействии штампа с однородным упругим слоем конечной толщины обращались многие авторы (Ворович И. И., Устинов Ю. А., Александров В. М., Бабешко В. А., Уфлянд Я. С., и др. [1–6]). Интерес стимулировался практической важностью с одной стороны и существенными математическими трудностями с другой. В частности в работах [1, 7, 8] были построены решения данной задачи для случая недеформируемого основания отдельно для больших ( $\lambda \geq 1$ ) и малых ( $\lambda \leq 1$ ) значений параметра  $\lambda$  ( $\lambda$ -отношение толщины слоя к радиусу зоны контакта).

В случае, если мягкий упругий слой лежит на более жесткой упругой деформируемой подложке, практический интерес представляет случай, когда упругие свойства слоя более чем на порядок отличаются от свойств подложки. В последнее время актуальность результатов аккуратного моделирования задачи контактного взаимодействия

мягкого слоя на более жесткой упругой подложке связана с изучением биологических и полимерных объектов. Так, в [9] методом динамической атомно-силовой микроскопии (АСМ) были исследованы образцы материалов, модули Юнга которых менялись в диапазоне от 0,001 ГПа до 1 ГПа. Этот диапазон изменения упругих свойств соответствует свойствам полимеров и биологических объектов. С другой стороны, используя сканирующий зондовый микроскоп «Наноскан», предназначенный для исследования механических свойств поверхности и измерения твердости сверхтвердых материалов и тонких пленок (покрытий), в [10] были исследованы материалы, модули упругости которых достигали значения 1 050 ГПа.

Для исследования механических свойств мягких упругих покрытий материалов, упругие свойства которых отличаются более чем на порядок от подложки, необходимо построение эффективной математической модели. Метод, используемый в этой работе, позволяет построить приближенное аналитическое

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (11-08-91168-ГФЕН\_a), АВЦП (2.1.2/10063), ГК (11.519.11.3015, 11.519.11.3028).

<sup>2</sup>Волков Сергей Сергеевич, аспирант РГУПС, младший научный сотрудник лаборатории «Функционально-градиентные и композитные материалы» Научно-образовательного центра «Материалы» Донского государственного технического университета; e-mail: fenix\_rsu@mail.ru.

<sup>3</sup>Айзикович Сергей Михайлович, д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией «Функционально-градиентные и композитные материалы» Научно-образовательного центра «Материалы» Донского государственного технического университета; e-mail: saizikovich@gmail.com.

<sup>4</sup>Погоцкая Ирина Викторовна, младший научный сотрудник Института тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси; e-mail: irochka23@gmail.com.

решение задачи в случае мягкого упругого покрытия, для всего диапазона значений геометрического параметра  $\lambda$  (рис. 1).

### 1. Постановка задачи о вдавлении кругового штампа

Недеформируемый круглый штамп вдавливается в верхнюю грань  $\Gamma$  упругого двухслойного полупространства силой  $P$ . С полупространством связана цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$ . Предполагается, что силы трения между штампом и полупространством отсутствуют. Вне штампа полупространство не загружено. Штамп представляет осесимметричное тело с поперечным сечением  $\Omega$  ( $r \leq a$ ) и поверхностью основания  $z = \psi(r)$ .

Коэффициенты Ламе  $\Lambda$  и  $M$  полупространства с глубиной изменяются по закону:

- 1)  $\Lambda = \Lambda_0, M = M_0, -H \leq z \leq 0,$
- 2)  $\Lambda = \Lambda_1, M = M_1, -\infty < z < -H.$

Под действием центрально приложенной силы  $P$  штамп переместится в направлении оси  $z$  на величину  $\delta$ . Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид

$$z = 0, \quad \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \sigma_z = 0, & r > a, \\ w = -\delta(r) = -(\delta - \psi(r)), & r \leq a. \end{cases}$$

Предполагаем, что на границе покрытие-подложка имеют место условия сопряжения:

$$z = -H, \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \tau_{zr}^{(1)} = \tau_{zr}^{(2)}, & \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \\ w^{(1)} = w^{(2)}, & u^{(1)} = u^{(2)}. \end{cases}$$

