

УДК 539.3

О РАЗМЕРНОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ¹

*Соболь Б. В.*²

THE DIMENSION AND THE ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF THE THEORY OF ELASTICITY WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Sobol B. V.

On the basis of comparative analysis of the asymptotic representations of solutions of three-dimensional and two-dimensional problems of the theory of elasticity with mixed boundary conditions, the qualitative evaluation methods of physically meaningful quantities without the direct calculation of the detailed mechanical fields are proposed. In particular, we investigate the features of the mutual influence of cracks on the stress intensity factor in the vicinity of the circuit in unbounded and semi-bounded elastic bodies, as well as the mutual influence of stamps on the distribution of contact stresses under them.

Keywords: crack, stamp, asymptotic solution, stress intensity factor, contact stress, Influential factor.

Введение

Задачи теории упругости со смешанными граничными условиями в трехмерной постановке, с одной стороны, представляют значительный практический интерес, с другой, их изучение вызывает существенные математические трудности. Этими обстоятельствами в значительной мере и обусловлено стремление исследователей путем применения качественных методов получить приближенные формулы и простые оценки решений этих задач. Под качественными методами здесь понимаются методы оценки физически значимых величин без прямого детального вычисления механических полей. Систематическое изложение таких методов и подходов с приложениями в задачах механики разрушения и других областях представлено в [1].

В данной работе проведен математический и численный анализ асимптотических решений цикла трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями. В частности, представлены аналитические решения задач для неограниченных и полуограниченных упру-

гих тел (пространство, полупространство, слой), ослабленных системами плоских эллиптических в плане трещин. Рассмотрены различные варианты взаимного расположения трещин и границ. Структура таких решений [2] проанализирована в сравнении с известными предельными случаями, а также с плоскими аналогами рассматриваемых задач [3]. В частности, установлен характер влияния геометрических параметров на концентрацию напряжений в окрестности контура трещины; установлена возможность использования решений плоских аналогов в качестве асимптотических оценок для рассматриваемых трехмерных постановок задач.

Анализ известных решений цикла пространственных контактных задач для полупространства, слоя и клина [4, 5] и их плоских аналогов [6, 7] проводится аналогичным образом. Здесь же приведено решение трехмерной задачи теории упругости о контакте системы штампов с упругим слоем [8].

Общие выводы сделаны на основе сравнительного анализа имеющихся в литературе результатов исследования широкого круга неклассических контактных задач и задач

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (10-08-00839-а).

²Соболь Борис Владимирович, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий Донского государственного технического университета; e-mail: b.sobol@mail.ru.

теории трещин в трехмерной и в двумерной постановках. Проведенные рассуждения проиллюстрированы численными результатами исследования конкретных задач, полученными с участием автора.

1. Анализ общей структуры решений

Рассмотрим асимптотические решения цикла трехмерных задач теории упругости со смешанными граничными условиями.

К группе А отнесем задачи теории трещин:

1. Равновесие упругого пространства, ослабленного системой двух симметричных трещин;

2. Периодическая система (цепочка) трещин;

3. Дважды-периодическая система трещин, расположенных в одной плоскости;

4. Равновесие упругого полупространства, ослабленного плоской трещиной или системой трещин, перпендикулярных его границе;

5. Плоская поперечная трещина в упругом слое;

6. Равновесие упругого слоя, ослабленного продольными трещинами. В случае условий гладкого контакта на гранях слоя данная постановка может трактоваться как задача о равновесии упругого пространства, ослабленного цепочками трещин, расположенных соосно в параллельных плоскостях;

7. Равновесие упругого слоя, ослабленного системой продольных трещин.

К группе В отнесем контактные задачи:

1. Задача о поступательном внедрении без трения жесткого штампа в верхнюю грань упругого слоя. Рассмотрены варианты гладкого контакта нижней грани (а) и полного сцепления (б) с жестким основанием;

2. Задача о контакте штампа с гранью упругого клина. Важным частным случаем является задача о внедрении штампа в четвертьпространство (ступень);

3. Задача о контакте системы штампов с упругим полупространством и слоем.

Каждая из рассмотренных задач группы А применением двумерного интегрального преобразования Фурье (в задачах 4, 6 применяется обобщенное преобразование вдоль оси, пересекающей разрез) сводится к решению сингулярного интегрального

дифференциального уравнения [2].

$$\begin{aligned} \Delta \int_{\Omega} \int \gamma(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} + \\ + \int_{\Omega} \int \gamma(\xi, \eta) S(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = -\frac{2\pi}{\theta} p(x, y). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $(x, y) \in \Omega$ — область расположения трещины в плане,

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad \theta = E/[2(1 - \nu)],$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$\gamma(\xi, \eta)$ — функция раскрытия трещины, $p(x, y)$ — нагрузка, приложенная к ее берегам, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $S(x, y, \xi, \eta)$ — регулярная часть ядра уравнения, характеризующая влияние геометрических параметров задачи: размеров трещин в плане, относительных расстояний между ними и (или) до границ рассматриваемых тел. Кривизна контура области трещины Γ , рассматриваемая как функция дуги s , должна принадлежать пространству $H_1^\alpha(\Gamma)$, $\alpha > 0$ [4].

