

УДК 531/534:57

СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В КРОВЕНОСНЫХ СОСУДАХ¹Батищев В. А.², Устинов Ю. А.³

THE SPIRAL WAVES IN BLOOD VESSELS

Batischev V. A., Ustinov Yu. A.

The spiral blood flows which occur in arterial vessels of a human being or an animal are investigated. The analysis of wave moves of blood system "blood-wall vessel", the source of which can be rotational movements in entry of aorta. On the basis of Navye-Stocks system two kinds of spiral waves are investigated – long wall-adjacent spiral waves and short waves of small amplitude. The stationary stream is the means of transportation of a short spiral waves.

Keywords: blood vessel, spiral waves, boundary layer.

Введение

В конце прошлого века обнаружено физическое явление, состоящее в возникновении «винтовых» течений жидкости в крупных кровеносных сосудах человека и животных. Можно выделить три основные причины, приводящие к спиральным течениям крови. Это, во-первых, кривизна сосуда [1], во-вторых, механические свойства стенок сосудов (винтовая анизотропия, порождаемая спиральным распределением мышечных волокон в меди) [2–6] и, в-третьих, вихревое движение крови на входе в аорту [7]. Характер этих течений различен. Как показали исследования, проведенные в [4–6] (в этих работах для описания спиральных течений построена специальная теория оболочек с винтовой анизотропией), в рамках линейной теории для любой фиксированной круговой частоты ω существуют три гармонические волны: *волна давления*, *квазипродольная* и *квазикрутильная*. На примере аорты собаки была проведена серия расчетов гидродинамических характеристик движения крови (давления, градиента давления, расхода, распределение скоростей по сечению и др.) в рамках построенной трехмодовой теории и по одномодовой, отвечающей *волне давления*. Сравнительный анализ показал, что практиче-

ски все гидродинамические характеристики с высокой степенью совпадения описываются одномодовой теорией. Отличие наблюдается только в распределении скоростей вблизи стенки сосуда. Дополнительные исследования показали, что гидродинамическое давление p и среднее по сечению значение продольной скорости хорошо описываются волной Муэнса-Кортевега [1]. Вместе с этим расчеты показали, что амплитуды окружных компонент скорости всех трех типов волн, локализованы в пограничном слое, примыкающем к стенке сосуда, причем степень локализации увеличивается с ростом ω . Описанный выше тип волн далее будем называть *спиральными волнами первого типа* или *длинными волнами*.

В ряде работ [7] экспериментально установлено существование спиральных волн, амплитуды которых могут распределяться по всему поперечному сечению. Такие волны будем называть *волнами второго типа* или *короткими волнами*.

В настоящей работе построена математическая модель спиральных волновых движений крови *второго типа* с учетом упругих свойств стенки сосуда. Используется безмоментная теория цилиндрической оболочки из изотропного упругого материала. Решение задачи представлено в виде асимптотиче-

¹Работа выполнена при частичной поддержке Южного математического института Владикавказского научного центра РАН.

²Батищев Владимир Андреевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической и компьютерной гидродинамики Южного федерального университета; e-mail: batish@math.rsu.ru.

³Устинов Юрий Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: ustinov@math.rsu.ru.

ского ряда, часть членов которого является суперпозицией гармонических волн первого типа, а остальные члены — это возмущения, представляющие собой волны второго типа малой амплитуды.

Поскольку сердечный цикл разделяется на систолу (отрезок времени активной работы левого желудочка) и диастолу (отрезок времени, когда клапан перекрывает выход из левого желудочка в аорту) [1], то пульсовая волна является суперпозицией нескольких гармонических волн, т.е. описывается отрезком ряда Фурье [6].

Отметим, что свойства длинной пульсовой волны (фазовая скорость, декремент затухания и др.) сильно зависят от упругих свойств сосудов, тогда как короткие волны слабо зависят от этих свойств. Построение этого типа спиральных мод сведено к решению краевой задачи на собственные значения, причем коэффициенты уравнения этой задачи зависят от полей скорости пульсовой волны и среднего стационарного течения. Уравнения задачи содержат малый параметр перед диффузионными членами, что означает наличие критического слоя вблизи оси сосуда и наличие пристеночного пограничного слоя. Асимптотический и численный анализ показали, что волновые числа и декременты затухания спиральных волн убывают как с ростом скорости среднего течения, так и с убыванием частоты.

1. Основные соотношения математической модели

Рассматриваются спиральные волны, распространяющиеся в крупных кровеносных сосудах в поле длинных пульсовых волн, исследованных в [1, 4–6]. Кровеносный сосуд моделируется круговой упругой полубесконечной цилиндрической оболочкой толщиной h и радиусом срединной поверхности a . Движение крови описывается системой уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ — вектор скорости, (r, θ, z) — цилиндрические координаты, p — давление, ν — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность крови.

