

УДК 539.3, 551.2

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПОЛЗНЕВЫХ СТРУКТУР НА ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ОСНОВАНИИ¹*Бабешко В. А.², Бабешко О. М.³, Горшкова Е. М.⁴, Евдокимова О. В.⁵, Зарецкая М. В.⁶, Колесников М. Н.⁷, Павлова А. В.⁸, Плужник А. В.⁹*

ABOUT FEATURES OF RESEARCH OF LANDSLIDES ON THE HORIZONTAL BASIS

Babeshko V. A., Babeshko O. M., Gorshkova E. M., Evdokimova O. V., Zaretskaya M. V., Kolesnikov M. N., Pavlova A. V., Pluzhnik A. V.

Modeling of some landslide's types using factorization methods and method of block element was given. A model of the behavior of landslides on the horizontal ground is constructed. Discrete frequency of spectrum for block structures exposed vibrations are identified, the resonance properties of media with inclusions are studied.

Keywords: landslides, horizontal basis, factorization method, resonance.

1. На территории Краснодарского края в силу ее геоморфологического и геотектонического строения наблюдается высокий уровень угрозы возникновения чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера. Существенную опасность для народнохозяйственного комплекса и безопасности населения представляют экзогенные геологические процессы: оползни, донная и береговая эрозия, разрушение морских берегов, селеобразование.

Моделирование экзогенных процессов, в частности оползней, остается сложной и до

конца не решенной проблемой. В работе [1] были представлены 10 типов оползневых процессов, подразделяющиеся на две группы по типу подстилающего фундамента. К первой относятся те, для которых характерен выраженный угол наклона подстилающего фундамента, т.е. наблюдается процесс сползания или скатывания. Для второй группы характерно горизонтальное или почти горизонтальное расположение подстилающего фундамента. Согласно общепринятой классификации они называются бло-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (НШ-914.2012.1), Минобрнауки РФ (ГК № 16.740.11.0135 от 1 сентября 2010 г.), грантов РФФИ (11-08-96502, 11-08-96503, 11-08-96504, 11-08-96505, 10-08-00289, 12-01-00330, 12-01-00332).

²Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

³Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

⁴Горшкова Елена Михайловна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: gem@kubsu.ru.

⁵Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

⁶Зарецкая Марина Валерьевна, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: zarmv@mail.ru.

⁷Колесников Максим Николаевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; kmm@fpm.kubsu.ru.

⁸Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

⁹Плужник Андрей Валерьевич, научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

ковыми, опрокидывающимися или горизонтально распространяющимися.

Предоползневые состояния для первой группы достаточно легко прогнозируются путем наблюдения и расчета коэффициента трения между оползневой средой и подстилающим фундаментом, который может изменяться в связи с наличием приповерхностных грунтовых вод в этой зоне.

Зная коэффициент трения в указанной зоне, начало движения оползневой среды легко рассчитать с помощью простых формул сползания или скатывания объекта по наклонной плоскости.

Разрушение предоползневой среды второй группы происходит под влиянием внешних воздействий.

В результате анализа возможного развития событий, связанных с разрушением предоползневой среды, принимается модель, учитывающая физическую природу явления.

Считается, что грунт оползневой среды представляют собой сухой материал, моделируемый линейно деформируемой средой с изменяющимися свойствами. Предполагается, что разрушение происходит по следующему сценарию, описываемому последовательностью событий для линейно упругой среды.

Подвергаясь значительным гармоническим нагрузкам, грунт разрыхляется, вследствие чего первоначальные упругие параметры изменяются. Оползневые среды рассматриваются как структуры, состоящие из блочных элементов, границы между которыми начинают появляться в результате внешних гармонических воздействий, вызывающих изменения свойств среды. Границы являются узловыми поверхностями перемещений, вызванных колебаниями рельефной среды на резонансных частотах.

Узловые поверхности, наименее подверженные разрушениям, могут рассматриваться на некотором этапе как включения в разрыхленной среде. Самыми слабыми оказываются области в межузловой зоне, как правило, это узловые поверхности напряжений, где резонанс сильнее всего разрыхляет грунт. В этих областях появляются уже ослабленные неоднородности — интерфейсные вертикальные слои, до определенной стадии удерживающие разрыхляющуюся среду в форме цельного блока. Эти границы рассматриваются как вертикальные плоскости, подверженные старению. По мере их старения образуются трещины, распространяющиеся по всей плоскости контакта, и блок разрушается.