При  $(r; -z) \rightarrow \infty$  напряжения в полупространстве исчезают. Требуется определить перемещение штампа и распределение контактных нормальных напряжений под штампом

$$\sigma_z^{(1)}|_{z=0} = -q(r), \quad r \leq a. \quad (1.4)$$

### 2. Построение решения задачи

Задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_0^1 \tau(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_0(ur\lambda^{-1}) J_0(u\rho\lambda^{-1}) du = \lambda \Theta_0(0) f(r), \quad r \leq 1. \quad (2.1)$$

Здесь  $\Theta_0(0) = 2M_0(\Lambda_0 + M_0)(\Lambda_0 + 2M_0)^{-1}$ ;  $M_0$  и  $\Lambda_0$  — коэффициенты Ламе однородного слоя;  $q(\rho/a) = \tau(\rho)$ ;  $\lambda = H/a$  — геометрический параметр задачи, обозначающий относительную толщину слоя;  $L(u)$  — трансформанта ядра интегрального уравнения. Трансформанта ядра  $L(u)$  строится численно, применением метода моделирующих функций [11].

В работах [12,13] показано, что трансформанта ядра обладает следующими свойствами:

$$L(u) = A + B|u| + Cu^2 + O(|u|^3), \quad (2.2)$$

$$u \rightarrow 0, \quad A = E_0/E_1,$$

$$L(u) = 1 + D|u|^{-1} + Eu^{-2} + O(|u|^{-3}), \quad (2.3)$$

$$u \rightarrow \infty.$$

В (2.2)  $E_0$  и  $E_1$  модули Юнга покрытия и подложки соответственно.

Функцию  $L(u)$ , обладающую свойствами (2.2), (2.3), как известно из [13], можно аппроксимировать выражением следующего вида:

$$L(u) = L_{\Pi}^N(u) + L_{\Sigma}^{\infty}(u), \quad (2.4)$$

где

$$L_{\Pi}^N(u) = \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, \quad (2.5)$$

$$L_{\Sigma}^M(u) = \sum_{k=1}^M \frac{c_k |u|}{u^2 + D_k^2}.$$

Здесь  $A_i, B_i, D_k \in C$ ;  $C_k \in R$  — некоторые константы. Причем  $A_i, B_i$  подбираются так, чтобы  $\prod_{i=1}^N A_i^2 B_i^{-2} = A$  и  $A_i \neq A_j, B_i \neq B_j, A_i \neq B_j$ .

Для трансформанты ядра  $L(u) \in L_{\Pi}^N$ , т.е. имеющий вид (2.5), в [14] для случая штампа с плоской подошвой получено аналитическое выражение для приближенного определения контактных напряжений следующего вида

$$\tau(r) = \frac{2\Theta_0(0)\delta}{\pi} \left\{ L^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^N C_i \Psi(r, A_i \lambda^{-1}) \right\}. \quad (2.6)$$

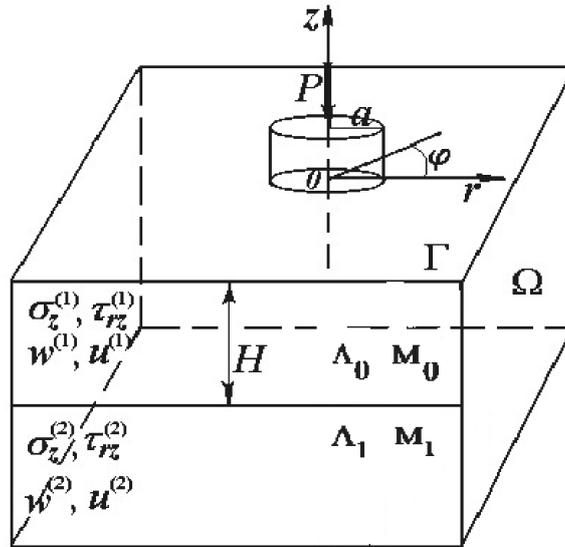


Рис. 1. Постановка задачи

Здесь введено обозначение

$$\Psi(r, A) = \frac{\text{ch } A}{\sqrt{1-r^2}} - A \int_r^1 \frac{\text{sh } Atdt}{\sqrt{t^2-r^2}}. \quad (2.7)$$

Постоянные  $C_i$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N C_i \alpha \left( \frac{A_i}{\lambda}, \frac{B_k}{\lambda} \right) + \frac{B_k^{-1} \lambda}{L_N(0)} = 0, \quad (2.8)$$

$$k = 1, \dots, N,$$

$$\alpha(B, A) = \frac{B \text{ch } A + A \text{sh } A}{B^2 - A^2}.$$

Связь между приложенной силой и осадкой штампа имеет вид

$$P = 4a^2 \delta \Theta_0(0) \left[ L^{-1}(0) + \sum_{i=1}^N C_i A_i^{-1} \lambda \text{sh } A_i \lambda^{-1} \right]. \quad (2.9)$$

