УДК 517.946

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛЕПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

***Лесев В. Н.*[1]*, Бжеумихова О. И.*[2]**

ABOUT A UNIQUE SOLVABILITY OF NEUMANN PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH THE DEVIATING ARGUMENT

Lesev V. N., Bzheumikhova O. I.

In this study within the rectangular area the second boundary-value problem for a partial derivative equation with the deviating argument has been investigated. The existence and uniqueness of the problem solution, whose explicit form has been found in the shape of uniform convergent trigonometric series, have been proved by the analytical methods.

Keywords: differential equation, partial derivative equation, equation with the deviating argument, boundary-value problem, Neumann problem.

Введение

Теория классических краевых задач для дифференциальных уравнений, связывающих искомую функцию и ее производные при одинаковых значениях аргумента, достаточно хорошо разработана. Однако и здесь еще остаются проблемы, не позволяющие утверждать о полном завершении исследований, проводимых в этом направлении. В свою очередь, исследования задач для уравнений с отклоняющимся аргументом, т.е. уравнений, связывающих искомую функцию и ее производные при различных значениях аргумента, находятся в стадии развития и, тем более, далеки от своего окончания.

Интерес, проявляемый к подобным уравнениям и задачам для них, вызван как теоретической важностью, так и практической значимостью получаемых результатов. Немаловажным фактором, способствующим развитию этой теории, является также многообразие классов дифференциальных уравнений и форм отклонения аргумента. В частности, в последнее время исследования проводятся сразу по нескольким направлениям, среди которых выделяются исследования линейных и квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, как с сосредоточенным [1, 2], так и с распределенным запаздыванием [3, 4]. Однако, исследованиям уравнений с частными производными посвящено мало работ (например, [5, 6]), несмотря на то, что подобные разработки в большей степени приближены к процессам, протекающим на практике, поскольку позволяют учитывать зависимость изучаемых систем сразу от нескольких факторов. Кроме того, даже в случае двух независимых переменных появляется возможность рассматривать не только отклонение временной [7], но пространственной переменной [8], что в значительной степени сказывается на актуальности и практической значимости проводимых исследований, обогащая уже разработанные на сегодняшний день модели математической биоэкологи, физики, экономики и автоматизированных систем управления [9–12].

Настоящая работа посвящена исследованию одной из указанных выше проблем, а именно, однозначной разрешимости второй краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка в частных произ-

[1]Лесев Вадим Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; e-mail: lvn_kbsu@mail.ru.

[2]Бжеумихова Оксана Игоревна, аспирант кафедры дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; e-mail: bgoksana@rambler.ru.

водных с отклоняющимся аргументом и оператором Лапласа в главной части.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{-x_0 < x < x_0, 0 < t < t_0\}$ — область евклидовой плоскости R^2 точек (x, t).

В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t) + u(-x,t) = 0. \quad (1.1)$$

Для уравнения (1.1)исследована следующая

Задача A. Найти регулярное решение уравнения (1.1) из класса $C(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega}) \cup C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=-x_0} = \varphi_1(t),\\ &\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=x_0} = \varphi_2(t),\\ &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_3(x),\\ &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=t_0} = \varphi_4(x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\varphi_i (i = \overline{1,4})$ — заданные, достаточно гладкие функции.

2. Доказательство существования и единственности решения задачи

Для задачи A справедлива следующая

Теорема 1. Пусть

1) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in C^3[-x_0, 0[\cup C^3]0, x_0]$, $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t) \in C^3[0, t_0]$, где $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$, $t_0 \in (0, \pi)$;

2) $\varphi_1^{(i)}(-x_0) = \varphi_1^{(i)}(x_0), \varphi_2^{(i)}(-x_0) = \varphi_2^{(i)}(x_0)$, $\varphi_3^{(i)}(0) = \varphi_1^{(i)}(t_0)$, $\varphi_4^{(i)}(0) = \varphi_4^{(i)}(t_0)$, где $i = \overline{0,3}$;

3) $\int\limits_0^{x_0} \varphi_3(x)dx = 0$, $\int\limits_0^{x_0} \varphi_4(x)dx = 0$.

