

УДК 539.375:534.1

ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ-СИМВОЛОВ ГРИНА ТРЕХСЛОЙНЫХ СРЕД С ДЕФЕКТАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ¹*Пряхина О. Д.², Смирнова А. В.³***CONSTRUCTION OF THE DETERMINANTS OF MATRIX-GREEN'S THREE-LAYER MEDIA CHARACTERS WITH DEFECTS OF DIFFERENT NATURE**

Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The use of an effective method of construction of the determinants of characters nuclear systems of integral equations for layered media with defects, demonstrated by the example of three-layer elastic isotropic media.

Keywords: semibounded layered medium, cracks, severe inclusions, matrix-function relationships of the matrix Green's characters, the system of integral equations.

Динамические процессы в полуограниченных средах, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, несмотря на большое количество посвященных им работ, продолжают привлекать внимание многих исследователей. Это обусловлено как широким спектром их приложения в таких областях как сейсмология, геофизика, акустоэлектроника, дефектоскопия, машиностроение, материаловедение и т.д., так и наличием большого числа фундаментальных теоретических проблем, требующих своего решения. К их числу относятся проблемы построения систем интегральных уравнений (СИУ) рассматриваемого класса задач, вопросы существования, единственности, корректной их разрешимости и т.д. Кроме того, зависимость напряженно-деформированного состояния механических систем подобного рода от многих параметров делает традиционные аналитические и численные методы их анализа неэффективными даже при небольшом количестве дефектов, а с ростом частоты колебаний и в областях больших размеров многие из них неприменимы. В связи с этим актуальными являются как исследования подобного рода задач в новой постановке, так и разработка новых численно-аналитических методов их решения. Особенно важным является создание методов построения и анализа

матриц-символов Грина СИУ и их определителей, лежащих в основе изучения резонансных свойств механических систем.

В настоящей работе рассматривается совокупность неоднородностей (дефектов) типа жестких включений и/или трещин, расположенных в плоскостях, параллельных границам раздела слоев в трехслойной полуограниченной среде. Подход, основанный на разработанном авторами методе, позволил подойти к изучению динамики сред, содержащих неоднородности различной природы, с единой позиции и при этом избежать возрастающей с ростом количества дефектов громоздкости в описании и исследовании краевых задач, а также значительно упростить поиск условий возникновения экстремальных состояний механической системы. Другим преимуществом данного подхода является его применимость к исследованию динамики сред с произвольным количеством слоев и с учетом большого спектра физических явлений, протекающих в неоднородных телах в условиях связанности полей.

1. Общая постановка задачи

Перемещения $\mathbf{w}(x, y, z) = \{w_1, w_2, w_3\}$ точек пакета N упругих изотропных слоев, занимающего объем $(-\infty < x, y < +\infty;$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (11-08-00135).

²Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: donna@kubsu.ru.

³Смирнова Алла Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета.; e-mail: allasmir@yandex.ru.

$-H \leq z \leq 0$), вызванные вибрацией границ жестких включений и берегов трещин, расположенных в \tilde{N} уровнях по глубине пакета, описываются системой дифференциальных уравнений Ламе

$$(\lambda_k + \mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w}_k + \mu_k \Delta \mathbf{w}_k - \rho_k \omega^2 \mathbf{w}_k = 0, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{w}_k(x, y, z) = \mathbf{w}(x, y, z),$$

$$-2 \sum_{m=1}^k h_m \leq z \leq -2 \sum_{m=1}^{k-1} h_m, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

со следующими граничными условиями (общий множитель $e^{-i\omega t}$ опущен):

на верхней грани

$$\mathbf{t}(x, y, z)|_{z=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad (1.2)$$

на границах раздела физико-механических свойств слоев, не содержащих дефектов

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}_k^-, & -\infty < x, y < +\infty, \\ \mathbf{t}_k^+ = \mathbf{t}_k^-, & -\infty < x, y < +\infty, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$z = z_k = -2 \sum_{p=1}^k h_p, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

в плоскостях расположения включений

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{p(k)}^+ = \mathbf{w}_{p(k)}^- = \mathbf{w}_{p(k)}^0, & (x, y) \in \Omega_{p(k)}, \\ \Delta \mathbf{t}_{p(k)} = 0, & (x, y) \notin \Omega_{p(k)}, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$z = \tilde{z}_k = -2 \sum_{p=1}^{p(k)} h_p, \quad k = 1, 2, \dots, N_1,$$