Для случаев эллиптической в плане формы рассматриваемых областей $\Omega : l(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 0$ построены асимптотические решения уравнений такой структуры в виде разложений в степенные ряды по упомянутым параметрам. В задачах А (1-7) они имеют аналогичные между собой представления [2]

$$\gamma(x, y) = ap/\theta/E(k)l^{1/2}(x, y)N(x, y), \quad (1.2)$$

$$p(x, y) = p = \text{const}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Это, в свою очередь, позволяет в каждом случае вычислить значения коэффициента интенсивности нормальных напряжений при обходе по контуру трещины: $K_I = K_{I\infty}N_\Gamma$, где $K_{I\infty}$ — соответствующая величина для задачи об изолированной эллиптической трещине в неограниченной упругой среде [9]:

$$K_{I\infty} = \frac{pA\sqrt{\pi}}{E(k)\sqrt{ab}}(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/4}.$$

Здесь и далее $K(k)$ и $E(k)$ полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, $k = \sqrt{1 - (a/b)^2}$, угол φ отсчитывается от положительного направления оси

Ox ; $N_{\Gamma} = 1 + \sum_{i=3}^{\infty} A_i \lambda^{-i}$ — фактор влияния на коэффициент интенсивности нормальных напряжений различных параметров. Следует отметить, что аналогичные асимптотические представления фактора влияния для плоских аналогов рассматриваемых задач имеют вид [2, 3]

$$N^* = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i \lambda^{-i}.$$

Нетрудно заметить, что влияние упомянутых параметров на решение в двумерном случае начинается с членов порядка λ^{-2} , а в трехмерном — λ^{-3} . Именно это обстоятельство и подтверждает гипотезу о том, что плоские решения дают оценки «сверху» для трехмерных аналогов.

В данной работе приведены асимптотические решения задач для эллиптических в плане областей. Тем не менее, очевидно, термин «фактор влияния» аналогичным образом может быть введен для любой выпуклой односвязной области, ограниченной гладким контуром, и для любых решений рассматриваемых задач, как аналитических, так и численных.

Отметим, что в публикациях Ниситани А., Мураками Ю. в ряде частных задач ранее был введен термин «коэффициент усиления интенсивности напряжений» (stress intensity magnification factor) [9].

Каждая из задач группы В применении соответствующих интегральных преобразований к уравнениям равновесия в перемещениях (в задачах 1 [4], 3 это — двумерное интегральное преобразование Фурье, в задаче 2 [5] решения можно строить в виде интегралов Фурье–Конторовича–Лебедева) сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно функции контактных напряжений под штампом $q(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} q(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} + \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Omega} q(\xi, \eta) T(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = \\ & = 2\pi\theta\delta(x, y), \quad (1.3) \\ & (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Здесь $\delta(x, y)$ описывает поверхность штампа по глубине. В данном случае рассматриваем

штампы с плоскими основаниями, внедряющиеся поступательно, т.е. $\delta(x, y) = -\delta$, $\delta > 0$; (в противном случае возможен отрыв среды от штампа, и, следовательно, возникает необходимость исследования задачи с неизвестной областью контакта). Регулярная часть ядра $T(x, y, \xi, \eta)$ в каждой из задач отражает влияние геометрических параметров и представляется соответствующими соотношениями.

Применение известного асимптотического метода, развитого в работах В. М. Александрова, позволяет в случае эллиптической в плане области контакта получить решение в каждом случае в виде аналогичных между собой асимптотических разложений [4, 5]:

$$q(x, y) = q(x, y)_{\infty} M(x, y), \quad (1.4)$$

$$M = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \lambda^{-i},$$

$$P = 2\pi\theta\delta b C_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \lambda^{-i}\right), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$q(x, y)_{\infty} = B_0 \theta \delta / a l^{-1/2}(x, y)$ — решение известной задачи Л. А. Галина о контакте эллиптического в плане штампа с упругим полупространством [10]. По аналогии с задачами теории трещин, назовем M фактором влияния, т.к., очевидно, при $\lambda \rightarrow \infty$ из этого решения вытекает указанный предельный случай постановки задачи.

Аналогичную структуру имеет решение задачи о контакте системы штампов с упругим слоем. При этом решение также может быть построено в виде разложения по двум независимым параметрам, характеризующим, соответственно, относительное расстояние между штампами и относительную толщину слоя.