Тогда задача (1.1)–(1.2) однозначно разрешима в требуемом классе функций.

Для доказательства теоремы 1 разобьем задачу (1.1), (1.2) на две вспомогательные

$$Lu_1 \equiv 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=-x_0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=x_0} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_3(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{t=t_0} = \varphi_4(x), \quad (2.3)$$

$$Lu_2 \equiv 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{t=t_0} = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=-x_0} = \varphi_1(t),\\ &\frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=x_0} = \varphi_2(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $u_1 + u_2 = u$.

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.2) будем искать в виде

$$u_1 = X_1(x)T_1(t). \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.1) и опуская нижние индексы, получим

$$\frac{X''(x) + X(-x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

где $\lambda = \text{const}$.

Отсюда, с учетом (2.2), будем иметь

$$X''(x) + X(-x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.8)$$

$$X'(-x_0) = X'(x_0) = 0, \quad (2.9)$$

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0. \quad (2.10)$$

Исследуем задачу Штурма-Лиувилля (2.8), (2.9). Дважды дифференцируя (2.8), приходим к соотношению

$$X^{IV}(x) + X''(-x) + \lambda X''(x) = 0. \quad (2.11)$$

С другой стороны из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} X''(-x) = -X(x) - \lambda X(-x),\\ X(-x) = -X''(x) - \lambda X(x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

На основании (2.11) принимая во внимание (2.12), получим

$$X^{IV}(x) + 2\lambda X''(x) + (\lambda^2 - 1)X(x) = 0. \quad (2.13)$$

Характеристическое уравнение соответствующее (2.13), будет иметь вид

$$r^4 + 2\lambda r^2 + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Разрешая биквадратное уравнение, находим

$$r_1 = \sqrt{1-\lambda}, \quad r_2 = -\sqrt{1-\lambda},$$

$$r_3 = \sqrt{-1-\lambda}, \quad r_4 = -\sqrt{-1-\lambda}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.13) может быть записано в виде

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{1-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}x} + \\ + C_3 e^{\sqrt{-1-\lambda}x} + C_4 e^{-\sqrt{-1-\lambda}x}. \quad (2.14)$$

Исследуем представление (2.14) для различных значений λ.

Случай 1: $\lambda < 1$. В этом случае (2.14) принимает вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{1-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}x} + \\ + C_3 e^{\sqrt{-1-\lambda}x} + C_4 e^{-\sqrt{-1-\lambda}x}.$$

Подставляя последнее равенство в (2.8), получим

$$e^{\sqrt{1-\lambda}x}[C_1 + C_2] + e^{-\sqrt{1-\lambda}x}[C_1 + C_2] + \\ + e^{\sqrt{-1-\lambda}x}[C_4 - C_3] + e^{-\sqrt{-1-\lambda}x}[C_3 - C_4] = 0.$$

Данное соотношение справедливо тогда и только тогда, когда $C_2 = -C_1$, $C_4 = C_3$. Следовательно (2.14) примет вид

$$X(x) = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{1-\lambda}x + C_3 \operatorname{ch} \sqrt{-1-\lambda}x.$$

Используя условия (2.9), получим

$$\begin{cases} C_1\sqrt{1-\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{1-\lambda}x_0 - \\ \qquad - C_3 \operatorname{sh} \sqrt{-1-\lambda}x_0 = 0, \\ C_1\sqrt{1-\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{1-\lambda}x_0 + \\ \qquad + C_3 \operatorname{sh} \sqrt{-1-\lambda}x_0 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = 2\sqrt{\lambda^2 - 1} \operatorname{ch} \sqrt{1-\lambda}x_0 \operatorname{sh} \sqrt{-1-\lambda}x_0$$

равен нулю, если $\lambda = \pm 1$, что противоречит предположению относительно λ. Следовательно, $C_1 = C_3 = 0$. Откуда заключаем, что $X(x) \equiv 0$.