В [14] доказано, что построенное решение является двусторонне асимптотически точным, т.е. формула (2.6) является асимптотически точной как для больших, так и для малых значениях параметра  $\lambda$ . Погрешность решения задачи зависит от погрешности приближения исходной трансформанты ядра интегрального уравнения (2.1) выражениями вида (2.5).

Подбор  $A_i, B_i$  в (2.5) можно осуществить методом, изложенным в [14].

### 3. Численная реализация метода для мягкого слоя, сцепленного с более жестким упругим основанием

Рассмотрим случай мягкого однородного слоя, лежащего на более жестком основании. Предполагаем, что упругие свойства слоя отличаются в 2, 5, 10, 100, 1000 раз от свойств упругой подложки. Слой жестко сцеплен с основанием (данный метод применим также в случае, когда слой свободно лежит на основании). В качестве предельного случая решения задачи возьмем значения контактных напряжений для задачи о вдавливании кругового штампа в однородный слой, лежащий на недеформируемом основании, приведенные в [7].

Не нарушая общности, предполагаем, что коэффициент Пуассона слоя равен коэффициенту Пуассона подложки  $\nu = 0, 3$ . Рассмотрим случаи, когда отношение модуля Юнга подложки к модулю Юнга мягкого слоя равно 2, 5, 10, 100, 1000.

На рис. 2 изображены графики функций  $L(u)$  — трансформант ядра интегрального уравнения (2.1), построенных методом моделирующих функций [11].

Графики приведены в логарифмической шкале по обеим осям. Кривым с номерами 1–5 соответствуют графики трансформант для случаев когда упругие свойства покрытия и подложки отличаются в 2, 5, 10, 100,

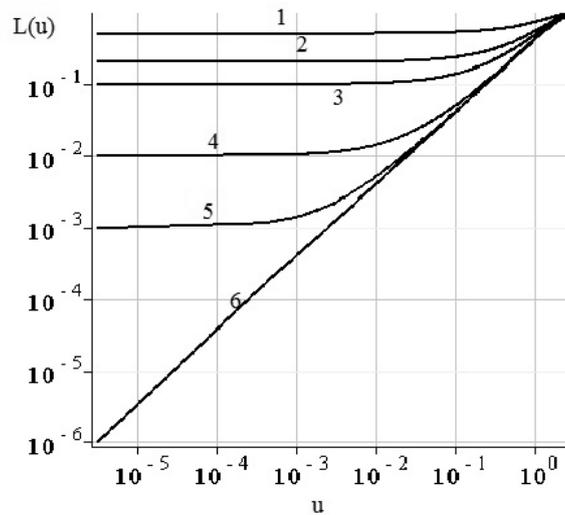


Рис. 2. Трансформанты ядер интегрального уравнения

1000 раз соответственно. Номером 6 обозначен график трансформанты ядра, для случая недеформируемого основания, при построении которого была взята функция следующего вида [8]:

$$L(u) = \frac{2\chi \operatorname{sh}(2u) - 4u}{2\chi \operatorname{ch}(2u) + 1 + \chi^2 + 4u^2}, \quad \chi = 3 - 4\nu.$$

Анализируя рис. 2, можно увидеть, что по мере того, как увеличивается жесткость основания, графики функций трансформант приближаются к предельной кривой 6 для несжимаемого основания. Ниже будет показано, что и значения контактных напряжений будут приближаться к контактным напряжениям для недеформируемой подложки.

На рис. 3 представлены графики трансформант интегрального уравнения (2.1) и их аппроксимации, задаваемые формулой (2.5), в случае отличия упругих свойств слоя и основания, в 2, 100 и 1000 раз. Рис. 3а соответствует случаю отличия упругих свойств слоя и основания в 2 раза, рис. 3б — 100 раз и рис. 3в — 1000 раз.