Возможность реализации такой модели подготовки оползней основана на фундаментальных результатах И.И. Воровича, впервые доказавшего существование ограниченного числа изолированных точек дискретного спектра в слое с рельефной границей [2, 3].

Таким образом, в общем ходе исследования динамики оползневых структур можно выделить следующие этапы:

1) Внешние динамические воздействия, содержащие в своем спектре гармоники из диапазона резонансных для рельефных сред [2, 3], вызывают в среде резонансы. На первом этапе исследуются резонансы блочной структуры, которые могут повлиять на расщепление блоков.

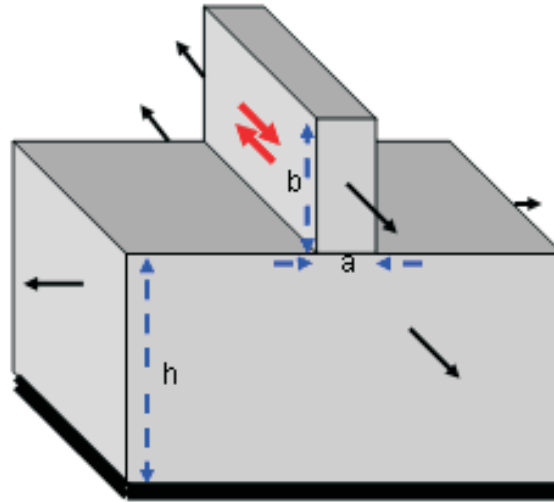
В случае среды оползня в форме прямоугольного параллелепипеда, возникают характерные узловые вертикальные плоскости и зоны в промежутках между узловыми плоскостями.

2) В узловых зонах плотность грунта практически не меняется. В промежуточных между узловыми плоскостями зонах, испытывающих значительные резонансные колебания, грунт разрыхляется, плотность его уменьшается. Среда становится неоднородной, поэтому в этой фазе ее можно представить как среду с включениями. В качестве включений рассматриваются узловые плоскости. На этом этапе исследуются пространственные динамические задачи для упругой среды с конечным числом плоских включений, позволяющие изучить особенности напряженно-деформированным состоянием такой структуры.

3) Дальнейшее влияние резонансных воздействий приводит к такому разрыхлению срединной зоны между включениями, что здесь появляется новый ослабленный тонкий интерфейсный слой, удерживающий в контакте все остальные части оползневой среды. При этом резонансные частоты уже изменились по сравнению с первоначальными.

На данном этапе исследуется оползневая среда с интерфейсным слоем при наличии внешних волновых воздействий.

4) Последующий процесс приводит к изменению свойств интерфейсного слоя, его частичному разрушению, нарушению сплошности в этой зоне, образованию трещин. В результате их дальнейшего развития образуется оползень второй группы. На этом этапе исследуется поведение упругого полупространства с интерфейсным слоем, содержащим разнотипные составляющие, занимающие полуплоскости.



Антиплоские колебания рельефного слоя

Описанная физическая модель, принятая для математического моделирования, относится к числу причин разрушения среды наличие различных неоднородностей — включений, трещин, разломов, интерфейсных слоев. Наиболее сложным является исследование контактного взаимодействия блоков при наличии стареющей межблоковой границы.

2. Как было сказано выше, при исследовании оползневых явлений важное место занимают вопросы выявления резонансов блочной структуры, которые могут привести к расщеплению блоков на более мелкие контактирующие составляющие. В работе [4] показано, что для антиплоского варианта граничной задачи в блочной структуре, представленной на рисунке, наблюдаются резонансы, при этом резонансные частоты описываются соотношениями

$$k_2 \approx \pi \sqrt{\frac{(n+0,5)^2}{a^2} + \frac{(s+0,5)^2}{(b+h)^2}} < \frac{\pi}{2h}, \quad (1)$$

$$n, s = 0, 1, 2, \dots$$

Существование таких резонансов впервые было доказано И.И. Воровичем [2, 3]. В соответствии с (1) резонансных частот тем больше, чем больше размеры блока.