Случай 2: $\lambda = -1$ исследуется аналогично. При таком значении общее решение (2.14), преобразуется к виду

$$X(x) = C_1 \exp \sqrt{2}x + C_2 \exp -\sqrt{2}x + C_3 + C_4 x.$$

Принимая во внимание (2.8), получим

$$(C_1 + C_2)(\exp \sqrt{2}x + \exp -\sqrt{2}x) - 2C_4 x = 0.$$

Откуда заключаем, что $C_2 = -C_1$, $C_4 = 0$, $x \neq 0$. Тогда общее решение (2.14), принимает вид

$$X(x) = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{2}x + C_3.$$

Удовлетворяя (2.9), имеем

$$\begin{cases} \sqrt{2}C_1 \operatorname{ch} \sqrt{2}x_0 = 0, \\ \sqrt{2}C_1 \operatorname{ch} \sqrt{2}x_0 = 0. \end{cases}$$

Так как $\operatorname{ch} \sqrt{2}x_0 \neq 0$, то $C_1 = 0$ и $X(x) \equiv C_3$.

Подставляя собственные значения в (2.10) приходим к соотношению

$$T_n'(t) + T_n(t) = 0.$$

Общее решение последнего уравнения представимо в виде

$$T_n(t) = \alpha_0 \cos t + \beta_0 \sin t,$$

где α_0, $\beta_0 = \mathrm{const}$. Тогда

$$u_1(x,t) = A_0 \cos t + B_0 \sin t. \quad (2.15)$$

Используя (2.3), находим

$$A_0 = \frac{\varphi_3(x)\cos t_0 - \varphi_4(x)\cos t}{\sin t_0}, \quad B_0 = \varphi_3(x).$$

Подставляя значения в (2.15), получаем

$$u_1(x,t) = \frac{\varphi_3(x)\cos(t_0 - t) - \varphi_4 \cos t}{\sin t_0}. \quad (2.16)$$

Случай 3: $-1 < \lambda < 1$. В этом случае (2.14) можно записать в виде:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{1-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}x} + \\ + C_3 \cos \sqrt{1+\lambda}x + C_4 \sin \sqrt{1+\lambda}x.$$

Откуда, с учетом (2.8), получим

$$\left(e^{\sqrt{1-\lambda}x} + e^{-\sqrt{1-\lambda}x}\right)(C_1 + C_2) - \\ - 2C_4 \sin \sqrt{1+\lambda}x = 0.$$

Принимая во внимание последнее соотношение и $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$, перепишем (2.14) в виде

$$X(x) = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{1-\lambda}x + C_3 \cos \sqrt{1+\lambda}x.$$

Удовлетворяя последнее соотношение условиям (2.9), находим

$$\begin{cases} C_1\sqrt{1-\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{1-\lambda}x_0 + \\ \qquad + C_3\sqrt{1+\lambda} \sin \sqrt{1+\lambda}x_0 = 0, \\ C_1\sqrt{1-\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{1-\lambda}x_0 - \\ \qquad -7C_3\sqrt{1+\lambda} \sin \sqrt{1+\lambda}x_0 = 0. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta = -2\sqrt{1-\lambda^2}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{1-\lambda}x_0 \sin\sqrt{1+\lambda}x_0 = 0,$$

при $\lambda = \pm 1$, либо

$$\lambda = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 - 1.$$

Следовательно $C_1 = C_3 = 0$ и $X(x) \equiv 0$.