в плоскостях, содержащих трещины

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{m(k)}^+ = \mathbf{t}_{m(k)}^- = \mathbf{t}_{m(k)}^0, & (x, y) \in \tilde{\Omega}_{m(k)}, \\ \Delta \mathbf{w}_{m(k)} = 0, & (x, y) \notin \tilde{\Omega}_{m(k)}, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$z = \tilde{z}_k = -2 \sum_{m=1}^{m(k)} h_m, \quad k = 1, 2, \dots, N_2,$$

на нижней грани пакета

$$\mathbf{w}(x, y, -H) = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\mathbf{w}_k^\pm = \mathbf{w}(x, y, z)|_{z=z_k \pm 0},$$

$$\mathbf{t}_k^\pm = \mathbf{t}(x, y, z)|_{z=z_k \pm 0}$$

— векторы перемещений и напряжений на верхней (+) и нижней (−) границах раздела слоев; $\mathbf{w}_{p(k)}^\pm, \mathbf{t}_{p(k)}^\pm$ — векторы перемещений и напряжений на границах включения, занимающего область $\Omega_{p(k)}$ в плоскости $z = \tilde{z}_k$, $\Delta \mathbf{t}_{p(k)} = \mathbf{t}_{p(k)}^+ - \mathbf{t}_{p(k)}^-$, $p(k)$ — номер границы раздела слоев, где расположено k -тое включение ($k = 1, 2, \dots, N_1$); $\mathbf{w}_{m(k)}^\pm, \mathbf{t}_{m(k)}^\pm$ — векторы перемещений и напряжений на берегах трещины, занимающей область $\tilde{\Omega}_{m(k)}$ в плоскости $z = \tilde{z}_k$, $\Delta \mathbf{w}_{m(k)} = \mathbf{w}_{m(k)}^+ - \mathbf{w}_{m(k)}^-$, $m(k)$ — номер границы раздела слоев, содержащей k -тую трещину ($k = 1, 2, \dots, N_2$); $N_1 + N_2 = \tilde{N}$ в предположении, что $p \neq m$.

Краевая задача (1.1)–(1.6) сводится к решению СИУ [1–3]

$$\int_{\delta_1} \int_{\delta_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = f(x, y), \quad (1.7)$$

$$(x, y) \in \Omega,$$

где $f(x, y) = \{\mathbf{w}_{p(1)}^0, \mathbf{w}_{p(2)}^0, \dots, \mathbf{w}_{p(N_1)}^0, \mathbf{t}_{m(1)}^0, \mathbf{t}_{m(2)}^0, \dots, \mathbf{t}_{m(N_2)}^0\}$ — многомерный вектор, компонентами которого являются векторы перемещений и напряжений, заданные на границах включений и берегах трещин соответственно, $\mathbf{Q} = \{\eta_{p(1)}, \dots, \eta_{p(N_1)}, \mathbf{f}_{m(1)}, \dots, \mathbf{f}_{m(N_2)}\}$ — многомерный вектор, имеющий своими компонентами трансформанты Фурье скачков векторов напряжений $\Delta \mathbf{t}_{p(k)}(x, y)$ на границах включений и $\mathbf{f}_{m(k)}$ — скачков векторов перемещений $\Delta \mathbf{w}_{m(k)}(x, y)$ на берегах трещин. Носителем каждой из вектор-функций $\Delta \mathbf{t}_{p(k)}(x, y)$, $\Delta \mathbf{w}_{m(k)}(x, y)$ является соответствующая область из Ω , $\Omega = \{\Omega_{p(1)}, \Omega_{p(2)}, \dots, \Omega_{p(N_1)}, \tilde{\Omega}_{m(1)}, \tilde{\Omega}_{m(2)}, \dots, \tilde{\Omega}_{m(N_2)}\}$. Так как дефекты расположены в разных плоскостях, то матрица-символ ядра $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$ СИУ (1.7), в отличие от СИУ традиционных контактных задач, является блочной

$$\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{\tilde{N}},$$

$$\mathbf{K}_{ij}(\alpha, \beta) = \|K_{mn}^{ij}(\alpha, \beta)\|_{m,n=1}^3.$$

Введем матрицы, характеризующие положение в среде включений

$$\mathbf{G}_{Np} = [\mathbf{K}_p^-(h_1, h_2, \dots, h_p)]^{-1} - [\mathbf{K}_{N-p}^-(h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_N)]^{-1} \quad (1.8)$$

и трещин

$$\mathbf{S}_{Nm} = \mathbf{K}_m^-(h_1, h_2, \dots, h_m) - \mathbf{K}_{N-m}^-(h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_N). \quad (1.9)$$