Для оценки погрешности аппроксимации трансформанты выражениями вида (2.5) использовалась следующая формула:

$$\Delta_L(u) = \left| \frac{L_N(u) - L(u)}{L(u)} \right| \cdot 100\%. \quad (3.1)$$

На рис. 4а–4д изображены графики  $\Delta_L(u)$  (3.1). Каждому из графиков 4а–4д, отвечает случай жесткости основания по сравнению со слоем в 2, 5, 10, 100, 1000 раз со-

ответственно. Как видно из графиков, максимальная погрешность трансформанты ядра не превышает 3,4%. Следует отметить, что по мере увеличения жесткости основания, для достижения хорошей погрешности аппроксимации, необходимо большее число членов аппроксимации ( $N$ ), входящих в формулу (2.5). Так для случая в 1000 раз более жесткого основания и достижения погрешности менее 3,1% понадобилось  $N = 20$ , а для случая в 2 раза более жесткого основания и погрешности менее 3,5% можно добиться при  $N = 1$ , и 1,4% при  $N = 8$ .

В табл. 1 приведены значения величины  $\frac{q(r)}{\Theta_0 \delta}$ , характеризующей контактные напряжения, вычисленные по формуле (2.6) для случая штампа с плоской подошвой. В крайнем правом столбце приведены предельные значения величины  $\frac{q(r)}{\Theta_0 \delta}$  для слоя, лежащего на абсолютно жестком основании взятые из [7]. Анализируя получившиеся результаты, можно сделать вывод, что для случая, когда основание в 1000 раз жестче покрытия, значения контактных напряжений очень близки к известным значениям напряжений полученных другими методами для недеформируемого жесткого основания. Максимальная разница в значениях наблюдается в случае, когда  $\lambda = 0,25$  и не превышает 3%, а в случае  $\lambda \geq 1$  погрешность менее 0,8%. Для больших  $\lambda$  ( $\lambda \geq 4$ ) значения контактных напряжений близки друг к другу, для всех случаев рассматриваемой жесткости основания. Из этого наблюдения можно сделать вывод, что по мере увеличения относительной толщины слоя, упругие свойства подложки ока-

Таблица 1. Контактные напряжения

Погрешность аппроксимации	1,4%	2,8%	3,3%	3%	3,2%	
$N$ (число членов аппроксимации)	8	8	10	10	20	–
$E_1/E_0$	2	5	10	100	1000	$\infty$
$\lambda = 0,125$						
R=0	1,307	3,380	5,965	16,545	19,881	–
R=0,2	1,337	3,447	6,070	16,603	19,896	–
R=0,4	1,442	3,662	6,395	16,760	19,919	–
R=0,6	1,674	4,077	6,947	16,923	19,844	–
R=0,8	2,184	4,815	7,682	16,777	19,328	–
R=0,95	3,419	6,175	8,851	16,826	19,148	–
$\lambda = 0,25$						
R=0	1,357	3,150	5,026	9,254	10,051	9,780
R=0,2	1,384	3,182	5,047	9,233	10,021	9,756
R=0,4	1,469	3,282	5,107	9,162	9,918	9,704
R=0,6	1,634	3,461	5,197	9,007	9,717	9,600
R=0,8	1,970	3,781	5,361	8,764	9,444	9,492
R=0,95	3,117	5,061	6,674	10,069	10,738	11,043
$\lambda = 0,5$						
R=0	1,283	2,392	3,239	4,517	4,677	4,830
R=0,2	1,297	2,402	3,241	4,505	4,665	4,800
R=0,4	1,343	2,437	3,248	4,468	4,633	4,764
R=0,6	1,444	2,513	3,283	4,427	4,601	4,746
R=0,8	1,723	2,763	3,495	4,557	4,733	4,920
R=0,95	2,918	4,223	5,130	6,434	6,606	6,723
$\lambda = 1$						
R=0	1,029	1,533	1,796	2,113	2,177	2,183
R=0,2	1,042	1,542	1,804	2,119	2,183	2,185
R=0,4	1,085	1,578	1,837	2,144	2,207	2,204
R=0,6	1,190	1,673	1,932	2,229	2,288	2,285
R=0,8	1,490	1,994	2,268	2,577	2,624	2,643
R=0,95	2,702	3,459	3,871	4,339	4,391	4,432
$\lambda = 2$						
R=0	0,819	0,996	1,075	1,145	1,173	1,151
R=0,2	0,834	1,011	1,089	1,160	1,187	1,174
R=0,4	0,883	1,062	1,142	1,214	1,238	1,232
R=0,6	0,996	1,183	1,267	1,343	1,363	1,365
R=0,8	1,301	1,521	1,620	1,713	1,729	1,735
R=0,95	2,456	2,839	3,006	3,172	3,200	3,180
$\lambda = 4$						
R=0	0,717	0,775	0,801	0,819	0,821	0,821
R=0,2	0,732	0,790	0,817	0,835	0,837	0,837
R=0,4	0,781	0,842	0,870	0,890	0,892	0,892
R=0,6	0,891	0,961	0,991	1,014	1,016	1,018
R=0,8	1,183	1,274	1,313	1,343	1,347	1,347
R=0,95	2,265	2,439	2,510	2,569	2,582	2,572