Случай 4: $\lambda = 1$. При указанном значении λ, (2.14) принимает вид

$$X(x) = C_1 + C_2 x + \\ + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.8), получим

$$C_1 = C_4 \sin\sqrt{2}x.$$

Принимая во внимание, что $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ заключаем, что $C_1 = C_4 = 0$. Поэтому согласно (2.17), будем иметь

$$X(x) = C_2 x + C_3 \cos\sqrt{2}x. \quad (2.18)$$

Удовлетворяя (2.18) граничным условиям (2.9) получим

$$\begin{cases} C_2 + \sqrt{2}C_3 \sin\sqrt{2}x_0 = 0, \\ C_2 - \sqrt{2}C_3 \sin\sqrt{2}x_0 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель системы

$$\Delta = -2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x_0 \neq 0,$$

то $C_2 = C_3 = 0$ и $X(x) \equiv 0$.

Случай 5. При $\lambda > 1$, (2.14) принимает вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda-1}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda-1}x + \\ + C_3 \cos\sqrt{\lambda+1}x + C_4 \sin\sqrt{\lambda+1}x.$$

Отсюда с учетом (2.8), находим

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda-1}x - C_4 \sin\sqrt{\lambda+1}x.$$

Следовательно

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda-1}x = C_4 \sin\sqrt{\lambda+1}x,$$

если $C_1 \neq 0$, $C_4 \neq 0$, то

$$\cos\sqrt{\lambda-1}x = 0 \text{ для } \lambda_{1n} = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 + 1$$

и $\sin\sqrt{\lambda+1}x = 0$, для $\lambda_{1n} = \left(\frac{\pi n}{x_0}\right)^2 - 1$.

Тогда

$$X(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda-1}x + C_3 \cos\sqrt{\lambda+1}x.$$

Удовлетворяя граничные условия (2.9), будем иметь

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda-1}C_2 \cos\sqrt{\lambda-1}x_0 + \\ \qquad + \sqrt{\lambda+1}C_3 \sin\sqrt{\lambda+1}x_0 = 0, \\ \sqrt{\lambda-1}C_2 \cos\sqrt{\lambda-1}x_0 - \\ \qquad - \sqrt{\lambda+1}C_3 \sin\sqrt{\lambda+1}x_0 = 0. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta = -2\sqrt{1-\lambda^2}\cos\sqrt{\lambda-1}x_0 \sin\sqrt{\lambda+1}x_0$$

обращается в ноль при

$$\lambda_{1n} = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 + 1,$$

либо

$$\lambda_{1n} = \left(\frac{\pi n}{x_0}\right)^2 - 1.$$

Таким образом задача Штурма-Лиувилля (2.8), (2.9) имеет собственные значения

$$\lambda_{1n} = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 + 1 \text{ и } \lambda_{1n} = \left(\frac{\pi n}{x_0}\right)^2 - 1.$$

В настоящей работе рассмотрим более подробно лишь случай

$$\lambda_{1n} = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 + 1,$$

которому соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = C_n \cos\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}x, n \in N$$

где C_n — произвольные постоянные, нуждающиеся в определении.

Случай собственных значений λ_{2n} исследуется аналогично.

Подставляя найденные собственные значения в (2.10) приходим к уравнению

$$T_n''(t) - \left[\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 + 1\right] T_n(t) = 0,$$

общее решение которого представимо в виде

$$T_n(t) = \alpha_{1n} \operatorname{ch} \theta_n t + \beta_{1n} \operatorname{sh} \theta_n t,$$

где $\alpha_{1n}, \beta_{1n} = \text{const}$, и $\theta_n = \sqrt{\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}\right)^2 + 1}$.

Тогда, для $u_1(x,t)$, будем иметь

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} \operatorname{ch} \theta_n t + B_{1n} \operatorname{sh} \theta_n t] \times \\ \times \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x. \quad (2.19)$$

Условия (2.3) позволяют определить A_{1n}, B_{1n}.