Рассматривается осесимметричная задача, т.е. все полевые характеристики (скорость и давление жидкости, смещения то-

чек срединной поверхности оболочки) не зависят от окружной координаты θ . Для исследования задачи все уравнения приводятся к безразмерному виду, причем в качестве масштабов длины, времени, скорости, давления и смещений точек оболочки приняты соответственно следующие параметры: $a, 1/\omega, U, \rho U^2, U/\omega$. Здесь ω — частота сердечного цикла, U — пиковая скорость частиц жидкости пульсовых волн [1].

Приведем уравнение только для окружной компоненты скорости

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + R_s \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \\ = \varepsilon_\nu^2 \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

Динамические уравнения тонкой изотропной оболочки в рамках безмоментной теории с учетом гидродинамического воздействия на ее срединную поверхность ($r = 1$) в безразмерных переменных для окружных компонент имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \varepsilon_k^2 \frac{\rho_0 h}{\rho a} (1 + \nu_0) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \\ = \varepsilon_k^2 \varepsilon_\nu^2 (1 + \nu_0) \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$u_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t},$$

$$\varepsilon_k = \omega a \sqrt{2a\rho/(hE)}, R_s = \frac{U}{\omega a}, \varepsilon_\nu = \sqrt{\frac{\nu}{\omega a^2}}$$

Здесь u_θ — компонента вектора смещений точек срединной поверхности оболочки; E, ρ_0 — модуль Юнга и плотность материала оболочки. Параметр ε_k считается малым, параметр ε_ν пропорционален толщине пограничного слоя, возникающего вблизи оболочки. Заметим, что для аорты собаки $\varepsilon_\nu \approx 1/13$, для аорты человека $\varepsilon_\nu \approx 1/17$. Отметим также, что $\varepsilon_k \sim 10^{-2}$, коэффициент Пуассона $\nu_0 = 1/2$ [1], плотность ρ_0 близка к плотности крови.

2. Асимптотические разложения

Решение задачи, описывающее спиральные волны, представим в виде суммы двух вектор-функций

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1(r, z, z_1, t) + \mathbf{V}_2(r, z, z_1, t). \quad (2.1)$$

Здесь

$$\mathbf{V}_1 = (v_r, v_\theta, v_z, p, u_r, u_\theta, u_z),$$

$$\mathbf{V}_2 = (w_r, w_\theta, w_z, q, u'_r, u'_\theta, u'_z),$$

где z_1 — медленная осевая координата $z_1 = \varepsilon_k z$.

Вектор \mathbf{V}_1 описывает длинные волны, зависящие от координат (z_1, r, t) , и стационарный поток. Отметим, что в кровеносном сосуде на фоне длинных пульсовых волн наблюдается среднее стационарное течение [1], которое здесь моделируется квадратичным профилем осевой скорости $v_z = V(r) = R_p(1 - r^2)/R_s$, $v_r = v_\theta = 0$. Здесь $R_p = U_p/(a\omega)$, где U_p характерная скорость стационарного потока, определяемая через расход жидкости.

Вектор \mathbf{V}_2 описывает короткие волны малой амплитуды. Первые четыре координаты векторов \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 — это компоненты векторов скорости и давление, а последние три — компоненты смещений точек оболочки.

Длинные продольные волны в жидкости, заполняющей круговой цилиндр с упругой стенкой, изучались во многих работах [1, 4–6, 8].

Осевая компонента v_z вектора \mathbf{V}_1 имеет порядок $O(1)$. Предположим, что амплитуда спиральных волн мала и имеет порядок $O(\varepsilon_k)$. Асимптотические разложения компонент вектора \mathbf{V}_1 представим в виде рядов по степеням малого параметра ε_k

$$\begin{aligned} v_z &= v_{z0} + V(r) + \varepsilon_k v_{z1} + \dots, \\ v_\theta &= \varepsilon_k v_{\theta0} + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Остальные компоненты разлагаются в аналогичные ряды. Функция v_{z0} и соответствующие значения v_{r0} , p_0 описывают главное приближение длинных продольных волн, их значения приведены, например, в работах [1, 4–6, 8]. Компонента v_θ описывает длинные спиральные волны. Эти волны в случае анизотропной упругой оболочки подробно исследованы в работах [4–6], где показано, что эти волны локализованы вблизи стенки цилиндра.