Здесь же для сравнения приводим соответствующие решения двумерных аналогов рассматриваемых задач. Функция контактных напряжений в каждом из этих случаев имеет следующую структуру [6]:

$$q(x) = P / \pi (a^2 - x^2)^{-1/2} M^*, \quad (1.5)$$

$$M^* = \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} b_i \lambda^{-i}\right),$$

$$P = \pi\theta\delta \left(\ln 2\lambda - c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda^{-i} \right)^{-1}.$$

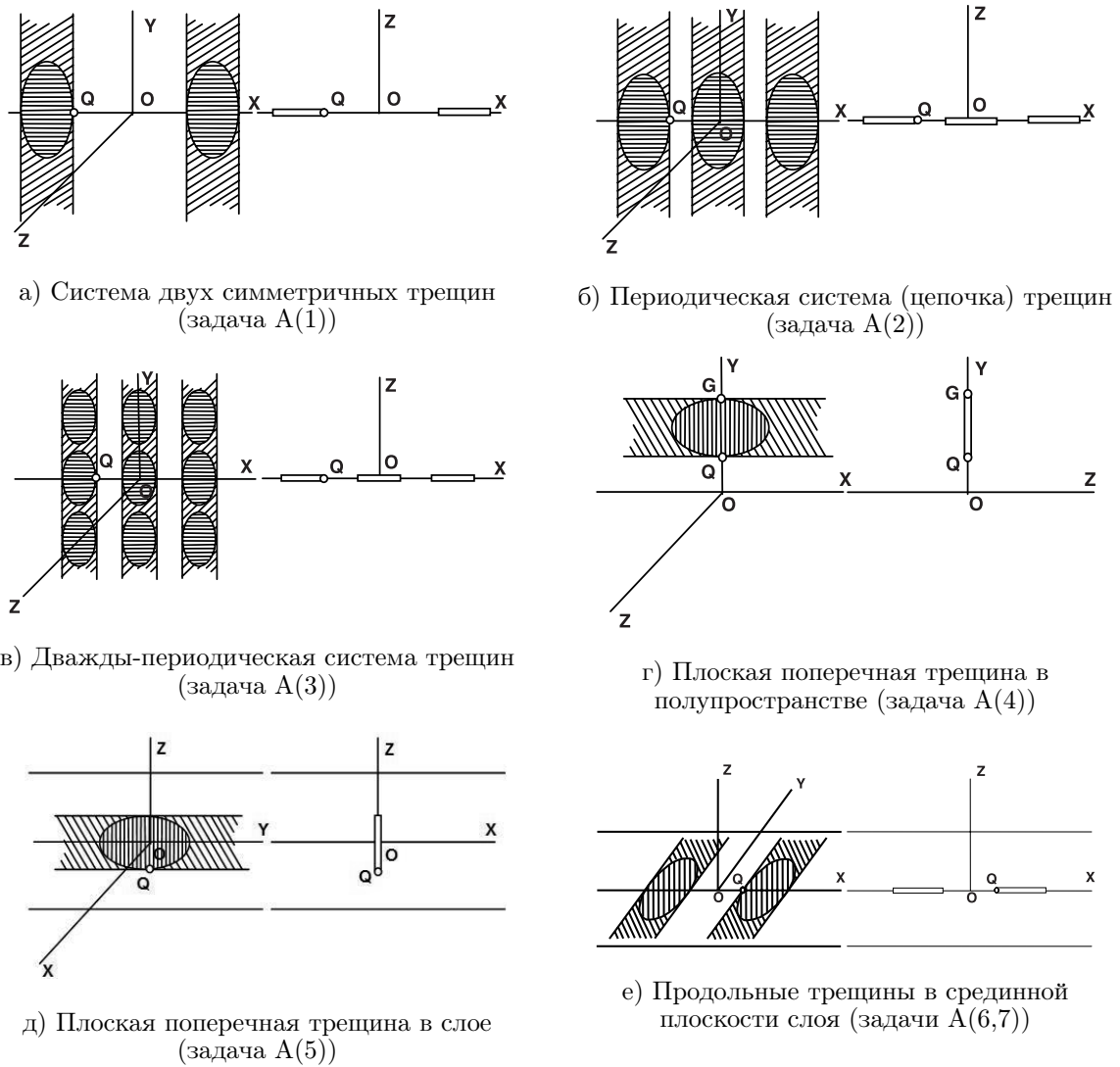


Рис. 1. Схемы задач теории трещин (трехмерная постановка и плоская деформация)

Аналогично задачам теории трещин, проводим анализ и сравниваем в этом случае асимптотические представления решений трехмерных и соответствующих плоских контактных задач и подтверждаем получаемые результаты непосредственными вычислениями.