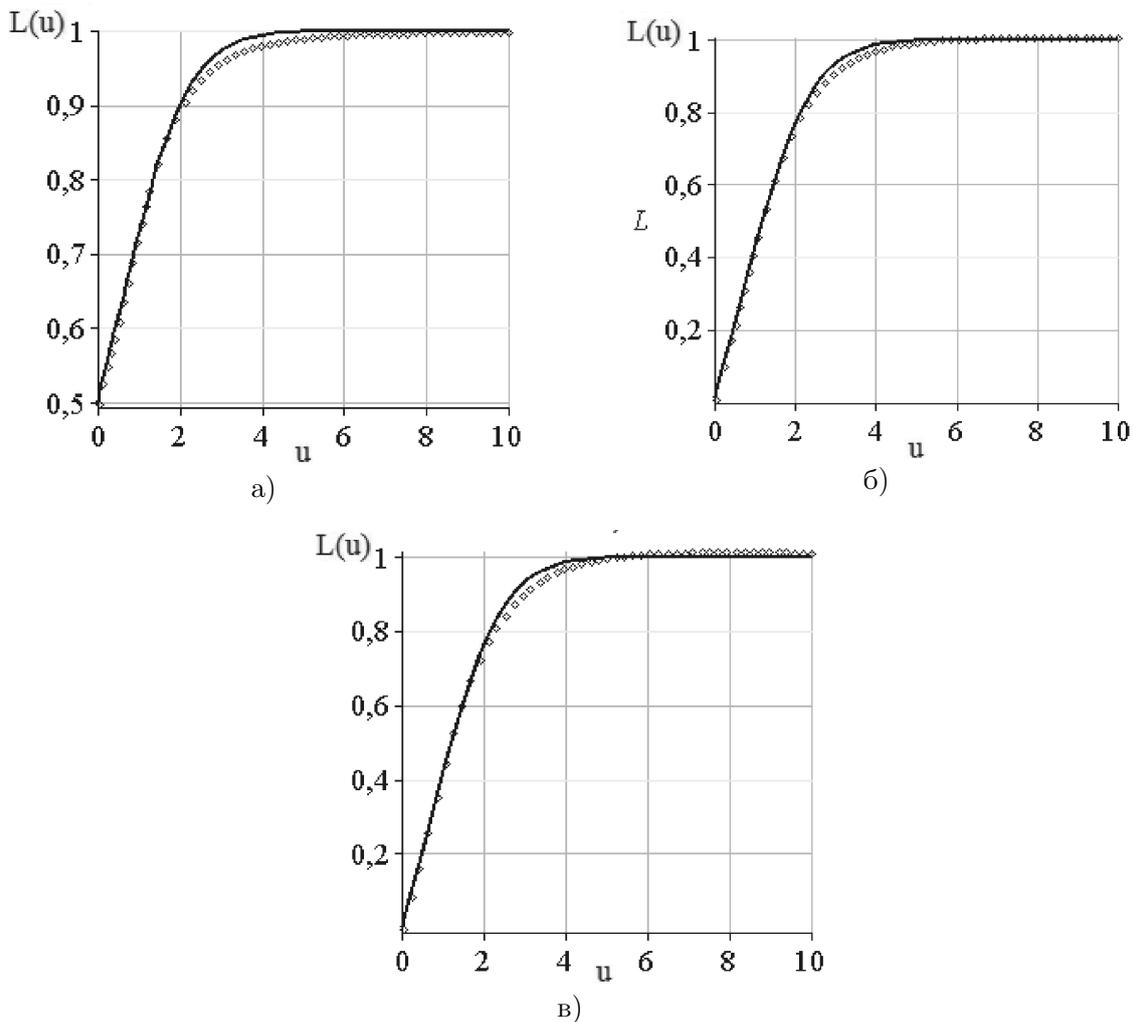


Рис. 3. Трансформанты ядра интегрального уравнения и ее аппроксимации  $L_N$

зывают незначительное влияние на контактные напряжения.