Резонансы порождают узловые множества, представляющие вертикальные плоскости, остающиеся неподвижными. Вне этих плоскостей происходит разрыхление среды. Узловые плоскости рассматриваются в качестве включений в разрыхленной среде.

Далее проводятся исследование и анализ предоползневое состояние блочной структуры, которая приобрела в результате резонансов неоднородности в виде включений, расположенных в зонах узловых поверхностей.

3. Рассматривается пространственная задача теории упругости для тела с совокупностью параллельно-ориентированных плоских неоднородностей в виде включений.

В прямоугольной декартовой системе координат, где плоскость x_1Ox_2 параллельна плоскостям дефектов, рассматривается задача об установившихся гармонических колебаниях с частотой ω упругого тела, механические свойства которого определяются плотностью ρ и упругими параметрами Ляме λ , μ , содержащего N дефектов типа жестких включений в плоскостях $x_3 = h_n$ ($n = \overline{1, N}$). Неоднородности занимают односвязные области Ω_n с кусочно-гладкими границами S_n .

На поверхностях $x_3 \rightarrow h_n \pm 0$ плоскостей неоднородностей действуют напряжения $\tau_n^\pm e^{-i\omega t}$, $\tau_n^\pm = \{\tau_{ni}^\pm\}$, перемещения точек поверхностей определяются векторами $\mathbf{u}_n^\pm e^{-i\omega t}$, $\mathbf{u}_n^\pm = \{u_{ni}^\pm\}$ ($i = \overline{1, 3}$), причем

$$\mathbf{u}_n^+(x_1, x_2, h_n) = \mathbf{u}_n^-(x_1, x_2, h_n) = \mathbf{u}_n,$$

$$-\infty < x_1, x_2 < \infty,$$

$$\tau_n^+(x_1, x_2, h_n) - \tau_n^-(x_1, x_2, h_n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_n, \\ \tau_n, & (x_1, x_2) \in \Omega_n. \end{cases}$$

Один из возможных подходов к построению системы интегральных уравнений, связывающих перемещения и напряжения на границах неоднородностей для блоков в виде слоев состоит в следующем.

Пусть упругий слой, образованный сечениями $x_3 = h_n$ и $x_3 = h_{n-1}$, занимает область

$$V = \{-\infty \leq x_1, x_2 \leq +\infty, h_{n-1} \leq x_3 \leq h_n\}.$$

Обозначив через S полную поверхность слоя

$$S = S_n \cup S_{n-1},$$

$$S_n = \{-\infty \leq x_1, x_2 \leq +\infty, x_3 = h_n\},$$

воспользуемся формулой Бетти [5].

Краевая задача для однородного слоя эквивалентна системе интегральных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} & i \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \iint_S [\lambda \alpha^2 l_m + 2\mu \alpha_k l_k \alpha_m] \times \\ & \quad \times u_m(\boldsymbol{\xi}) e^{i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})} dS = \\ & \quad = \sum_{m=1}^3 \alpha_m \iint_S \tau_m(\boldsymbol{\xi}) e^{i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})} dS, \end{aligned}$$

$$\alpha_3 = \pm \sqrt{\gamma_1^2 - \alpha^2}, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2;$$

$$\begin{aligned} & i\mu \sum_{s=1}^3 \sum_{m=1}^3 \iint_S [(\alpha_3 l_k - \alpha_k l_3) \alpha_m + \\ & + \alpha_s l_s (\alpha_3 \delta_{km} - \alpha_k \delta_{3m})] u_m(\boldsymbol{\xi}) e^{i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})} dS = \\ & \quad = \iint_S [\alpha_3 \tau_k(\boldsymbol{\xi}) - \alpha_k \tau_3(\boldsymbol{\xi})] e^{i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})} dS, \end{aligned}$$

$$\alpha_3 = \pm \sqrt{\gamma_2^2 - \alpha^2}, \quad k = 1, 2;$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}, \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_i\}, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \xi_i, \quad \gamma_p = \frac{\omega}{v_p}, \quad p = 1, 2,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

В приведенных соотношениях

$$-\infty \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \infty;$$

$\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ — внешняя нормаль к границе S , l_k — функции параметров ξ_1, ξ_2 ; δ_{km} — символ Кронекера.