Спиральные волны, заполняющие все поперечное сечение цилиндра, описываются окружной компонентой скорости w_θ вектора \mathbf{V}_2 . Предположим, что компонента w_θ имеет такой же порядок малости $O(\varepsilon_k)$, что и длинноволновая компонента v_θ , тогда из уравнений Навье-Стокса и динамических уравнений оболочки вытекают следующие асимптотические разложения для компонент V_2

$$\begin{aligned} w_\theta &= \varepsilon_k w_{\theta1} + \dots, \\ w_z &= \varepsilon_k^2 w_{z1} + \dots, \\ u_\theta &= \varepsilon_k^3 u_{\theta1} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Аналогичные разложения записываем и для других компонент. В формулах (2.3) все функции зависят от переменных z и z_1 .

3. Спиральные волны конечной длины

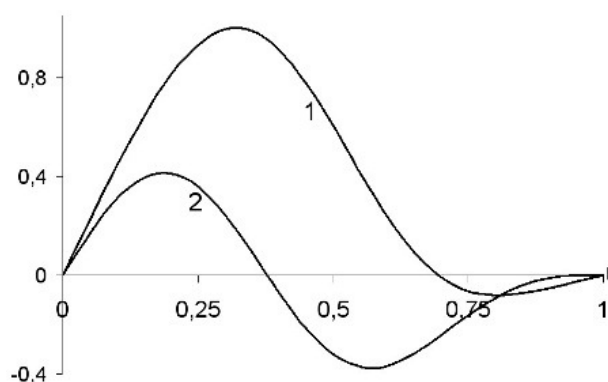
В отличие от длинных спиральных волн, сосредоточенных вблизи оболочки, спиральные волны конечной длины заполняют все поперечное сечение цилиндра. Для построения этих волн подставляем разложения (2.1)–(2.3) в систему уравнений Навье-Стокса, в динамические уравнения оболочки и приравниваем нулю коэффициенты при степенях параметра ε_k . Для окружной компоненты скорости получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\theta1}}{\partial t} + R_s(v_{z0}(r, z_1, t) + V(r)) \frac{\partial w_{\theta1}}{\partial z} &= \\ &= \varepsilon_\nu^2 \left(\nabla^2 w_{\theta1} - \frac{w_{\theta1}}{r^2} \right), \quad (3.1) \\ w_{\theta1} &= 0, \quad r = 1, \\ w_{\theta1} &= 0, \quad r = 0, \\ w_{\theta1} &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отметим, что медленная переменная z_1 входит в (3.1) как параметр. По временной переменной выполняются условия периодичности. Первое краевое условие в задаче (3.1) соответствует условию прилипания к границе жесткого цилиндра. Учитывая в динамических условиях на поверхности цилиндра порядки компонент скорости и смещений точек оболочки, находим, что упругие свойства оболочки проявляются в высших членах асимптотики. Компонента $u_{\theta1}$ находится после решения задачи (3.1) по формуле

$$\frac{\partial^2 u_{\theta1}}{\partial z^2} = \varepsilon_\nu^2 (1 + \nu_0) \frac{\partial w_{\theta1}}{\partial r}, \quad r = 1.$$

Построим решения задачи (3.1) в виде отдельных мод. Преобразуем уравнение в (3.1) следующим образом. Поскольку коэффициент в конвективном члене зависит только от медленной осевой координаты z_1 и не зависит от z , можно разделить переменные, отыскивая решение в виде $w_{\theta1} = W_{\theta1}(r, t, z_1)e^{ikz}$. Отметим, что длинная продольная волна при малых значениях ε_ν имеет характер пограничного слоя вблизи оболочки, поэтому ее осевая компонента может быть представлена в виде $v_{z0} = v_{z0}^0(t, z_1) + h_{z0}(s_1, t, z_1)$, где v_{z0}^0 — решение, описывающее компоненту скорости вне области пограничного слоя. $s_1 = (1 - r)/\varepsilon_\nu$. Функция h_{z0} — поправка

Рис. 1. Спиральная мода при $m = n = 1$

к v_{z0}^0 , устраняющая «невязку» в граничных условиях. Она имеет характер пограничного слоя, локализованного вблизи стенки цилиндра. Функция v_{z0}^0 не зависит от радиальной координаты r , а среднее по времени значение функции v_{z0}^0 равно нулю. В силу выше сказанного, функцию $W_{\theta 1}$ можно представить в виде

$$W_{\theta 1} = Q(t, z_1)W,$$

$$Q(t, z_1) = \exp\left(-ikR_s \int v_{z0}^0(t, z_1) dt\right).$$

Это преобразование позволяет исключить из уравнения для окружной компоненты скорости «внешнее» решение длинной продольной волны.

Далее применяем метод пограничного слоя. Решение будем отыскивать в виде $W = w + H$, где w — значение функции W вне области пограничного слоя, а H — погранслоинная поправка к w . Учитывая, что вне области пограничного слоя функция $h_{z0} = 0$, приходим к уравнению для функции w

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + ikR_s V(r)w &= \\ &= \varepsilon_\nu^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) w \right). \end{aligned}$$

Краевые условия для w используем те же, что и в (3.1).

Спиральные волны получим, разделяя переменные $w = F(r) \exp(-int)$. Функцию $F(r)$ и комплексное волновое число k найдем из краевой задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) F &= \\ &= \frac{i}{\varepsilon_\nu^2} (-n + kR_p(1 - r^2)) F, \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 0.$$

4. Некоторые результаты расчетов

Спиральные моды представим в виде

$$w_{\theta 1} = Q_{n,m} F_{n,m}(r) \exp(i(k_{n,m}z - nt)) + Q_{n,m} H_{n,m} \exp(ik_{n,m}z). \quad (4.1)$$

Здесь $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Функция $F_{n,m}(r)$ и комплексные волновые числа $k_{n,m}$ определяются из краевой задачи (3.2). Функция $Q_{n,m}$ находится по формуле для $Q(t, z_1)$, в которой параметр k следует заменить на $k_{n,m}$. Первое слагаемое в (4.1) определяет решение вне области пограничного слоя D_S . Функция $H_{n,m}$ определяет погранслоинную поправку в D_S и исчезает вне D_S .

Функции $F_{n,m}(r)$ и декременты $k_{n,m}$ рассчитаны численно методом пристрелки для различных индексов n и m . При $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ получена асимптотика методом критического слоя для $m = 1$ и различных n . Ниже приводятся результаты расчетов при $\varepsilon_\nu = 1/13, 116$ и различных значений параметра R_p . Для $m = n = 1, R_p = 2$, находим $k_{1,1} = 0, 60564 + i0, 13368$. Мнимая часть $k_{n,m}$ определяет логарифмический декремент затухания волны, а вещественная часть — ее волновое число. Численные расчеты проведены и для $n > 1, m = 1$. Показано, что с ростом индекса n увеличиваются вещественная и мнимая части декремента. Введем обозначение $F_{n,m} = g_{n,m} + if_{n,m}$.

На рис. 1 приведены зависимости функций $g_{1,1}$ (кривая 1) и $f_{1,1}$ (кривая 2) от радиальной координаты r в случае, если $\max g_{1,1}(r) = 1$. С ростом индекса n происходит локализация спиральных волн к оси цилиндра. Из уравнения (3.2) следует, что комплексное волновое число $k_{n,m} = k_r + ik_i$ зависит от скорости среднего стационарного

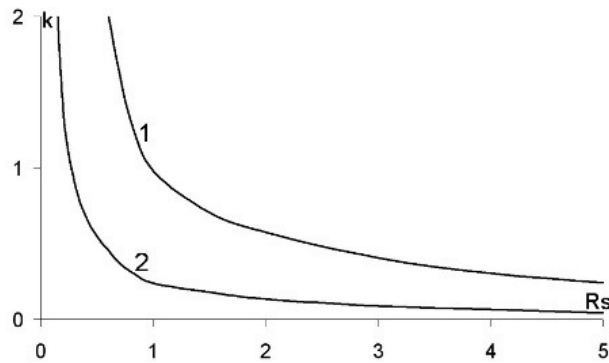


Рис. 2. Зависимости волновых чисел и логарифмических декрементов от скорости потока

потока U_p и параметров $a, \omega, \varepsilon_\nu$. Численные расчеты показывают, что k_r и k_i монотонно затухают с ростом скорости U_p .

На рис. 2 кривая 1 изображает зависимость волновых чисел от параметра R_p (для $m = n = 1$), кривая 2 — логарифмический декремент затухания.

Расчет функций $F_{n,m}(r)$ проводился методом пристрелки с использованием метода Рунге-Кутты, причем интегрирование уравнения (3.2) проводилось от стенки к оси цилиндра. Вблизи оси проводилось сращивание со степенной асимптотикой. Приведем значения физических параметров, соответствующих кровеносным сосудам собаки [1], выбранных для расчетов:

$$\rho = 1,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2\text{с}^{-1},$$

$$h = 0,06 \text{ см}, \quad a = 0,74 \text{ см}, \quad \omega = 4\pi \text{ с}^{-1},$$

$$E = 4,905 \cdot 10^2 \text{ кН/м}^2, \quad \rho_0 = 1,15 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

5. Окрестность критического слоя

Построим асимптотические разложения решений задачи (3.2) при $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ и значениях $m = 1, n = 1, 2, 3, \dots$. Для этих параметров вблизи оси цилиндра возникает вязкий критический слой, толщиной порядка $O(\sqrt{\varepsilon_\nu})$. При выходе из этого слоя спиральные волны затухают по экспоненциальному закону. В критическом слое главное приближение фазовой скорости спиральных волн совпадает со скоростью стационарного потока. Переходим к переменной $s = r/\sqrt{\varepsilon_\nu}$. Комплексное волновое число k разлагаем в асимптотический ряд $k = k_0 + \varepsilon_\nu k_1 + \dots$. Аналогичный ряд записываем и для функции $F(r)$. Подставляем асимптотические ряды в уравнение (3.2) и приравняем нулю коэффициенты

при $\varepsilon_\nu, \varepsilon_\nu^2, \dots$. В первом приближении находим коэффициент k_0 , который оказался равным $k_0 = n/R_p$. Во втором приближении получаем краевую задачу на собственные значения, из которой находим поправку k_1 . В результате, для комплексного волнового числа при $m = 1, n \geq 1$ получаем значение

$$k = \frac{n}{R_p} + \varepsilon_\nu \frac{2\sqrt{2n}(1+i)}{R_p} + O(\varepsilon_\nu^2). \quad (5.1)$$

Для порядка толщины критического слоя получаем формулу $O(\sqrt[4]{\varepsilon_\nu^2/n})$. Очевидно, что этот слой становится тоньше с уменьшением вязкости жидкости и с ростом номера моды. В этом слое локализуются рассмотренные моды.

6. Оценка порядка невязки

Невязка H оказалась малой для $m = 1, n \geq 1$, убывая с ростом индекса n , с уменьшением параметра ε_ν и при выходе из области пограничного слоя. Итак, спиральные волны конечной длины локализуются во внешней области вне пристеночного пограничного слоя.

Замечание. При отсутствии стационарного потока $R_p = 0$ задача (3.2) имеет точное решение, из которого следует, что декремент затухания спиральных волн имеет порядок $O(1/\varepsilon_\nu)$. В случае же, если $R_p = O(1)$, то из формулы (5.1) следует, что декремент затухания мал и имеет порядок $O(\varepsilon_\nu)$. Следовательно, механизмом переноса коротких спиральных волн является стационарный поток, так как при его отсутствии перенос спиральных мод полем длинных продольных волн незначителен.

Заключение

В работе исследованы спиральные волны конечной длины, которые, в отличие от длинных спиральных волн, локализованных вблизи стенок сосудов, заполняют все поперечное сечение кровеносного сосуда. Часть мод спиральных волн сосредоточена в критическом слое вблизи оси сосуда. Показано, что механизмом переноса коротких волн является стационарный поток, тогда как влияние длинных продольных волн на перенос коротких спиральных мод оказывается незначительным. С ростом скорости среднего течения уменьшаются волновые числа и декременты затухания волн. В отличие от длинных волн, влияние упругих свойств стенок кровеносных сосудов на волны конечной длины, оказывается малым и учитывается только в высших приближениях асимптотических рядов.

Литература

1. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
2. *Zakharov V. N.* The new conception of blood circulation mechanics // *Cardiovascular Engineering*. 1998. Vol. 3. No. 2. P. 100–104.
3. *Багаев С. Н., Захаров В. А., Орлов В. А.* О необходимости винтового движения крови // *Российский журнал биомеханики*. 2002. Т. 6. № 4. С. 30–51.
4. *Устинов Ю. А.* Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // *ДАН*. 2004. Т. 398. № 3. С. 71–76.
5. *Устинов Ю. А.* Некоторые задачи для тел с винтовой анизотропией // *Успехи механики*. 2003. Т. 2. № 4. С. 37–62.
6. *Богаченко С. Е., Устинов Ю. А.* Модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы и анализ напряженного состояния стенки с учетом винтовой анизотропии // *Российский журнал биомеханики*. 2009. Т. 13. № 1. С. 29–42.
7. *Кизилова Н. Н.* Винтовые движения жидкости в трубках: обзор экспериментальных и теоретических результатов // *Изв. ВУЗов: Сев.-Кав. регион. Актуальные проблемы механики. Естественные науки*. 2009. Спецвыпуск. С. 76–82.
8. *Громека И. С.* Собрание сочинений. М.: Изд. АН СССР. 1952. 296 с.

Ключевые слова: кровеносный сосуд, спиральные волны, пограничный слой.

Статья поступила 26 января 2012 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
© Батищев В. А., Устинов Ю. А., 2012