В табл. 2 приведены значения величины  $\frac{P}{\Theta_0 \delta}$  выражающей связь между приложенной силой и осадкой штампа. Значения крайнего правого столбца взяты из [7, 8].

### Заключение

Рассмотренные идеализированные модели в [1–3, 5–8] являлись упрощенными, и не учитывали деформируемость жесткой упругой подложки. Так как деформируемость подложки влияет на результаты измерений при определении упругих свойств мягких покрытий [4], при исследовании биологических объектов, современных полимерных покрытий и материалов [9, 10], необходимо учитывать деформируемость жесткой подложки.

Использование приближенного аналитического решения вида (2.5) и метод под-

бора  $A_i$ ,  $B_i$ , изложенный в [14], позволяет добиться высокой точности аппроксимации трансформанты ядра интегрального уравнения (2.1) и в результате получить хорошую точность приближенного аналитического решения для всех значений геометрического параметра  $\lambda$ .

Метод позволяет получить механические характеристики задачи в аналитическом виде, для любой относительной жесткости основания к покрытию, что представляет интерес для задач биомеханики, при определении механических свойств биологических тканей методом индентирования и при определении упругих свойств мягких полимеров, модули Юнга которых лежат в диапазоне от 0,001 ГПа до 1 ГПа [9].

Выражениями вида (2.5) можно аппроксимировать трансформанту ядра интегрального уравнения задачи не только в случае однородного слоя, но и в том случае, ко-

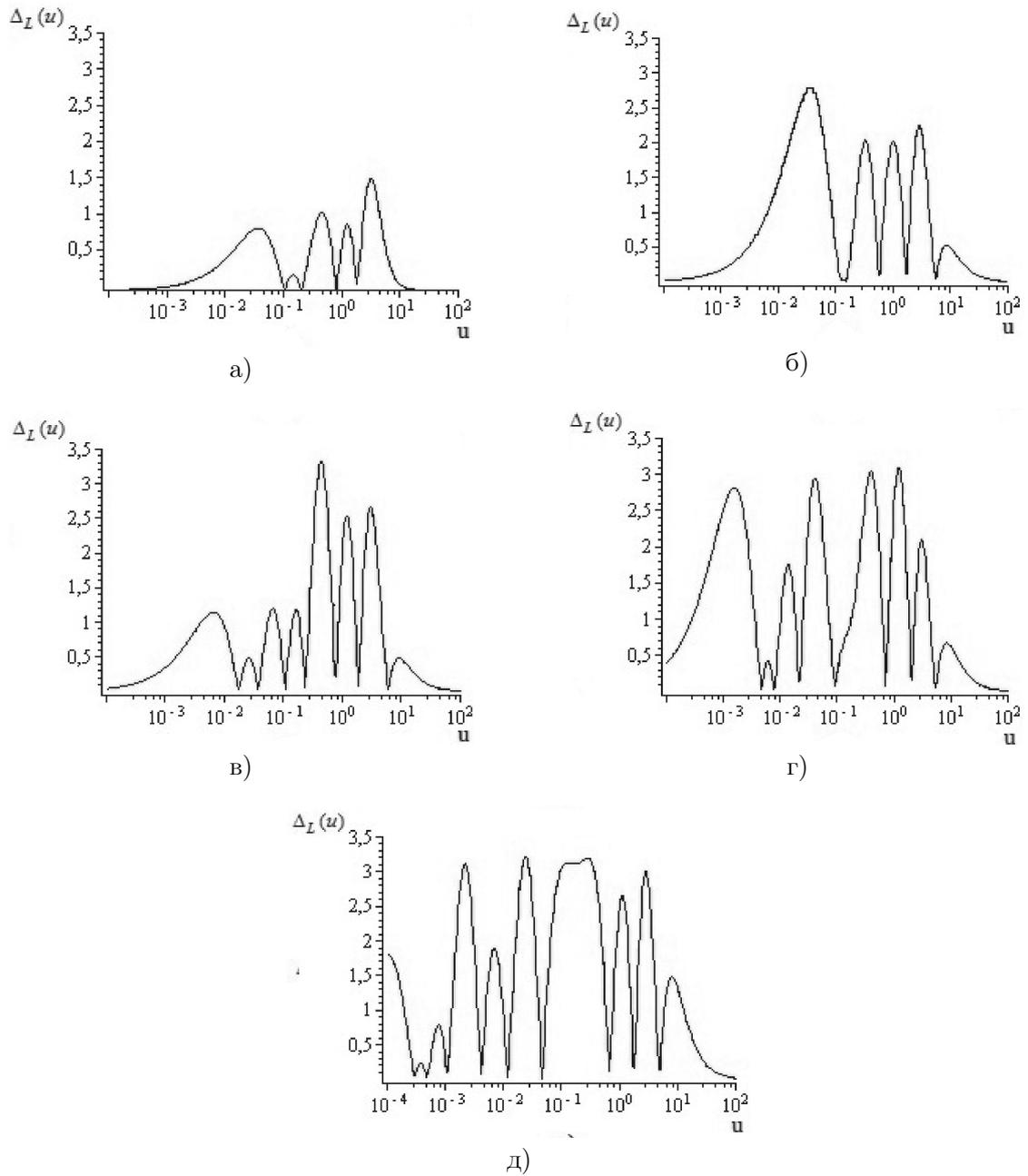


Рис. 4. Погрешность аппроксимации  $L_N$

Таблица 2

$\lambda$	$E_1/E_0$	2	5	10	100	1000	$\infty$
$\lambda = 0,125$		7,38	15,54	24,59	55,05	63,95	—
$\lambda = 0,25$		6,98	13,09	18,66	30,75	33,08	32,86
$\lambda = 0,5$		6,38	10,16	12,85	16,81	17,39	17,62
$\lambda = 1$		5,60	7,50	8,52	9,70	9,88	9,93
$\lambda = 2$		4,90	5,73	6,10	6,45	6,53	6,51
$\lambda = 4$		4,46	4,80	4,95	5,06	5,08	5,07

гда упругие свойства мягкого слоя изменяются по глубине, и изложенный метод можно использовать для решения задачи в случае многослойного или функционально-градиентного слоя на жесткой упругой подложке.

### Литература

1. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя // ПММ. 1958. Т. 22. С. 321–326.
2. Ворович И. И., Устинов Ю. А. О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23. С. 445–455.
3. Макушкин А. П. Напряженно-деформированное состояние упругого слоя при внедрении в него сферического индентора // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 3. С. 423–434.
4. Torskaya E. V., Goryacheva I. G. The effect of interface imperfection and external loading on the axisymmetric contact with a coated solid // Wear 254, 2003. Pp. 538–545.
5. Yu H. Y., Sanday S. C., Rath B. B. The effect of substrate on the elastic properties of films determined by the indentation test-axisymmetric Boussinesq problem // J. Mech. Phys. Solids. 1990. Vol. 38. No. 6. Pp. 745–764.
6. Jaffar M. J. A numerical solution for axisymmetric contact problems involving rigid indenters on elastic layers // J. Mech. Phys. Solids. 1988. Vol. 36. No. 4. Pp. 401–416.
7. Александров В. М., Пожарский А. Д. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
8. Ворович И. И., Александров В. А., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. Погоцкая И. В., Абетковская С. О., Чижик С. А. Влияние физико-механических свойств «мягких» материалов на характеристики колебания зонда в динамической атомно-силовой микроскопии // Методологические аспекты сканирующей зондовой микроскопии. Конференция, 2008. С. 169–174.
10. Гоголинский К. В., Усеинов А. С. Измерение модуля упругости сверхтвердых материалов с помощью сканирующего силового микроскопа «Наноскан» // БЕЛСЗМ-6. конф., 2004. С. 47–53.
11. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства // Журнал вычислительной математики и матем. физики. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.
12. Приварников А. К. Пространственная деформация многослойного основания // В сб.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск.: Днепропетр. ун-т, 1973. С. 27–45.
13. Айзикович С. М., Александров В. М. О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 40–43.
14. Айзикович С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148–158.

Ключевые слова: контактные задачи, однородный слой, приближенное аналитическое решение, мягкий упругий слой.

Статья поступила 18 августа 2011 г.

Научно-образовательный центр «Материалы» Донского государственного технического университета, г. Ростов-на-Дону

Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, г. Минск

© Волков С. С., Айзикович С. М., Погоцкая И. В., 2012