С учетом направления нормали \mathbf{l} на верхней и нижней поверхностях слоя ($l_1 = l_2 = 0$, $l_3 = \pm 1$), функционально-матричное представление приведенных интегральных соотношений для каждого слоя в образах Фурье запишется [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{n-1}^{\pm} \mathbf{U}_{n-1} - \mathbf{L}_n^{\pm} \mathbf{U}_n &= \\ &= \mathbf{D}_{n-1}^{\pm} \mathbf{T}_{n-1}^{\pm} - \mathbf{D}_n^{\pm} \mathbf{T}_n^{\pm}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь индекс указывает на номер включения; $\mathbf{T}_n^{\pm}, \mathbf{U}_n \equiv \mathbf{U}_n^- = \mathbf{U}_n^+$ — двумерные преобразования Фурье функций $\tau_n^{\pm}, \mathbf{u}_n$. Матрицы \mathbf{L}_n^+ и \mathbf{D}_n^+ описывают вклад волн, распространяющихся в слое вверх, а матрицы \mathbf{L}_n^- и \mathbf{D}_n^- — вниз, и обладают следующей структурой:

$$\mathbf{L}_n^{\pm} = \left\| \xi_{n,ij}^{\pm} \right\|_{i,j=1}^3, \quad \mathbf{D}_n^{\pm} = -\frac{i}{\mu} \left\| \zeta_{n,ij}^{\pm} \right\|_{i,j=1}^3,$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{n,11}^{\pm} &= \pm \alpha_1 \alpha_{31} e^{\pm i \alpha_{31} h_n}, \\ \xi_{n,12}^{\pm} &= \pm \alpha_2 \alpha_{31} e^{\pm i \alpha_{31} h_n}, \quad \xi_{n,13}^{\pm} = s e^{\pm i \alpha_{31} h_n}, \\ \xi_{n,21}^{\pm} &= \pm \alpha_2 \alpha_{31} e^{\pm i \alpha_{32} h_n}, \quad \xi_{n,23}^{\pm} = 0, \\ \xi_{n,22}^{\pm} &= \mp \alpha_1 \alpha_{32} e^{\pm i \alpha_{32} h_n}, \\ \xi_{n,31}^{\pm} &= (2s + \alpha_2^2) e^{\pm i \alpha_{32} h_n}, \\ \xi_{n,32}^{\pm} &= -\alpha_1 \alpha_2 e^{\pm i \alpha_{32} h_n}, \\ \xi_{n,33}^{\pm} &= \mp 2\alpha_1 \alpha_{32} e^{\pm i \alpha_{32} h_n}; \\ \zeta_{n,11}^{\pm} &= \frac{\alpha_1}{2} e^{\pm i \alpha_{31} h_n}, \quad \zeta_{n,12}^{\pm} = \frac{\alpha_2}{2} e^{\pm i \alpha_{31} h_n}, \\ \zeta_{n,13}^{\pm} &= \pm \frac{\alpha_{31}}{2} e^{\pm i \alpha_{31} h_n}, \quad \zeta_{n,21}^{\pm} = \alpha_2 e^{\pm i \alpha_{32} h_n}, \\ \zeta_{n,22}^{\pm} &= -\alpha_1 e^{\pm i \alpha_{32} h_n}, \\ \zeta_{n,23}^{\pm} &= \zeta_{n,32}^{\pm} = 0, \quad \zeta_{n,31}^{\pm} = \pm \alpha_{32} e^{\pm i \alpha_{32} h_n}, \\ \zeta_{n,33}^{\pm} &= -\alpha_1 e^{\pm i \alpha_{32} h_n}; \end{aligned}$$

$$\alpha_{3k} = \sqrt{\gamma_k^2 - \alpha^2}, \quad k = 1, 2, \quad s = 0, 5\gamma_2^2 - \alpha^2.$$

Приведенные соотношения (2) позволяют построить систему уравнений, связывающих напряжения и перемещения в сечении включений и для пространства, содержащего плоские дефекты. Связь между напряжениями и перемещениями на границе $x_3 = h_n - 0$ нижнего полупространства следует из (2), если исключить при $n = 1$ первое уравнение, а из второго — все члены, содержащие $e^{-i\alpha_{3k} h_0}$. Аналогичное соотношение для верхнего полупространства также можно получить, если

при $n = N + 1$ отбросить второе уравнение и все члены с $e^{i\alpha_{3k}h_{N+1}}$

Таким образом, искомая система функционально-матричных соотношений для исследуемой модели примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1^- \mathbf{T}_1^+ &= \mathbf{L}_1^- \mathbf{U}_1, \\ \mathbf{D}_1^+ \mathbf{T}_1^- - \mathbf{D}_2^+ \mathbf{T}_2^+ &= \mathbf{L}_1^+ \mathbf{U}_1 - \mathbf{L}_2^+ \mathbf{U}_2, \\ \mathbf{D}_1^- \mathbf{T}_1^- - \mathbf{D}_2^- \mathbf{T}_2^+ &= \mathbf{L}_1^- \mathbf{U}_1 - \mathbf{L}_2^- \mathbf{U}_2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_{N-1}^+ \mathbf{T}_{N-1}^- - \mathbf{D}_N^+ \mathbf{T}_N^+ = \mathbf{L}_{N-1}^+ \mathbf{U}_{N-1} - \mathbf{L}_N^+ \mathbf{U}_N,$$

$$\mathbf{D}_{N-1}^- \mathbf{T}_{N-1}^- - \mathbf{D}_N^- \mathbf{T}_N^+ = \mathbf{L}_{N-1}^- \mathbf{U}_{N-1} - \mathbf{L}_N^- \mathbf{U}_{N-1}$$

$$\mathbf{D}_N^+ \mathbf{T}_N^- = \mathbf{L}_N^+ \mathbf{U}_N.$$

Запишем (3) в разрешенном относительно интегральных характеристик амплитуд перемещений \mathbf{U}_n виде, обозначив Фурье-образ скачка напряжений $\boldsymbol{\tau}_n$ на берегах включения в плоскости $x_3 = h_n$ через $\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_n^- - \mathbf{T}_n^+$.

Воспользуемся представлениями для матриц \mathbf{D}_n^\pm и \mathbf{L}_n^\pm вида [7]

$$\mathbf{D}_n^\pm = \mathbf{Z}_n^{\pm 1} \mathbf{D}_\pm, \quad \mathbf{L}_n^\pm = \mathbf{Z}_n^{\pm 1} \mathbf{L}_\pm,$$

где \mathbf{Z}_n — диагональные матрицы,

$$\mathbf{Z}_n = \left\{ e^{i\alpha_{31}h_n}, e^{i\alpha_{32}h_n}, e^{i\alpha_{33}h_n} \right\},$$

$$\mathbf{L}_\pm = \begin{pmatrix} \pm\alpha_1\alpha_{31} & \pm\alpha_2\alpha_{31} & s \\ \pm\alpha_2\alpha_{31} & \mp\alpha_1\alpha_{32} & 0 \\ 2s + \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 & \mp 2\alpha_1\alpha_{32} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_\pm = -\frac{i}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} & \pm \frac{\alpha_{31}}{2} \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \pm\alpha_{32} & 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{kn} &= \prod_{j=k}^{n-1} \mathbf{Z}_j^{-1} \mathbf{Z}_{j+1} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\alpha_{31}H_{kn}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_{32}H_{kn}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_{33}H_{kn}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$H_{kn} = h_n - h_k;$$

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{D}_+^{-1} \mathbf{L}_+ - \mathbf{D}_-^{-1} \mathbf{L}_-, \quad \mathbf{J}_{kl}^\pm = \mathbf{D}_\pm^{-1} \mathbf{P}_{kl} \mathbf{D}_\pm,$$

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_n\}, \quad \mathbf{T} = \{\mathbf{T}_n\} \quad (n = \overline{1, N})$$

и перепишем (3) в виде

$$\mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{U}, \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\Theta}\mathbf{J}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_1^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J}_{12}^+ & \mathbf{J}_{13}^+ & \mathbf{J}_{1,N-1}^+ & \mathbf{J}_{1N}^+ \\ \mathbf{J}_{12}^- & \mathbf{I} & \mathbf{J}_{23}^+ & \mathbf{J}_{2,N-1}^+ & \mathbf{J}_{2N}^+ \\ \mathbf{J}_{13}^- & \mathbf{J}_{23}^- & \mathbf{I} & \mathbf{J}_{3,N-1}^+ & \mathbf{J}_{3N}^+ \\ \mathbf{J}_{1,N-1}^- & \mathbf{J}_{2,N-1}^- & \mathbf{J}_{3,N-1}^- & \mathbf{I} & \mathbf{J}_{N-1,N}^+ \\ \mathbf{J}_{1N}^- & \mathbf{J}_{2N}^- & \mathbf{J}_{3N}^- & \mathbf{J}_{N-1,N}^- & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

В (4) перейдем к безразмерным параметрам, положив

$$\beta_k = \alpha_k / \gamma_2, \quad \bar{H}_{ij} = \gamma_2 H_{ij},$$

тогда

$$\beta_{31} = \alpha_{31} / \gamma_2 = \sqrt{\varepsilon^2 - u^2},$$

$$\beta_{32} = \alpha_{32} / \gamma_2 = \sqrt{1 - u^2},$$

$$u^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2, \quad \varepsilon = v_2 / v_1.$$

Матрицы \mathbf{S}_1^{-1} и \mathbf{J}_{kl}^\pm примут следующий вид:

$$\mathbf{S}_1^{-1} = \frac{1}{2\mu\gamma_2\beta_{31}\beta_{32}} \|\delta_{ij}\|_{i,j=1}^3,$$

$$\mathbf{J}_{kn}^\pm = \frac{1}{\delta(u)} \|\eta_{kn,ij}^\pm\|_{i,j=1}^3,$$

где

$$\delta_{11} = \beta_{31} - \beta_1^2 (\beta_{31} - \beta_{32}),$$

$$\delta_{12} = -\beta_1\beta_2 (\beta_{31} - \beta_{32}), \quad \delta_{21} = \delta_{12},$$

$$\delta_{22} = \beta_{31} - \beta_2^2 (\beta_{31} - \beta_{32}),$$

$$\delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0, \quad \delta_{33} = \beta_{31}\delta(u);$$

$$\delta(u) = (u^2 + \beta_{31}\beta_{32});$$

$$\eta_{kn,11}^\pm = \beta_1^2 e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} + (\beta_2^2 + \beta_{31}\beta_{32}) e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}},$$

$$\eta_{kn,12}^\pm = \eta_{21} = \beta_1\beta_2 \left(e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} - e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}} \right),$$

$$\eta_{kn,13}^\pm = \pm\beta_1\beta_{31} \left(e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} - e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}} \right),$$

$$\eta_{kn,22}^\pm = \beta_2^2 e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} + (\beta_1^2 + \beta_{31}\beta_{32}) e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}},$$

$$\eta_{kn,23}^\pm = \pm\beta_2\beta_{31} \left(e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} - e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}} \right),$$

$$\eta_{kn,31}^\pm = \pm\beta_1\beta_{32} \left(e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} - e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}} \right),$$

$$\eta_{kn,32}^\pm = \pm\beta_2\beta_{32} \left(e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} - e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}} \right),$$

$$\eta_{kn,33}^\pm = \beta_{31}\beta_{32} e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} + u^2 e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}}.$$

Для сравнения полученных результатов с уже известными, рассмотрим случай антиплоской деформации для исследуемой модели. Пусть все перемещения и напряжения направлены вдоль оси x_1 и зависят только от переменных x_2 и x_3 , т.е.

$$\mathbf{u} = \{u, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{\tau} = \{\tau_{x_1 x_3}, 0, 0\},$$

$$u = u(x_2, x_3), \quad \tau_{x_1 x_3} = \tau_{x_1 x_3}(x_2, x_3).$$

Внесем данные представления в уравнения (4) при $N = 2$. Получим

$$U_1 = [\mathbf{S}_1^{-1}]_{11} T_1 + [\mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{J}_{12}^+]_{11} T_2,$$

$$U_2 = [\mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{J}_{12}^+]_{11} T_1 + [\mathbf{S}_1^{-1}]_{11} T_2. \quad (6)$$

Здесь функции U_1, U_2, T_1 и T_2 — первые компоненты соответственно вектор-функций $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{T}_1$ и \mathbf{T}_2 ; символом $[\cdot]_{11}$ обозначены элементы матриц в квадратных скобках, стоящие на пересечении первой строки и первого столбца. Так как областью определения перемещений и напряжений является вся плоскость $x_1 = 0$, то носителем их образов Фурье U_k и T_k будет плоскость $\beta_1 = 0$. И, как следствие, система (6) упрощается

$$U_1 = \frac{i}{2\mu\gamma_2\beta_{32}} \left[T_1 + e^{i\beta_{32}\bar{H}} T_2 \right], \quad (7)$$

$$U_2 = \frac{i}{2\mu\gamma_2\beta_{32}} \left[e^{i\beta_{32}\bar{H}} T_1 + T_2 \right].$$

Рассмотрим теперь систему интегральных уравнений для известной задачи об антиплоской деформации упругого слоя $h_1 \leq x_3 \leq h_4$ с двумя плоскими параллельными включениями на сечениях $x_3 = h_2$ и $x_3 = h_3$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\mu\kappa_1 \text{sh}\kappa_1 h_{41}} \mathbf{K} \mathbf{T},$$

где $\kappa_1 = \sqrt{\alpha^2 - \gamma_2^2}$, $\mathbf{U} = \{U_2, U_3\}$, U_2 и U_3 — Фурье-образы перемещений, заданных на границах включений при $x_3 = h_2$ и $x_3 = h_3$ соответственно; $\mathbf{T} = \{T_2, T_3\}$, T_2 и T_3 — интегральные характеристики скачков напряжений на границах включений

$$T_2 = T_2^+ - T_2^-, \quad T_3 = T_3^+ - T_3^-;$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \text{ch } \kappa_1 h_{42} & \text{ch } \kappa_1 h_{21} & \text{ch } \kappa_1 h_{21} & \text{ch } \kappa_1 h_{43} \\ \text{ch } \kappa_1 h_{21} & \text{ch } \kappa_1 h_{43} & \text{ch } \kappa_1 h_{31} & \text{ch } \kappa_1 h_{43} \end{pmatrix},$$

$$h_{ij} = h_i - h_j.$$

Осуществим предельный переход при $h_4 \rightarrow +\infty$ и $h_1 \rightarrow -\infty$ и воспользуемся асимптотикой для гиперболических функций

$$\text{ch } x_3 \sim e^{\pm x_3} / 2, \quad \text{sh } x_3 \sim \pm e^{\pm x_3} / 2,$$

$$x_3 \rightarrow \pm\infty.$$

В результате получим систему функциональных уравнений для пространства с двумя включениями

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{i}{2\mu\kappa_1} \left[T_2 + e^{-\kappa_1(h_3-h_2)} T_3 \right], \\ U_3 &= \frac{i}{2\mu\kappa_1} \left[e^{-\kappa_1(h_3-h_2)} T_2 + T_3 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Если в (8) обозначить $\kappa_1 = -i\gamma_2\beta_{32}$ и заменить соответствующие индексы Фурье-образов перемещений и скачков напряжений, данная система в совпадет с (7).

Исследуем матрицу \mathbf{S} на наличие вещественных особенностей ее элементов и нулей определителя. Рассмотрим следующее представление

$$\mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{J}_{kn}^{\pm} = \frac{1}{2\mu\gamma_2\beta_{31}\beta_{32}} \left\| \varsigma_{kn,ij}^{\pm} \right\|_{i,j=1}^3,$$

где

$$\varsigma_{kn,11}^{\pm} = \beta_1^2 \beta_{32} e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} + \beta_{31} (1 - \beta_1^2) e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}},$$

$$\begin{aligned} \varsigma_{kn,12}^{\pm} &= \varsigma_{kn,21}^{\pm} = \\ &= \beta_1 \beta_2 \left(\beta_{32} e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} - \beta_{31} e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varsigma_{kn,13}^{\pm} &= \varsigma_{kn,31}^{\pm} = \\ &= \pm \beta_1 \beta_{31} \beta_{32} \left(e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} - e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}} \right), \end{aligned}$$

$$\varsigma_{kn,22}^{\pm} = \beta_2^2 \beta_{32} e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} + \beta_{31} (1 - \beta_2^2) e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}},$$

$$\begin{aligned} \varsigma_{kn,23}^{\pm} &= \varsigma_{kn,32}^{\pm} = \\ &= \pm \beta_2 \beta_{31} \beta_{32} \left(e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} - e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}} \right), \end{aligned}$$

$$\varsigma_{kn,33}^{\pm} = \beta_{31} \left(\beta_{31} \beta_{32} e^{i\beta_{31}\bar{H}_{kn}} + u^2 \right) e^{i\beta_{32}\bar{H}_{kn}}.$$

Из представления (5)

$$\det \mathbf{S} = \det \boldsymbol{\Theta} \det \mathbf{J}_N.$$

Поэтому поиск нулей определителя \mathbf{S} можно свести к изучению определителей матриц $\boldsymbol{\Theta}$ и \mathbf{J}_N .

Для определителя блочной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

существует представление [8]

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{11} \det [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}], \quad (9)$$

используя которое нетрудно получить $\det \Theta = (\det \mathbf{S}_1^{-1})^N$.

Из представления \mathbf{S}_1^{-1} найдем

$$\det \mathbf{S}_1^{-1} = \delta^2(u) / \left(8i(\mu\gamma_2)^3 \beta_{31} \beta_{32}^2 \right).$$

В случае двух включений $\det \mathbf{J}_2$ является определителем матрицы 6-го порядка. Благодаря структуре \mathbf{J}_2 , для вычисления ее определителя можно воспользоваться представлением (9)

$$\det \mathbf{J}_2 = \det [\mathbf{I} - \mathbf{J}_{12}^- \mathbf{J}_{12}^+].$$

Определитель в правой части есть определитель матрицы 3-го порядка, и может быть подсчитан по известному правилу Саррюса.

Для большего числа включений использовать представление (9) нецелесообразно из-за необходимости обращения матрицы большой размерности. Поэтому используются другие методы. Например, с помощью компактной схемы метода Гаусса [8] исходную матрицу \mathbf{J}_N можно разложить в произведение левой треугольной матрицы с единицами на главной диагонали и правой треугольной матрицы $\mathbf{J}_N = \mathbf{A}\mathbf{B}$.

Отсюда, согласно свойствам определителя, несложно вычислить

$$\det \mathbf{J}_N = 1 \cdot \det \mathbf{B} = \prod_{j=1}^M b_{jj}, \quad \mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^N,$$

$$M = 3N.$$

Таким образом, в работе рассмотрены блочные элементы в виде слоев, разделенных включениями. Такая модель соответствует стадии разрушения блока в промежутках между узловыми поверхностями при резонансе. Приведен пример исследования для случая плоских включений. Для произвольного числа включений построены многопараметрические функционально-матричные уравнения вида (4). Их анализ позволяет определить диапазоны резонансных частот в среде с включениями.

Литература

1. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Горшкова Е. М., Иванов П. Б., Кашков Е. В., Плужник А. В., Рядчиков И. В. Блочные элементы в проблеме моделирования оползневых явлений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 3. С. 7–15.
2. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О блочных элементах в слоистых средах с рельефной границей // ДАН. 2010. Т. 435, № 1. С. 29–34.
5. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
6. Бабешко В. А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и трещин) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
7. Бабешко В. А., Буржан В. В., Павлова А. В., Ратнер С. В. Упругое пространство с совокупностью неоднородностей // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2001. Спец. вып. С. 26–29.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

Ключевые слова: оползневая структура, горизонтальное основание, факторизационный метод, резонанс.

Статья поступила 26 сентября 2012 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Бабешко В. А., Бабешко О. М., Горшкова Е. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Колесников М. Н., Павлова А. В., Плужник А. В., 2012