2. Частные задачи теории трещин

В частности, в задаче о двух симметричных эллиптических трещинах (задача A(1), рис. 1а) регулярная часть ядра интегро-дифференциального уравнения имеет следующую структуру:

$$S(x, \xi, y, \eta) = s(x + \xi + 2l, \eta - y), \quad (2.1)$$

$$s(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^{-3/2}.$$

В задаче о периодической системе (цепочке), или дважды периодической системе трещин (задачи A(2,3), рис. 1б, 1в) предполагается соответствующая периодичность заданной функции давления $p(x, y) : p(x, y) = p(x + 2ml_1, y + 2nl_2)$, ($m, n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Здесь $2l, 2l_1, 2l_2$ — расстояния между центрами трещин в каждой из рассматриваемых задач. Так как все трещины находятся в одинаковых условиях, функция $\gamma(x, y)$ является также дважды периодической, с соответствующими периодами. В этом случае имеем:

$$S(x, \xi, y, \eta) = s(x - \xi, y - \eta); \quad (2.2)$$

Таблица 1. Сводная таблица членов асимптотических разложений задач теории трещин

Постановка задачи	3D, $A_i(k, \varphi)$ [2]	2D, $a_i(a)$
A (1), рис. 1а	(18.9), (18.19)	(II.126), (II.127), [3]
A (2), A(3), рис. 1б, 1в	(18.17), (18.19)	(III.62), [3]
A (4), A(5), рис. 1г, 1д	(19.12), (19.14)	(10.17), [2]; (IV.62),(V.49), [3]
A (6)	(20.20)	(8.12), (8.13); (8.21), [2]; (V.49), [3]
A (7), рис. 1е	(20.21)	(8.42), [2]

$$s(\alpha, \beta) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} [s(\alpha + 2ml_1, \beta - 2nl_2) + s(\alpha + 2ml_1, \beta + 2nl_2)].$$

Для задачи о трещине или системе трещин, расположенных в поперечной плоскости упругого полупространства (задача A (4), рис. 1г) регулярная часть ядра уравнения (1.1) имеет вид

$$S(x, \xi, y, \eta) = g(\xi - x, y, \eta);$$

$$g(\alpha, y, \eta) = 18y\eta J - \frac{\varepsilon_3 - 7\varepsilon}{2\varepsilon_2} \alpha^2 J - \frac{3(y + \eta)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha^4} \left[\frac{1}{J} - (y + \eta)^5 - \frac{5}{2} \eta^2 (y + \eta)^3 \right] - C_1 J (y + \eta)^2, \quad (2.3)$$

$$J = [(y + \eta)^2 + \alpha^2]^{-5/2},$$

$$C_1 = (4\nu\varepsilon_1\varepsilon_3 - 18\varepsilon_3 - 43\varepsilon)(4\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1};$$

$$\varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{1 - 2\nu};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2(1 - \nu)}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\nu}{1 - \nu}.$$

Для случая двух симметричных трещин, лежащих в поперечной плоскости упругого полупространства, регулярная часть ядра выражается соотношением

$$S(x, \xi, y, \eta) = s(x + \xi + 2l_2, \eta - y) + g(\xi - x, y + h_1, \eta + h_1) + g(\xi + x + 2l_2, y + h_1, \eta + h_1), \quad (2.4)$$

где h_1 — расстояние от центра трещины до границы полупространства.

Для задачи о равновесии упругого слоя, ослабленного плоской поперечной трещиной (Задача A (5), рис. 1д), регулярная часть ядра весьма громоздка и здесь не приводится.

Для задачи о трещине, лежащей в срединной плоскости слоя толщины $2h$ (задача A (6), рис. 1е) имеем:

$$S(x, \xi, y, \eta) = \frac{1}{h^3} F(R/h),$$

$$F(t) = \int_0^{\infty} u[H(u) - u]J_0(ut)du, \quad (2.5)$$

$$H(u) = u(sh2u + 2u)(ch2u - 1)^{-1}.$$

В случаях двух симметричных, или периодической системы трещин в срединной плоскости упругого слоя регулярная часть ядра интегро-дифференциального уравнения (1.1) формируется из (2.5) аналогично (2.1) или (2.2), с учетом, соответственно, симметрии или периодичности в постановке задачи

Если осуществить предельный переход в уравнении (1.1) для случаев (2.1)–(2.5), устремляя к бесконечности одну из полуосей эллиптической области, получаем соответствующие интегральные уравнения для плоских аналогов рассматриваемых здесь задач [2, 3] (рис. 1а–1г).

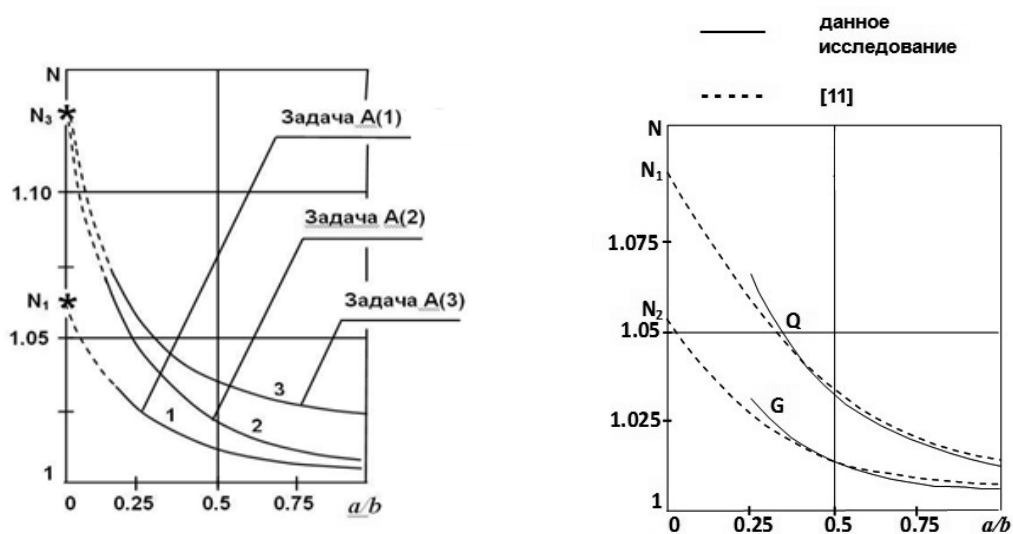
Перейдем к анализу регулярных асимптотических разложений точных решений рассматриваемых задач теории трещин. Ограничиваясь членами порядка λ^{-4} , выпишем выражение для фактора влияния в каждом случае. Для задач в трехмерной постановке имеем

$$N_{\Gamma} = 1 + \sum_{i=3}^4 A_i(k, \varphi) \lambda^{-i} + O(\lambda^{-5}). \quad (2.6)$$

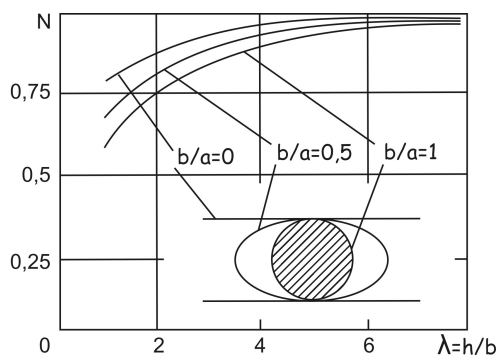
Приведем аналогичные соотношения для двумерных аналогов рассматриваемых здесь задач:

$$K_I^* = K_{I\infty}^* N_a^*, \quad K_{I\infty}^* = p\sqrt{\pi a},$$

$$N_a^* = 1 + \sum_{i=2}^4 a_i(a) \lambda^{-i} + O(\lambda^{-5}). \quad (2.7)$$



а) Значения фактора влияния в задачах A(1-3) б) Значения фактора влияния в задаче A(4)



в) Значения фактора влияния в задаче о продольной трещине в слое в задаче A(6)

Рис. 2. Результаты численного анализа асимптотических решений задач теории трещин в трехмерной и плоской постановках

Множители при степенях λ $A_i(k, \varphi)$, $a_i(a)$ в разложениях (2.6), (2.7) для каждой из рассматриваемых задач в трехмерной и двумерной постановках определяются из соответствующих соотношений, ссылки на которые сведены в табл. 1.

Проиллюстрируем сделанные наблюдения для некоторых частных случаев непосредственными вычислениями.

На рис. 2а представлены значения фактора влияния N_Γ в задаче о двух симметричных трещинах (кривая 1), цепочке (кривая 2) и дважды периодической системе трещин (кривая 3). Вычисления проведены в точке контура Q минимальной кривизны. N_1 , N_3 — соответствующие значения для плоских аналогов рассматриваемых задач.

Нетрудно заметить, что решение плоской задачи N_3 может быть получено экстраполированием кривой 3, а N_1 — соответственно, кривых 2 и 3. Отметим, что при равенстве всех соответствующих значений геометрических параметров, с точки зрения силового критерия разрушения, наибольшую опасность представляет дважды периодическая система трещин. Соответствующие значения фактора влияния для двумерных постановок задач дают, соответственно, завышенные оценки. Здесь же, для сравнения, штриховой линией представлены результаты решения указанных задач, полученные методом массовых сил [9]. Как показывают непосредственные вычисления, в области сходимости

по параметрам λ_1, λ_2 погрешность решения не превосходит 2%.

На рис. 2б представлены значения *фактора влияния* в задаче о поперечной эллиптической трещине в упругом полупространстве при различных соотношениях размеров трещины a/b . Вычисления проведены в точках контура Q и G, соответственно, максимально близкой и максимально удаленной от свободной поверхности. При вычислениях принято: $\lambda = 2, \nu = 0,5$. Штриховой линией отмечены решения задачи методом массовых сил. Предельные значения N_1, N_2 соответствуют решению двумерного аналога этой задачи [3]. Результаты вычислений в данном случае также иллюстрируют установленную аналитически возможность использования решений плоских задач в качестве асимптотических оценок решений их трехмерных аналогов.

Значения *фактора влияния* в задаче о продольной трещине в слое представлены на рис. 2в. Для сопоставления рассмотрены случаи круговой (осевая симметрия), эллиптической (трехмерная постановка) и полосовой (плоская деформация) трещин при условии гладкого контакта граней слоя с двумя жесткими основаниями. Следует, прежде всего, отметить, что, в отличие от рассмотренных выше задач, *фактор влияния* в данном случае принимает значения, меньшие 1. Иными словами, взаимное влияние трещины и граней слоя приводит в данном случае к снижению концентрации напряжений в окрестности контура, причем, наиболее ощутимо этот эффект проявляется для предельного случая — полосовой трещины. Заметим, что такое поведение *фактора влияния* характерно лишь для случая гладкого контакта граней слоя с двумя жесткими основаниями. В частности, в случае, когда грани слоя свободны, наблюдается обратный эффект.

3. Частные контактные задачи

Регулярные части ядер интегральных уравнений задач В (1, 2), (рис. 3а, 3б) известны и представляются соотношениями, приведенными в монографиях [4, 5]. Применение метода асимптотических разложений [4] предусматривает представление регулярной части ядра интегрального уравнения в степенной ряд по отрицательным степеням параметра, принимающего относительно большие значения, и последовательного решения цепочки сингулярных интегральных уравне-

ний, получаемых в результате сравнения выражений при одинаковых степенях этого параметра (или одинаковых комбинаций соответствующих степеней в случае многопараметрической задачи).

Результаты исследования задачи В (3), (рис. 3в) [8], в качестве иллюстрации, приведем несколько подробнее.

Регулярная часть ядра интегрального уравнения (1.3) для данной задачи представляется в виде

$$T(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{R_l} - \frac{1}{h} F\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{1}{h} F\left(\frac{R_l}{h}\right), \quad (3.1)$$

$$R_l = \sqrt{(x + \xi + 2l)^2 + (y - \eta)^2},$$

$$F(t) = \int_0^\infty [1 - L(u)] J_0(ut) du;$$

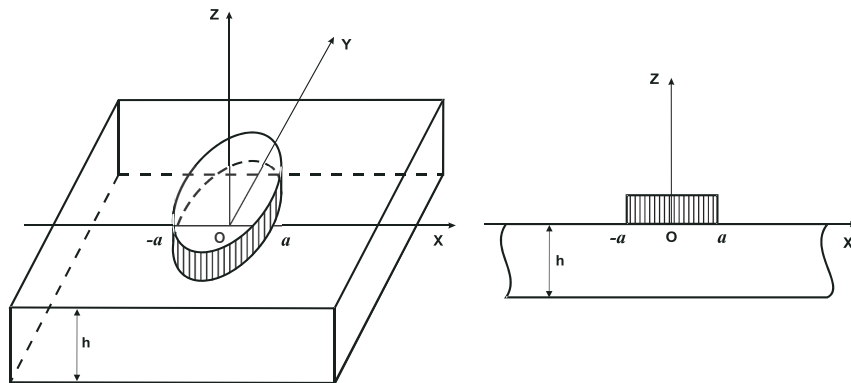
где $2l$ — расстояния между центрами штампов, h — толщина слоя, R дана в обозначениях (1.1).

Выражения для функции $L(u)$ для различных вариантов условий контакта нижней грани слоя с основанием приведены в [4].

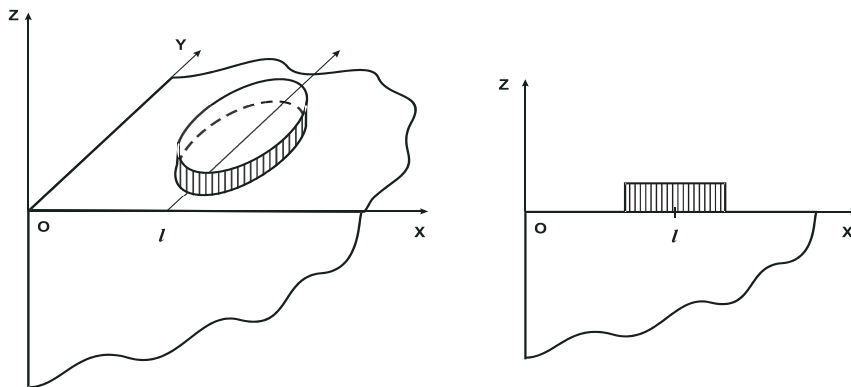
Решение (1.4) интегрального уравнения (1.3) с ядром (3.1) построено в предположении, что область контакта представляет собой внутренность двух симметричных эллипсов, описываемых, соответственно, неравенствами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{(x + 2l)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

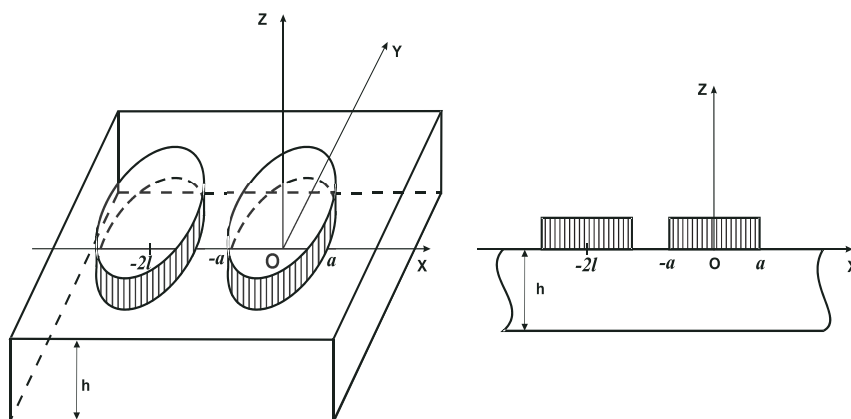
(для определенности примем $a \leq b$). Введем в рассмотрение два безразмерных геометрических параметра $\lambda_1 = l/b, \lambda_2 = h/b$ характеризующих, соответственно, относительное расстояние между штампами и относительную толщину слоя. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, предположим следующую линейную связь между введенными параметрами: $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda t$. Подобный подход ранее успешно применялся в задачах теории трещин [2]. Следует отметить, что эффективность получаемых в дальнейшем асимптотических разложений будет существенно зависеть не только от значений параметров λ и t , но и от значения параметра $r = b/a$, характеризующего протяженность областей контакта вдоль оси симметрии.



а) Контакт плоского эллиптического штампа с упругим слоем (задача В(1))



б) Контакт плоского эллиптического штампа с упругим четвертьпространством (задача В(2))



в) Контакт системы штампов с упругим слоем (задача В(3))

Рис. 3. Схемы постановок контактных задач (трехмерная задача и плоская деформация)

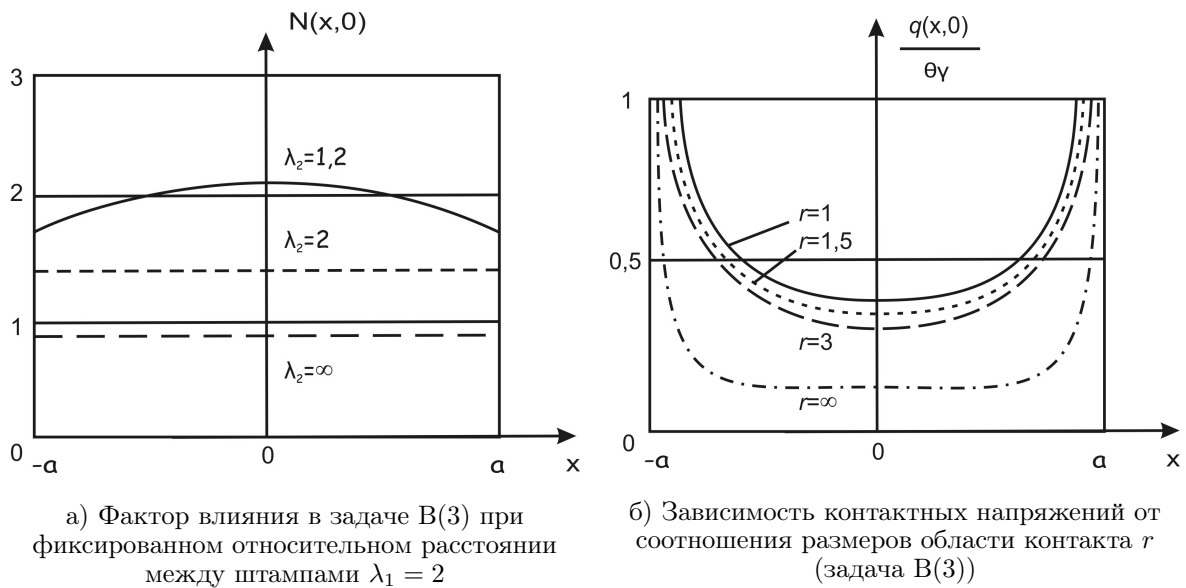


Рис. 4. Результаты численного анализа асимптотических решений контактных задач в трехмерной и плоской постановках

Следует подчеркнуть, что из построенного здесь решения, наряду с решением задачи Л. А. Галина [10], также вытекают как предельные случаи известные результаты исследования неклассических контактных задач теории упругости и в более общих постановках. Так, в частности, решение задачи о контакте системы двух симметрично расположенных эллиптических штампов с упругим полупространством [11] получается из (1.4), (3.1) предельным переходом при $t \rightarrow \infty$, а известное решение пространственной контактной задачи для штампа на упругом слое при различных вариантах условий опирания нижней грани слоя на жесткое основание [4] вытекает из (1.4), (3.1), если осуществить одновременный предельный переход при $\lambda \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$, сохраняя в допустимом диапазоне значения параметра $\lambda_2 = \lambda t$.

Исследование невязки интегрального уравнения (1.3), (3.1), радиуса сходимости построенных асимптотических разложений, а также непосредственные вычисления позволяют установить диапазон эффективности получаемых решений. Проведено исследование влияния различных геометрических параметров задачи на фактор влияния, определяющий концентрацию напряжений под штампами.

В частности, установлено, что уменьшение относительной толщины слоя приводит к возрастанию напряжений под подошвой штампа. На рис. 4а представлены графики

значений фактора влияния при относительном расстоянии между штампами $\lambda_1 = 2$ и относительной толщине λ_2 , принимающей значения 1,2; 2 и ∞ для условия гладкого опирания слоя на жесткое основание. Вместе с этим, непосредственными вычислениями установлено, что для более близко расположенных штампов (при равных значениях прочих параметров) характерна более слабая концентрация напряжений под ними.

Исследовано влияние формы штампов на концентрацию напряжений. В частности, проведено сравнение решений задач о контакте двух штампов с упругим слоем при различных отношениях полуосей эллипса $r = b/a$ с решениями плоских задач для двух штампов на полосе [7]. На рис. 4б представлены графики приведенных контактных напряжений, вычисленных в точках меньшей полуоси $(x, 0)$ для штампов с параметрами $r = 1; 1,5; 3; \infty$. Для случая $r = \infty$ изображен график приведенных контактных напряжений для двух плоских штампов на полосе. Относительное расстояние между штампами в данном случае принималось равным $\lambda_1 = 4$, относительная толщина слоя (ширина полосы) $\lambda_2 = 4$. Отметим, что невязки интегрального уравнения (1.3), (3.1) для приведенных здесь асимптотических решений давали значения в пределах 5%.

Проведенные вычисления подтверждают установленные математически соотношения между значениями фактора влияния для за-

Таблица 2. Сводная таблица членов асимптотических разложений контактных задач

Постановка задачи	3D, $B_i(x, y)$	2D, $b_i(x)$
В (1), рис. 3а	(53.9)–(53.11), [4]	(7.31), [6]
В (2), рис. 3б	(16), §3.4, [5]	(7.36), [6]
В (3), рис. 3в	(2.6), [8]	(3.9), [7]

Таблица 3. Структура асимптотических представлений фактора влияния

Размерность задачи	3D	2D
N Задачи теории трещин	$1 + \sum_{k=3}^{\infty} A_k \lambda^{-k}$	$1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \lambda^{-k}$
M Контактные задачи	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda^{-k}$	$1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \lambda^{-k}$

дач в пространственной и плоской постановках. Так, в частности, из рис. 4б видно, что, с увеличением параметра r , характеризующего отношение полуосей области Ω , концентрация контактных напряжений снижается, и в предельном случае $r = \infty$ (двумерная постановка задачи) получаем нижнюю оценку построенных решений.

В табл. 2 приведены ссылки на соотношения, содержащие асимптотические представления фактора влияния в контактных задачах В (1-3), (рис. 3а-3в)) в трехмерной и плоской постановках.

Заключение

Обобщая проведенные рассуждения, сведем в одну таблицу (табл. 3) общий вид асимптотических представлений фактора влияния в задачах теории трещин и в контактных задачах теории упругости, как в трехмерной, так и в двумерной постановках.

Таким образом, проведенный математический и численный анализ рассмотренных асимптотических представлений позволил установить:

1) взаимное влияние трещин или свободных границ тел приводит к усилению концентрации напряжений в окрестности контура каждой из них;

2) взаимное влияние штампов приводит к снижению уровня контактных напряжений под ними, и, соответственно, к снижению концентрации напряжений в окрестности края;

3) решения плоских задач для систем трещин представляют собой оценки «сверху» для решений соответствующих пространственных задач.

4) решения плоских контактных задач позволяют оценить «снизу» соответствующие пространственные решения.

Первые два вывода устанавливают общие закономерности поведения фактора влияния в задачах теории упругости со смешанными граничными условиями. Тем не менее, возможны и исключения. В частности, в задаче о равновесной продольной трещине в слое при гладком контакте граней с основаниями, фактор влияния принимает значения, меньшие 1 (рис. 3в).

В заключение, автор выражает благодарность Борису Ивановичу Сметанину за внимание к работе, ценные советы и замечания.

Литература

1. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
2. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие напряжения в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. 224 с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 444 с.
4. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
6. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.

7. Александров В.М., Кучеров В.А. Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу // Изв. АН СССР, МТТ. 1968. № 4. С. 110–123.
8. Соболь Б.В., Пешхоев И.М. Пространственная задача о контакте системы штампов с упругим слоем // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011, № 1. С. 69–76.
9. Stress Intensity Factors Handbook / Murakami, Y. (ed.) In 2 Volumes. Oxford etc.: Pergamon press, 1987. 1456 pp.
10. Галлин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
11. Соболь Б.В. Контакт двух плоских симметричных штампов с упругим основанием // Численные и аналитические методы решения задач строительной механики и теории упругости. Ростов-на-Дону: РИСИ, 1995. С. 240–244.

Ключевые слова: трещина, штамп, асимптотическое решение, коэффициент интенсивности напряжений, контактные напряжения, фактор влияния.

Статья поступила 3 апреля 2012 г.

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону

© Соболь Б. В., 2012