Действительно, разлагая заданные кусочно-непрерывные функции $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ в ряд Фурье на интервале $[-x_0, x_0]$, с учетом условия 1) теоремы 1, будем иметь

$$\varphi_3(x) = \frac{\nu_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x,$$

$$\varphi_4(x) = \frac{\tau_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x,$$

где

$$\nu_0 = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_3(x) dx, \tau_0 = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_4(x) dx,$$

$$\nu_0 = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_3(x) \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x dx, \\ \tau_0 = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_4(x) \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x dx, \quad (2.20)$$

а ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n|$ сходятся.

Учитывая условия (2.3), а также условие 3) теоремы 1, находим

$$A_{1n} = \frac{\tau_n - \nu_n \operatorname{ch} \theta_n t_0}{\theta_n \operatorname{sh} \theta_n t_0}, \quad B_{1n} = \frac{\tau_n}{\theta_n}$$

Подставляя значения A_{1n}, B_{1n} в (2.19), окончательно будем иметь

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n \operatorname{ch} \theta_n t - \nu_n \operatorname{ch} \theta_n (t_0 - t)}{\theta_n \operatorname{sh} \theta_n t_0} \times \\ \times \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x. \quad (2.21)$$

Теперь покажем сходимость ряда (2.21) определяющего фукцию $u_1(x,t)$. Используя условия 1) – 2) теоремы 1, проинтегрировав по частям формулы (2.20), нетрудно показать, что, коэффициенты Фурье ν_n и τ_n не превосходят величин

$$\frac{M_1}{\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}\right)^3} \text{ и } \frac{M_2}{\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}\right)^3}$$

соответственно, где $M_1, M_2 = \text{const}$, $n = 1, 2, \ldots$, а ряд (2.21) мажорируется сходящимся рядом.

Действительно, для всех $-x_0 < x < x_0$, $0 < t < t_0$ выполняются неравенства

$$|u_1(x,t)| \leqslant \left| \frac{\tau_n \operatorname{ch} \theta_n t - \nu_n \operatorname{ch} \theta_n (t_0 - t)}{\theta_n \operatorname{sh} \theta_n t_0 \cos \frac{\pi+2\pi n}{2x_0} x} \right| \leqslant \\ \leqslant \left| \frac{\tau_n \operatorname{ch} \theta_n t}{\theta_n \operatorname{sh} \theta_n t_0} \right| + \left| \frac{\nu_n \operatorname{ch} \theta_n (t_0 - t)}{\theta_n \operatorname{sh} \theta_n t_0} \right| \leqslant \\ \leqslant \left| \frac{\tau_n \operatorname{ch} \theta_n t_0}{\theta_n \operatorname{sh} \theta_n t_0} \right| + \left| \frac{\nu_n \operatorname{ch} \theta_n t_0}{\theta_n \operatorname{sh} \theta_n t_0} \right| \leqslant \\ \leqslant \left| \frac{\tau_n \operatorname{cth} \theta_n t_0}{\theta_n} \right| + \left| \frac{\nu_n \operatorname{cth} \theta_n t_0}{\theta_n} \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{M}{\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}\right)^4} \operatorname{cth} \sqrt{\left(\frac{3\pi}{2x_0}\right)^2 + 1 t_0},$$

где $M = M_1 + M_2$.

Так как мажорирующий ряд является числовым и он сходится, то ряд (2.21) сходится равномерно относительно x и t. Аналогично можно показать сходимость рядов $u_{1x}(x,t)$, $u_{1t}(x,t)$, $u_{1xx}(x,t)$, $u_{1xt}(x,t)$, $u_{1tt}(x,t)$, полученных из (2.21) почленным дифференцированием.

Представленные выше рассуждения остаются справедливыми и для случая задачи (2.4)–(2.6). Причем функция $u_2(x,t)$ аналогично функции $u_1(x,t)$ для различных собственных занчении задачи Штурма-Лиувилля находится в виде сходящихся тригонометрических рядов. Таким образом решение задачи А определяется из соотношения $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$.