Здесь \mathbf{K}_n^- — матрица Грина пакета n слоев со свободной верхней гранью, \mathbf{K}_{N-n} — матрица Грина пакета $(N - n)$ слоев на жестком основании, n принимает значения $p(k)$ или $m(k)$. В этих обозначениях

$$\mathbf{K}_{ii}^- = \begin{cases} \mathbf{G}_{Np(i)}^{-1}, & i \leq N_1, \\ \mathbf{S}_{Nm(i-N_1)}^{-1}, & N_1 < i \leq \tilde{N}, \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{V}_{p(i)p(j)}, & i < N_1, j < N_1, \\ \mathbf{M}_{p(i)m(j-N_1)}, & i < N_1, j > N_1, \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{L}_{m(i-N_1)p(j)}, & i > N_1, j \leq N_1, \\ \mathbf{D}_{m(i-N_1)m(j-N_1)}, & i > N_1, j > N_1. \end{cases}$$

Матрицы \mathbf{L}_{ij} , \mathbf{V}_{ij} и \mathbf{D}_{ij} , \mathbf{M}_{ij} определяются из соотношений [4]

$$\mathbf{L}_{p(i)p(j)} = \begin{cases} \mathbf{R}_{p(i)p(j)}^- (\mathbf{K}_{p(j)}^-)^{-1} \mathbf{G}_{Np(j)}^{-1}, & p(i) < p(j), \\ \mathbf{R}_{p(i)p(j)} \mathbf{K}_{N-p(j)}^{-1} \mathbf{G}_{Np(j)}^{-1}, & p(i) > p(j), \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{V}_{p(i)p(j)} = \begin{cases} \mathbf{K}_{p(i)}^- \mathbf{L}_{p(i)p(j)}, & p(i) < p(j), \\ \mathbf{K}_{N-p(i)}^- \mathbf{L}_{p(i)p(j)}, & p(i) > p(j), \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{D}_{m(i)m(j)} = \begin{cases} \mathbf{R}_{m(i)m(j)}^- \mathbf{S}_{Nm(j)}^{-1}, & m(i) < m(j), \\ \mathbf{R}_{m(i)m(j)} \mathbf{S}_{Nm(j)}^{-1}, & m(i) > m(j), \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{M}_{m(i)m(j)} = \begin{cases} \mathbf{K}_{m(i)}^- \mathbf{D}_{m(i)m(j)}, & m(i) < m(j), \\ \mathbf{K}_{N-m(i)}^- \mathbf{D}_{m(i)m(j)}, & m(i) > m(j), \end{cases} \quad (1.14)$$

а матрицы \mathbf{R}_{km} и \mathbf{R}_{km}^- даются формулами

$$\mathbf{R}_{km} = (-1)^{(k-m)} \prod_{i=k}^{m+1} \mathbf{F}_{N+1-i}^{-1}(h_i) \mathbf{B}_+(-h_i),$$

$$\mathbf{R}_{km}^- = \prod_{i=k+1}^m \Phi_i^{-1}(h_1, h_2, \dots, h_i) \mathbf{B}_-(h_i).$$

Рекуррентная процедура вычисления матриц $\mathbf{K}_m^-(h_1, h_2, \dots, h_m)$, $\mathbf{K}_{N-m}^-(h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_N)$, $\Phi_m(h_1, h_2, \dots, h_m)$, $\mathbf{F}_{N-m}(h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_N)$ приведена в [3]. Вспомогательные матрицы \mathbf{B}_\pm даются в [5].

Элементы введенных матриц зависят от параметров преобразования Фурье α , β , частоты гармонических колебаний ω , а также физико-механических параметров (плотности ρ_k , модуля сдвига μ_k , коэффициента Пуассона ν_k) слоев, полутолщины h_k которых указаны в качестве аргументов, $k = 1, 2, \dots, N$. Все они, за исключением \mathbf{S}_{Nm}^{-1} , \mathbf{D}_{mk} , имеют структуру, присущую элементам матриц-символов Грина упругих полуграниченных сред без дефектов. Размеры и относительное расположение областей $\Omega_{p(k)}$, $\tilde{\Omega}_{m(k)}$ также являются параметрами задачи.

Полученные в виде произведения матриц представления (1.10)–(1.14) допускают простую интерпретацию результатов и удобны для проведения дальнейшего анализа элементов и определителя блочной матрицы-символа ядра СИУ.

Установлено, что диагональные элементы символа ядра \mathbf{K} в (1.7) — матрицы

$$\mathbf{G}_{Np}^{-1}(\alpha, \beta) = \left\| G_{ij}^{Np} \right\|_{i,j=1}^3,$$

$$\mathbf{S}_{Nm}^{-1}(\alpha, \beta) = \left\| S_{ij}^{Nm} \right\|_{i,j=1}^3$$

обладают следующими свойствами [6]:

1) $g_{Np}(\lambda, \omega) = \det \mathbf{G}_{Np}^{-1}(\alpha, \beta)$, $s_{Nm}(\lambda, \omega) = \det \mathbf{S}_{Nm}^{-1}(\alpha, \beta)$ являются мероморфными функциями параметра λ и допускают представление в виде

$$g_{Np}(\lambda, \omega) = \prod_{k=1}^2 \frac{\xi_1(h_1, \dots, h_N)}{\Delta_{kN}(h_1, \dots, h_N)},$$

$$s_{Nm}(\lambda, \omega) = \prod_{k=1}^2 \frac{\xi_2(h_1, \dots, h_N)}{\Delta_{kN}(h_1, \dots, h_N)},$$

$$\xi_1 = \Delta_{kp} (h_1, h_2, \dots, h_p) \times \\ \times D_{k(N-p)} (h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_N),$$

$$\xi_2 = D_{km}^- (h_1, h_2, \dots, h_m) \times \\ \times \Delta_{k(N-m)} (h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_N),$$

где Δ_{kp} — знаменатель, а D_{kp} — числитель определителя матрицы-символа Грина пакета p -слоев на жестком основании D_{km}^- — знаменатель определителя матрицы-символа Грина пакета m -слоев со свободной верхней гранью ($k = 1$ отвечает антиплоской задаче, а $k = 2$ — плоской).

2) Функции $g_{Np}(\lambda, \omega)$, $s_{Nm}(\lambda, \omega)$ могут иметь конечное число вещественных нулей и полюсов, остальные — комплексные с точкой сгущения на бесконечности; $g_{Np}(\lambda, \omega)$, $s_{Nm}(\lambda, \omega) \neq 0$ для $\alpha \in \delta_1$, $\beta \in \delta_2$.

3) Функции $G_{i3}^{Np}(\alpha, \beta)$, $S_{i3}^{Nm}(\alpha, \beta)$ и $G_{3i}^{Np}(\alpha, \beta)$, $S_{3i}^{Nm}(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2$ нечетные, остальные — четные. Элементы $G_{ij}^{Np}(\alpha, \beta)$, $S_{ij}^{Nm}(\alpha, \beta)$ обладают асимптотикой вида

$$G_{ij}^{Np}(\alpha, \beta) = \lambda^{-1} C_{ij}^{Np}(\varphi) [1 + O(\lambda^{-\varepsilon})],$$

$$S_{ij}^{Nm}(\alpha, \beta) = \lambda C_{ij}^{Nm}(\varphi) [1 + O(\lambda^{-\varepsilon})], \quad \varepsilon > 0,$$

$$\alpha = \lambda \cos \varphi, \quad \beta = \lambda \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Коэффициенты $C_{ij}^{Np}(\varphi)$, $C_{ij}^{Nm}(\varphi)$ асимптотического разложения зависят от физико-механических параметров только двух слоев, содержащих дефект на своей границе, и совпадают с коэффициентами асимптотического разложения символа ядра СИУ для двухмодульного пространства с дефектом соответствующего типа (включением или трещиной) на стыке полупространств.

4) Матрицы-функции $\mathbf{K}_{lm}(\alpha, \beta)$ ($l \neq m$) при $|\lambda| \rightarrow \infty$ являются экспоненциально убывающими.

5) Определитель матрицы-символа СИУ (1.7) равен

при наличии в среде только включений ($N_2 = 0$)

$$\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \det \mathbf{G}_{Np(\tilde{N})}^{-1} \times \\ \times \prod_{k=\tilde{N}-1}^1 \det \mathbf{G}_{p(k+1)p(k)}^{-1}, \quad (1.15)$$

при наличии только трещин ($N_1 = 0$)

$$\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \det \mathbf{S}_{Nm(1)}^{-1} \times \\ \times \prod_{k=1}^{\tilde{N}-1} \det \mathbf{S}_{(N-m(k))(m(k+1)-m(k))}^{-1}. \quad (1.16)$$

Заметим, что матрицы \mathbf{L}_{ij} и \mathbf{D}_{ij} в (1.11), (1.13) определяют напряжения, а матрицы \mathbf{V}_{ij} и \mathbf{M}_{ij} в (1.12), (1.14) — перемещения в плоскости \tilde{z}_i , вызванные соответственно скачками напряжений и перемещений на границах дефекта, расположенного в плоскости \tilde{z}_j .

Соотношения (1.10)–(1.14) позволяют исследовать динамические процессы в полужограниченных слоистых средах при произвольном количестве и расположении в них дефектов различного типа. При этом построение СИУ не требует решения краевых задач. Если включение или трещина находится внутри какого-либо слоя, следует ввести условную границу раздела и параметры прилегающих к ней слоев положить равными. Для однородной среды, содержащей многоуровневые дефекты физико-механические параметры всех слоев принимаются равными.

Важно отметить, что матричные равенства (1.10)–(1.16) сохраняются и для общего случая термоэластостатических сред. При этом размерность многомерных векторов и блочной матрицы-символа ядра в (1.7) не изменяется, а размерность ее элементов и матриц, их формирующих, становится равной 5×5 [5].

2. Вычисление определителей матриц-символов СИУ для трехслойных сред с неоднородностями различной природы

Важным для определения особых, в том числе резонансных, режимов колебаний является построение определителя СИУ (1.7) и поиск его нулей [7–9].

Используя изложенный в [2–4, 10] метод, выпишем элементы и определители матриц-символов ядер СИУ, отвечающих различной последовательности расположения трещин и включений в трехслойном пакете с жестко заземленной нижней гранью.

¹⁰ Включения в трехслойном пакете.

1.1. Предположим, что включения расположены на каждой границе раздела слоев.

Тогда $N_2 = 0$, $\tilde{N} = N_1 = 2$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$ и элементы блочной матрицы-символа СИУ (1.7) принимают вид

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{G}_{31}^{-1}, \quad \mathbf{K}_{22} = \mathbf{G}_{32}^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{V}_{12} = \mathbf{K}_1^-(h_1) \mathbf{R}_{12}^- [\mathbf{K}_2^-(h_1, h_2)]^{-1} \mathbf{G}_{32}^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{21} = \mathbf{V}_{21} = \mathbf{K}_1(h_3) \mathbf{R}_{21} [\mathbf{K}_2(h_2, h_3)]^{-1} \mathbf{G}_{31}^{-1}.$$

Определитель матрицы-символа СИУ в этом случае вычисляется по формуле

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{\Delta_1(h_1) D_1(h_2) D_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}.$$

Вид функций Δ_1 , D_1 , а также рекуррентная формула вычисления Δ_3 приведены в [3].

1.2. Если в трехслойном пакете имеется только одно включение на границе между первым и вторым слоем, то $N_2 = 0$, $\tilde{N} = N_1 = 1$, $p(1) = 1$ и

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{11} = \mathbf{G}_{31}^{-1},$$

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{\Delta_1(h_1) D_2(h_2, h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}. \quad (2.1)$$

Для включения между вторым и третьим слоем имеем $N_2 = 0$, $\tilde{N} = N_1 = 1$, $p(1) = 2$ и

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{11} = \mathbf{G}_{32}^{-1},$$

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{\Delta_2(h_1, h_2) D_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}. \quad (2.2)$$

1.3. Когда в условиях п. 1.1 верхняя грань пакета слоев является свободной от напряжений только вне области Ω_0 , где реализуется жесткий контакт со штампом, размерность СИУ (1.7) увеличивается. Диагональными элементами ее блочной матрицы символа Грина будут матрицы $\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{G}_{31}^{-1}$, $\mathbf{K}_{33} = \mathbf{G}_{32}^{-1}$, а определитель запишется в форме

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{D_1(h_1) D_1(h_2) D_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}.$$

Аналогично при наличии штампа на поверхности изменятся диагональные элементы и определитель $\det \mathbf{K}$, соответствующие положениям включений в среде, описанным в п.1.2.

Матрица-символ Грина контактной задачи для трехслойной среды без дефектов получается как частный случай выхода включения на поверхность.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{11} = \mathbf{G}_{30}^{-1} = \mathbf{K}_3,$$

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{D_3(h_1, h_2, h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}.$$

Функция $K(\lambda, \omega)$ является вещественной на вещественной оси $\text{Im } \lambda = 0$ и мероморфной в комплексной плоскости λ . В соответствии с известными свойствами функций Δ_k , D_k , $k = 1, 2, 3$ [4, 11] она не имеет вещественных нулей и полюсов в диапазоне частот $0 < \omega < \omega_{\text{кр}} \neq 0$ заширения волновода (трехслойного пакета слоев), что является основанием для поиска условий возникновения низкочастотных резонансов [12].

2⁰. Трещины в трехслойном пакете.

2.1. Для двух трещин, расположенных на первой и второй границах раздела слоев, имеем $N_1 = 0$, $\tilde{N} = N_2 = 2$, $m(1) = 1$, $m(2) = 2$.

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{S}_{31}^{-1}(\alpha, \beta, \omega), \quad \mathbf{K}_{22} = \mathbf{S}_{32}^{-1}(\alpha, \beta, \omega),$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{D}_{12} = \mathbf{R}_{12}^- \mathbf{S}_{32}^{-1}, \quad \mathbf{K}_{21} = \mathbf{D}_{21} = \mathbf{R}_{21} \mathbf{S}_{31}^{-1},$$

$$\det \mathbf{K} = \frac{D_1^-(h_1) D_1^-(h_2) \Delta_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}.$$

2.2. Если на границе между первым и вторым слоем имеется одна трещина, то $N_1 = 0$, $\tilde{N} = N_2 = 1$, $m(1) = 1$ и

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{11} = \mathbf{S}_{31}^{-1},$$

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{D_1^-(h_1) \Delta_2(h_2, h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}.$$

Для трещины между вторым и третьим слоем имеем $N_1 = 0$, $\tilde{N} = N_2 = 1$, $m(1) = 2$ и

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{11} = \mathbf{S}_{32}^{-1},$$

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{D_2^-(h_1, h_2) \Delta_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}.$$

2.3. При постановке контактной задачи на поверхности пакета слоев с сохранением условий п. 2.1 относительно расположения трещин диагональными элементами матрицы-символа Грина СИУ являются матрицы $\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{S}_{31}^{-1}$, $\mathbf{K}_{33} = \mathbf{S}_{32}^{-1}$, а определителем — функция

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{\Delta_1(h_1) D_1^-(h_2) \Delta_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}.$$

За счет функций D_1^- в рассмотренных механических системах с трещинами $\omega_{\text{кр}} = 0$

Аналогично записываются диагональные элементы и определитель $\det \mathbf{K}$, соответствующие описанным в п.2.2 положениям трещин, при наличии штампа на поверхности среды. Например, для трещины между вторым и третьим слоем

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{\Delta_2(h_1, h_2) \Delta_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)},$$

$$\omega_{\text{кр}} \neq 0.$$

3⁰. Включение и трещина в трехслойном пакете.

3.1. Пусть включение расположено на границе между первым и вторым слоем, а трещина — между вторым и третьим. Тогда $N_1 = 1, p(1) = 1, N_2 = 1, m(1) = 2$.

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{G}_{31}^{-1}(\alpha, \beta, \omega), \quad \mathbf{K}_{22} = \mathbf{S}_{32}^{-1}(\alpha, \beta, \omega),$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{M}_{12} = \mathbf{K}_1^-(h_1) \mathbf{R}_{12}^- \mathbf{S}_{32}^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{21} = \mathbf{L}_{21} = \mathbf{R}_{21} [\mathbf{K}_2(h_2, h_3)]^{-1} \mathbf{G}_{31}^{-1}.$$

Для вычисления определителя имеем формулу

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{\Delta_1(h_1) \Delta_1(h_2) \Delta_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)},$$

$$\omega_{\text{кр}} \neq 0.$$

При наличии штампа на поверхности при таком расположении дефектов

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{D_1(h_1) \Delta_1(h_2) \Delta_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)},$$

$$\omega_{\text{кр}} \neq 0.$$

3.2. Когда трещина расположена на границе между первым и вторым слоем, а включение — между вторым и третьим, то $p(1) = 2, m(1) = 1$.

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{G}_{32}^{-1}(\alpha, \beta, \omega), \quad \mathbf{K}_{22} = \mathbf{S}_{31}^{-1}(\alpha, \beta, \omega),$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{M}_{21} = \mathbf{K}_2(h_2, h_3) \mathbf{R}_{21} \mathbf{S}_{31}^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{21} = \mathbf{L}_{12} = \mathbf{R}_{12}^- [\mathbf{K}_2^-(h_1, h_2)]^{-1} \mathbf{G}_{32}^{-1}.$$

Определитель дается соотношением

$$\det \mathbf{K} = \frac{D_1^-(h_1) \Delta_1(h_2) D_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}, \quad \omega_{\text{кр}} = 0.$$

Если в дополнение к этим условиям на верхней грани пакета формулируется контактная задача, то

$$\det \mathbf{K} = \frac{\Delta_1(h_1) \Delta_1(h_2) D_1(h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}, \quad \omega_{\text{кр}} \neq 0.$$

Численные расчеты, соответствующих различным постановкам задач и различным значениям геометрических и механических параметров, показали, что все матрицы \mathbf{K}_{ij} , являющиеся элементами блочной матрицы-символа ядра СИУ (1.7) для сред с дефектами, как и матрицы-функции традиционных контактных задач, обладают следующим свойством — вещественные нули и полюса их диагональных элементов чередуются, а нули и полюса недиагональных элементов и определителей — нет.

Предложенный метод дает четкое представление о структуре особых множеств определителя СИУ для слоистых сред с неоднородностями различной природы. Из построения следует, что корневое множество определителя матрицы-символа СИУ при произвольном количестве и расположении дефектов описывается произведением функций, каждая из которых зависит от геометрических и физико-механических параметров только тех частей объема, которые образованы в пакете слоев плоскостями, содержащими дефекты. Полярное множество определяется моделью среды без учета неоднородностей. Его эффективность заключается также и в том, что исследование волноводных свойств, управление ими и проектирование систем с заданными спектральными характеристиками на основе подбора геометрических и механических параметров можно проводить, минуя трудоемкую часть решения краевых задач и построения СИУ.

В качестве примера для определителей СИУ, вычисляемых по формулам (2.1), (2.2), на рис. 1, 2 соответственно приведены кривые нулей и полюсов, посчитанные в системе безразмерных параметров. Коэффициенты Пуассона и плотности всех слоев полагались равными, относительные значения толщин $h_1/a, h_2/a, h_3/a$ и жесткостей $M_2 = \mu_2/\mu_1$ и $M_3 = \mu_3/\mu_1$ указаны на рис. 1, 2. По оси абсцисс отложена приведенная частота колебаний $\Omega = \sqrt{\rho_1/\mu_1} \omega a$, где a — некоторый характерный линейный размер. Сплошной линией изображены кривые нулей, пунктирной — полюсов. На рис. 1 шестая по порядку выхода из оси абсцисс кривая нулей описывает нули функции $\Delta_1(h_1)$,

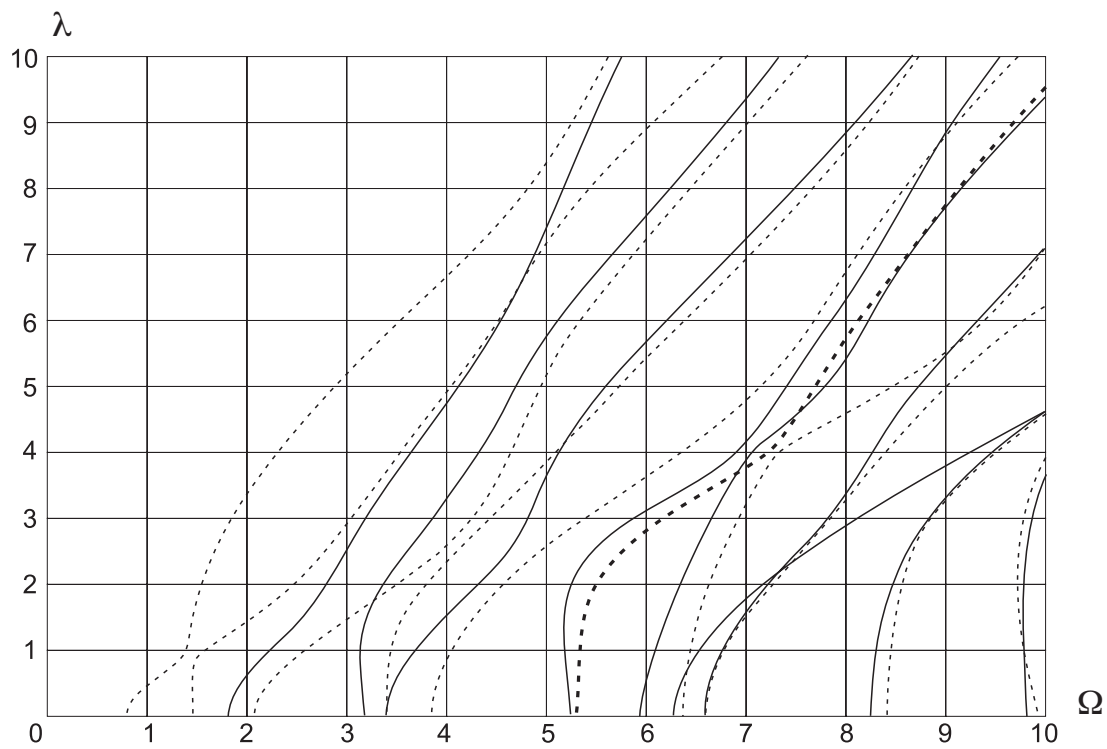


Рис. 1

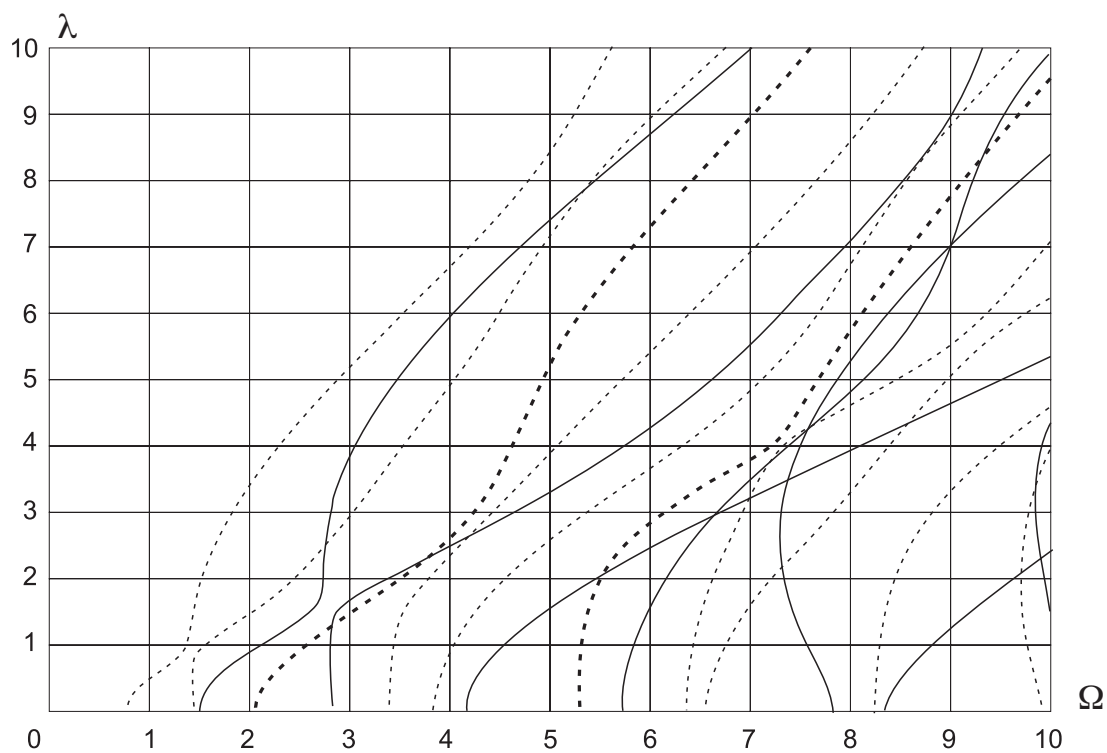


Рис. 2

остальные — нули функции $D_2(h_2, h_3)$. Аналогично на рис. 2 третья и шестая кривые являются нулями функции $D_1(h_3)$, а остальные — нулями $\Delta_2(h_1, h_2)$.

Литература

1. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Интегральные уравнения динамических задач для многослойных сред, содержащих систему трещин // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 345–351.
2. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87–97.
3. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* К исследованию волноводных свойств пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. С. 55–65.
4. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов вибропрочности» // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С. 44–53.
5. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
6. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // Докл. РАН. 2006. Т. 411. № 3. С. 330–333.
7. *Бабешко В. А.* К расчету параметров высокочастотного резонанса в трехмерном случае // ДАН. 1994. Т. 335. № 1. С. 55–58.
8. *Бабешко В. А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
9. *Бабешко В. А.* Теория «вирусов» вибропрочности для совокупностей включений // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 21–23.
10. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499–506.
11. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Влияние жестких включений на волноводные свойства пакета упругих слоев // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №1. С. 45–51.
12. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Интегральные уравнения динамических задач для слоистого полупространства, содержащего систему трещин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. №1. С. 37–42.

Ключевые слова: слоистая полуограниченная среда, трещины, жесткие включения, матрично-функциональные соотношения, матрицы-символы Грина, системы интегральных уравнений.