Перейдем теперь к доказательству единственности решения исследуемой задачи А. Для этого покажем, что однородная задача (1.1), (1.2) имеет только тривиальное решение.

В самом деле, пусть $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$, $\varphi_3(x) = \varphi_4(x) = 0$ на $-x_0 < x < x_0$,

$0 < t < t_0$. Тогда, принимая во внимание структуру выражении полученных для $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, а также учитывая полноту систем

$$\left\{\cos\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\sin\frac{\pi n}{x_0}x\right\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\left\{\sin\frac{\pi n}{t_0}t\right\}_{n=1}^{\infty},$$

легко убедиться в справедливости тождества $u \equiv 0$. Откуда непосредственно следует единственность решения задачи А.

Заключение

Полученные в работе результаты могут быть оценены как с теоретической точки зрения, поскольку непосредственно связаны с широким кругом фундаментальных проблем теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, так и с прикладной точки зрения, в связи со значительным спектром прикладных задач, сводящихся к уравнениям с отклоняющимся аргументом. В частности, данные разработки могут послужить обобщением, уже имеющихся на сегодняшний день математических моделей теории капиллярности [13], [14] и стать новой ступенью в развитии уравнений математической биологии [15], где применение подобного аппарата представляется в значительной степени перспективной и актуальной задачей.

Литература

1. *Бурлаков Е. О.* О непрерывной зависимости от параметров решений краевых задач для управляемых систем с отклоняющимся аргументом // Вестник ТГУ. 2010. Т 15. Вып. 1. С. 395–396.
2. *Недорезов Л. В., Утюпин Ю. В.* Об одной модели системы хищник-жертва с запаздыванием // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6. №4. С. 67–74.
3. *Кащенко И. С.* Локальная динамика уравнения с длительным экспоненциально распределенным запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18. №3. С. 42–49.
4. *Сабатулина Т. Л.* Признаки положительности функции Коши дифференциального уравнения с рапределенным запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2010. №11. С. 50–62.
5. *Rezounenko A. V.* Stability of positive solutions of local partial differential equations with a nonlinear integral delay term // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. Proc. 8th Coll. QTDE. 2008. No. 17. P. 1–7.
6. *Hernandez E., Prokopczyk A., Ladeira L.* A note on partial functional differential equations with state-dependent delay // Nonlinear Analysis, R.W.A.. 2006. No. 4. P. 510–519.
7. *Бжеумихова О. И.* К теории краевых задач для уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом // Труды Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Математика и математическое моделирование». Саранск, 2011. С. 45–49.
8. *Лесев В. Н., Курданов Х. Ю.* О краевых задачах для уравнений основных типов второго порядка с отклоняющимся аргументом // Материалы XIII Международной научной конференции им. акад. М. Кравчука. Киев: НТТУ, 2010. Т. 1. С. 250.
9. *Caberlin M.* Stiff ordinary and delay differential equations in biological system. Montreal: McGill University, 2002. 87 p.
10. *Прасолов А. В.* Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. СПб.: Лань, 2010. 192 с.
11. *Смит Дж. М.* Модели в экологии. М.: Мир, 1976. 184 с.
12. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Стабилизация систем с запаздываниями методами оптимального управления // Известия высших учебных заведении. Математика. 2002. №12. С. 44–54.
13. *Лесев В.Н.* Математические методы в исследовании статики и кинетики капиллярных поверхностей. Нальчик: Принт-Центр, 2011. 162 с.
14. *Лесев В. Н., Созаев В. А.* Исследование статики и динамики малых капель. Фундаментальные основы, математические модели, численные методы. – Saarbrücken (Germany): Lambert Academic Publishing. 2011. 128 p.
15. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, уравнение в частных производных, уравнение с отклоняющимся аргументом, краевая задача, задача Неймана.

Статья поступила 24 января 2012 г.
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова