УДК 539.375:534.1

# К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЛНОВОДНЫХ СВОЙСТВ ПАКЕТА УПРУГИХ СЛОЕВ С СОВОКУПНОСТЬЮ ТРЕЩИН[1]

***Пряхина О. Д.[2], Смирнова А. В.[3]***

TO THE WAVEGUIDE RESEARCH OF ELASTIC LAYERS SET FEATURES IN THE AGGREGATE OF FRACTURES

Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The effective method of building the cores system matrix-symbol of integral equations and its determiners is used in the research of waveguides features of stratified medium with fractures.

Keywords: block Grin matrix-symbol, the system of integral equations, stratified half-boundary medium in the aggregate of fractures.

Динамические процессы в полуограниченных средах, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, несмотря на большое количество работ, посвященных их исследованию, на сегодняшний день далеки до полного описания. Вследствие зависимости напряженно-деформированного состояния механических систем подобного рода от большого числа параметров традиционные аналитические и численные методы их анализа становятся неэффективными даже при небольшом количестве дефектов, а с ростом частоты колебаний и в областях больших размеров многие из них неприменимы. В связи с этим актуальными становятся как исследования рассматриваемого класса задач в новой постановке, так и разработка новых численно-аналитических методов их решения. Особенно важным является создание методов, направленных на изучение резонансных свойств механических систем.

В настоящей работе рассматривается совокупность дефектов типа трещин-полостей, расположенных в плоскостях, параллельных границам раздела слоев в многослойной полуограниченной упругой среде. Основное внимание при этом уделено анализу особых множеств определителей символов ядер систем интегральных уравнений, порождаемых краевыми задачами рассматриваемого класса. Метод построения систем интегральных уравнений (СИУ), а также эффективный метод вычисления определителей матриц-символов ядер этих систем приведены в [1–3]. Применение метода фиктивного поглощения к построению решения интегральных уравнений рассматриваемого класса описано в [4].

## 1. Пакет слоев с системой трещин

Перемещения $\mathbf{w}(x,y,z) = \{w_1, w_2, w_3\}$ точек пакета $N$ упругих слоев, занимающего объем $(-\infty < x, y < +\infty;\ -H \leqslant z \leqslant 0)$, вызванные вибрацией берегов трещин, расположенных в $\tilde{N}$ уровнях по глубине пакета, описываются системой дифференциальных уравнений Ламе

$$(\lambda_k + \mu_k)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{w}_k + \\ + \mu_k \Delta \mathbf{w}_k - \rho_k \omega^2 \mathbf{w}_k = 0, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{w}_k(x,y,z) = \mathbf{w}(x,y,z),$$

$$-2\sum_{m=1}^{k} h_m \leqslant z \leqslant -2\sum_{m=1}^{k-1} h_m, \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

со следующими граничными условиями (общий множитель $e^{-i\omega t}$ опущен):
на верхней грани

$$\mathbf{t}(x,y,z)|_{z=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty; \quad (1.2)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (11-08-00135).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: donna@kubsu.ru.

[3]Смирнова Алла Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета.; e-mail: allasmir@yandex.ru.

на границах раздела физико-механических свойств слоев, не содержащих трещины

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}_k^-, & -\infty < x, y < +\infty, \\ \mathbf{t}_k^+ = \mathbf{t}_k^-, & -\infty < x, y < +\infty, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$z = z_k = -2\sum_{p=1}^{k} h_p, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1;$$

в плоскостях расположения трещин

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{p(k)}^+ = \mathbf{t}_{p(k)}^- = \mathbf{t}_{p(k)}^0, & (x, y) \in \tilde{\Omega}_{p(k)}, \\ \Delta\mathbf{w}_{p(k)} = 0, & (x, y) \notin \tilde{\Omega}_{p(k)}, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$z = \tilde{z}_k = -2\sum_{p=1}^{p(k)} h_p, \quad k = 1, 2, \ldots, \tilde{N};$$

на нижней грани пакета

$$\mathbf{w}(x, y, -H) = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty. \tag{1.5}$$

Здесь

$$\mathbf{w}_k^\pm = \mathbf{w}(x, y, z)|_{z = z_k \pm 0},$$

$$\mathbf{t}_k^\pm = \mathbf{t}(x, y, z)|_{z = z_k \pm 0}$$

— векторы перемещений и напряжений на верхней (+) и нижней (−) границах раздела слоев; $\mathbf{w}_{p(k)}^\pm$, $\mathbf{t}_{p(k)}^\pm$ — соответственно векторы перемещений и напряжений на верхнем (+) и нижнем (−) берегах трещины, занимающей область $\tilde{\Omega}_{p(k)}$ в плоскости $z = \tilde{z}_k$, $\Delta\mathbf{w}_{p(k)} = \mathbf{w}_{p(k)}^+ - \mathbf{w}_{p(k)}^-$, $p(k)$ — номер, определяющий положение плоскости, содержащей $k$ – тую трещину ($k = 1, 2, \ldots, \tilde{N}$). В частном случае, когда трещины расположены только на границах раздела слоев, $z_k = \tilde{z}_k$ и $\tilde{N} = N - 1$.

Краевая задача (1.1)-(1.5) сводится к решению СИУ [1]

$$\int_{\delta_1}\int_{\delta_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)\, \mathbf{Q}(\alpha, \beta)\, e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = \mathbf{t}(x, y), \tag{1.6}$$

$$(x, y) \in \tilde{\mathbf{\Omega}},$$

где $f(x, y) = \left\{\mathbf{t}_{p(1)}^0, \mathbf{t}_{p(2)}^0, \ldots, \mathbf{t}_{p(\tilde{N})}^0\right\}$ — многомерный вектор, компонентами которого являются векторы напряжений, заданные на берегах трещин, $\mathbf{Q} = \left\{\mathbf{f}_{p(1)}, \ldots, \mathbf{f}_{p(\tilde{N})}\right\}$ — многомерный вектор, имеющий своими компонентами трансформанты Фурье скачков векторов перемещений $\Delta\mathbf{w}_{p(k)}(x, y)$ на берегах трещин. Носителем каждой вектор-функции $\Delta\mathbf{w}_{p(k)}(x, y)$, является соответствующая область из $\tilde{\mathbf{\Omega}}$, $\tilde{\mathbf{\Omega}} = \left\{\tilde{\Omega}_{p(1)}, \tilde{\Omega}_{p(2)}, \ldots, \tilde{\Omega}_{p(\tilde{N})}\right\}$. Так как $\tilde{\Omega}_{p(k)}$ расположены в разных плоскостях, то матрица-символ ядра $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$ СИУ (1.6) для сред, содержащих совокупность разноуровневых трещин, в отличие от СИУ традиционных контактных задач, является блочной

$$\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{\tilde{N}},$$

$$\mathbf{K}_{ij}(\alpha, \beta) = \left\|K_{mn}^{ij}(\alpha, \beta)\right\|_{m,n=1}^{3}.$$

Введем матрицы $\mathbf{S}_{Np(k)}$ $\left(k = 1, 2, \ldots, \tilde{N}\right)$, характеризующие положение трещин в среде

$$\mathbf{S}_{Np} = \mathbf{K}_p^-(h_1, h_2, \ldots, h_p) - \mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1}, h_{p+2}, \ldots, h_N). \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{K}_p^-$ — матрица Грина пакета $p$ слоев со свободной верхней гранью, $\mathbf{K}_{N-p}$ — матрица Грина пакета $(N - p)$ слоев на жестком основании. В принятых обозначениях

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{S}_{Np(i)}^{-1}, & i = j, \\ \mathbf{R}_{p(i)p(j)}^{-}\mathbf{S}_{Np(j)}^{-1}, & i < j, \\ \mathbf{R}_{p(i)p(j)}\mathbf{S}_{Np(j)}^{-1}, & i > j. \end{cases} \tag{1.8}$$

Матрицы $\mathbf{R}_{km}$ и $\mathbf{R}_{km}^-$ даются формулами

$$\mathbf{R}_{km} = (-1)^{(k-m)}\prod_{i=k}^{m+1}\mathbf{F}_{N+1-i}^{-1}(h_i)\,\mathbf{B}_+(-h_i),$$

$$\mathbf{R}_{km}^- = \prod_{i=k+1}^{m}\mathbf{\Phi}_i^{-1}(h_1, h_2, \ldots, h_i)\,\mathbf{B}_-(h_i),$$

а матрицы $\mathbf{K}_m$, $\mathbf{K}_m^-$, $\mathbf{\Phi}_m$, $\mathbf{F}_m$ — определяются из рекуррентных соотношений

$$\mathbf{F}_1(h_N) = \mathbf{B}_-(-h_N),$$

$$\mathbf{F}_{k+1}(h_{N-k}) = \mathbf{B}_-(-h_{N-k}) - \mathbf{K}_k(h_{N-k+1}),$$
$$k = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\mathbf{K}_n(h_{N+1-n}, \ldots, h_N) = \mathbf{B}_+(h_{N+1-n}) - \mathbf{B}_-(h_{N+1-n})\,\mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{B}_+(-h_{N+1-n}),$$
$$n = 1, 2, \ldots, N$$

$$\mathbf{\Phi}_1 = 0, \quad \mathbf{K}_1^-(h_1) = \mathbf{B}_-(-h_1),$$

$$\mathbf{\Phi}_m = \mathbf{K}_{m-1}^-(h_1, h_2, \ldots, h_{m-1}) - \mathbf{B}_+(h_m),$$

$$\mathbf{K}_m^-(h_1,\ldots,h_m)=\mathbf{B}_-(-h_m)+\\ +\mathbf{B}_+(-h_m)\,\mathbf{\Phi}_m^{-1}(h_1,\ldots,h_m)\,\mathbf{B}_-(h_m),\\ m=2,3,\ldots,N.$$

Вспомогательные матрицы $\mathbf{B}_\pm$ приведены в [1–4].

Элементы всех введенных матриц зависят от параметров преобразования Фурье $\alpha$, $\beta$, частоты гармонических колебаний $\omega$, а также физико-механических параметров (плотности $\rho_k$, коэффициентов Ламе $\mu_k$, $\lambda_k$, коэффициента Пуассона $\nu_k$) слоев, полутолщины $h_k$ которых указаны в качестве аргументов, $k=1,2,\ldots,N$. Для изотропных сред элементы указанных матриц, за исключением (1.8), имеют структуру, присущую элементам матриц-символов Грина

$$\mathbf{K}_N(\alpha,\beta,\omega)=\left\|K_{mn}^N(\alpha,\beta,\omega)\right\|_{m,n=1}^3$$

как $N$-слойных, так и однородных упругих полуограниченных сред без дефектов

$$K_{11}^N=\frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{2N}(\lambda)}k_{11}^N(\lambda)+\\ +\frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{1N}(\lambda)}\tilde{k}_{11}^N(\lambda),\quad(1.9)$$

$$K_{22}^N=\frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{2N}(\lambda)}k_{11}^N(\lambda)+\frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{1N}(\lambda)}\tilde{k}_{11}^N(\lambda),$$

$$K_{33}^N=\frac{k_{22}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)},$$

$$K_{12}^N=K_{21}^N=\\ =\frac{\alpha\beta}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\Delta_{2N}(\lambda)}k_{11}^N(\lambda)-\frac{1}{\Delta_{1N}(\lambda)}\tilde{k}_{11}^N(\lambda)\right),$$

$$K_{13}^N=-K_{31}^N=i\alpha\frac{k_{12}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)},$$

$$K_{23}^N=-K_{32}^N=i\beta\frac{k_{12}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)},\quad \lambda^2=\alpha^2+\beta^2.$$

Вид функций $k_{11}^N$, $\tilde{k}_{11}^N$, $k_{12}^N$, $k_{22}^N$, $\Delta_{1N}$, $\Delta_{2N}$ определяется конкретной моделью среды [1–3].

Если в плоскостях $z=\tilde{z}_k$ имеется $M_k$ трещин, занимающих области $\tilde{\Omega}_{p(k)m}$, $m=1,2,\ldots,M_k$, то размерность СИУ (1.6) равна $3\sum\limits_{k=1}^{\tilde{N}}M_k\times3\sum\limits_{k=1}^{\tilde{N}}M_k$. В этом случае

$$\Delta\mathbf{w}_{p(k)}(x,y)=\sum_{m=1}^{M_k}\Delta\mathbf{w}_{p(k)m}(x,y),$$

$$\Delta\mathbf{w}_{p(k)m}(x,y)=\begin{cases}\mathbf{w}_{p(k)m}^+-\mathbf{w}_{p(k)m}^-,\\ \qquad (x,y)\in\tilde{\Omega}_{p(k)m},\\ 0,\quad (x,y)\notin\tilde{\Omega}_{p(k)m},\end{cases}$$

$$\tilde{\Omega}_{p(k)}=\tilde{\Omega}_{p(k)1}\cup\tilde{\Omega}_{p(k)2}\cup\ldots\cup\tilde{\Omega}_{p(k)M_k}.$$

Размеры и относительное расположение областей $\tilde{\Omega}_{p(k)m}$ также являются параметрами задачи.

Зависимость напряженно-деформированного состояния механических систем подобного рода от большого числа параметров на первый план выводит формирование принципиально новых методологических основ проведения исследования, направленных на выявление условий возникновения особых, в том числе резонансных, режимов колебаний. Фундаментальные результаты по выявлению условий локализации волнового процесса в окрестности неоднородностей и развитию новой стратегии их изучения получены в [5–7]. Важным для формулировки условий локализации является построение определителя СИУ (1.6) и поиск его нулей.

Полученное в виде произведения матриц представление (1.8), допускает простую интерпретацию результатов и удобно для проведения дальнейшего анализа элементов и определителя блочной матрицы-символа ядра СИУ.

Для элементов и определителя символа ядра $\mathbf{K}$ в (1.6) установлены следующие свойства:

1) Коэффициенты асимптотического разложения диагональных элементов

$$\mathbf{K}_{ll}=\mathbf{S}_{Np(l)}^{-1}(\alpha,\beta)=\left\|S_{ij}^{Np}\right\|_{i,j=1}^3$$

при $|\lambda|\to\infty$ зависят от физико-механических параметров только двух слоев, содержащих на своей границе $l$ -тую трещину и совпадают с коэффициентами асимптотического разложения символа ядра СИУ для двухслойного пространства, содержащего трещину на стыке полупространств. Если $l$ -тая трещина расположена не на границе раздела слоев, а например, внутри $n$ -го изотропного слоя, то

$$\mathbf{K}_{ll}\big|_{|\lambda|\to\infty}\sim-\frac{|\lambda|}{2}\|k_{ll}^0\|,$$

$$k_{11}^0=A\cos^2\varphi+\sin^2\varphi,$$

$$k_{22}^0=A\sin^2\varphi+\cos^2\varphi,$$

$$k_{33}^0 = A, \quad k_{13} = k_{31} = k_{32} = k_{23} = 0,$$
$$k_{12}^0 = k_{21}^0 = (A-1)\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$A = \frac{1}{1-\nu_n}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

2) Матрицы-функции $\mathbf{K}_{lm}(\alpha,\beta)$ $(l \neq m)$ при $|\lambda| \to \infty$ являются экспоненциально убывающими.

3) Функции $S_{i3}^{Np}(\alpha,\beta)$, $S_{3i}^{Np}(\alpha,\beta)$, $i = 1,2$ нечетные, остальные — четные.

4) Функция $s_{Np}(\lambda,\omega) = \det \mathbf{S}_{Np}^{-1}(\alpha,\beta)$ является мероморфной функцией параметра $\lambda$, имеющей конечное число вещественных нулей и полюсов, остальные — комплексные с точкой сгущения на бесконечности; $s_{Np}(\lambda,\omega) \neq 0$ для $\alpha \in \delta_1$, $\beta \in \delta_2$.

$$5)\ \det \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega) = \det \mathbf{S}_{Np(\tilde{N})}^{-1} \times$$
$$\times \prod_{k=\tilde{N}-1}^{1} \det \mathbf{S}_{p(k+1)p(k)}^{-1}. \qquad (1.10)$$

6) Функция $s_{Np}(\lambda,\omega)$ представима в виде отношения целых функций

$$s_{Np}(\lambda,\omega) = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \qquad (1.11)$$

$$\eta_1 = D_p^-(h_1,h_2,\ldots,h_p) \times$$
$$\times \Delta_{N-p}(h_{p+1},h_{p+2},\ldots,h_N),$$
$$\eta_2 = \Delta_N(h_1,h_2,\ldots,h_N).$$

Здесь $D_p^-(h_1,h_2,\ldots,h_p)$ — полярное множество $\det \mathbf{K}_p^-(h_1,h_2,\ldots,h_p)$, $\Delta_N(h_1,h_2,\ldots,h_N)$ — полярное множество $\det \mathbf{K}_N(h_1,h_2,\ldots,h_N)$.

Достоинством такой формы записи определителя является возможность исключения корневых и полярных множеств $\det \mathbf{K}$, имеющих пересечения (при произвольных значениях параметров механической системы), уже на стадии аналитического построения, что является важным при определении спектральных характеристик волновых полей, возбуждаемых системой трещин.

Соотношения (1.8)–(1.11) позволяют исследовать различные аспекты динамики полуограниченных слоистых сред при произвольном количестве и расположении в них дефектов типа трещин. Осуществив в (1.8) и (1.11) предельный переход, устремляя толщину нижнего слоя пакета к бесконечности, приходим к задаче для многослойного полупространства с совокупностью трещин. Если в дополнение к этому устремить к бесконечности толщину верхнего слоя, то получим соотношения, описывающие динамику слоистого пространства при наличии трещин, расположенных в параллельных плоскостях. Для однородной среды, содержащей многоуровневые трещины, следует принять физико-механические параметры всех слоев равными.

## 2. Примеры

В качестве примеров использования полученных соотношений выпишем $\det \mathbf{K}$ СИУ (1.6), соответствующей нескольким случаям расположения трещин в $N$-слойном пакете со свободной от напряжений верхней гранью и жестко защемленной нижней.

$1^0$. *Трещина в $N$-слойном пакете.* Предположим, что трещина расположена на границе между первым и вторым слоем. Тогда $\tilde{N} = 1$, $p(1) = 1$ и в (1.6) матрица-символ имеет вид

$$\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega) = \mathbf{K}_{11} = \mathbf{S}_{N1}^{-1}(\alpha,\beta,\omega) \qquad (2.1)$$
$$\mathbf{S}_{N1} = \mathbf{K}_1^-(h_1) - \mathbf{K}_{N-1}(h_2,\ldots,h_N)$$

Функции, определяющие в соответствии с (1.9) элементы матриц

$$\mathbf{K}_1^-(h_1) = \left\| K_{ij}^- \right\|_{i,j=1}^3, \quad \mathbf{K}_{N-1} = \left\| K_{ij}^{N-1} \right\|_{i,j=1}^3$$

приведены в [1–3].

Как и в традиционных контактных задачах для элементов матрицы (2.1) сохраняется чередование вещественных нулей функций $\tilde{k}_{11}^{11}(h_1,h_2,\ldots,h_N)$, $\Delta_{1N}(h_1,h_2,\ldots,h_N)$, $k_{ii}^{11}(h_1,h_2,\ldots,h_N)$, $\Delta_{2N}(h_1,h_2,\ldots,h_N)$, $i = 1,2$ в плоскости $(Re\lambda,\omega)$.

Определитель матрицы-символа СИУ в этом случае вычисляется по формуле

$$\det \mathbf{K} = \det \mathbf{S}_{N1}^{-1}(\alpha,\beta,\omega). \qquad (2.2)$$

Форма записи соотношения (2.2) дает четкое представление о структуре корневого множества определителя СИУ для слоистой среды с трещиной — оно является объединением полярного множества определителя матрицы-символа Грина пакета слоев толщины $2\sum\limits_{k=2}^{N} h_k$, расположенного ниже трещины и полярного множества матрицы-символа Грина одного слоя толщины $2h_1$ со свободной верхней гранью, лежащего выше трещины.

$2^0$. *Трещина в однородном слое.* Для трещины, расположенной на глубине $z = -2h_1$ в однородном слое толщины $H = 2\,(h_1 + h_2)$, имеем

$$\det \mathbf{K} = \frac{D_1^-\,(h_1)\,\Delta_1\,(h_1)}{\Delta_1\,(h_1 + h_2)}.$$

Используя эти соотношения можно путем подбора глубины погружения трещины $2h_1$ управлять динамическими свойствами механической системы.

$3^0$. *Две трещины в пакете* $N$-слоев. Для двух трещин, расположенных, например, на первой и третьей границах раздела слоев имеем $\tilde{N} = 2$, $p(1) = 1$, $p(2) = 3$,

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{S}_{N1}^{-1}\,(\alpha, \beta, \omega)\,, \quad \mathbf{K}_{22} = \mathbf{S}_{N3}^{-1}\,(\alpha, \beta, \omega)\,,$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{R}_{13}^{-}\mathbf{S}_{N3}^{-1}, \quad \mathbf{K}_{21} = \mathbf{R}_{31}\mathbf{S}_{N1}^{-1},$$

$$\mathbf{S}_{N3} = \mathbf{K}_3^-\,(h_1, h_2, h_3) - \mathbf{K}_{N-3}\,(h_4, \ldots, h_N)\,,$$

$$\det \mathbf{K}\,(\alpha, \beta, \omega) = \det \mathbf{S}_{N1}^{-1} \det \mathbf{S}_{(N-1)2}^{-1},$$

$$\mathbf{S}_{(N-1)2} = \mathbf{K}_2^-\,(h_2, h_3) - \mathbf{K}_{N-3}\,(h_4, \ldots, h_N)\,,$$

$$\det \mathbf{S}_{N1}^{-1} = \frac{D_1^-\Delta_{N-1}}{\Delta_N},$$

$$\det \mathbf{S}_{(N-1)2}^{-1} = \frac{D_2^-\Delta_{N-3}}{\Delta_{N-1}},$$

$$\det \mathbf{K} = \frac{D_1^- D_2^- \Delta_{N-3}}{\Delta_N}. \qquad (2.3)$$

Здесь

$$D_1^- = D_1^-(h_1), \quad D_2^- = D_2^-(h_2, h_3),$$

$$D_{N-1} = D_{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N),$$

$$\Delta_{N-3} = \Delta_{N-3}(h_4, h_5, \ldots, h_N),$$

$$\Delta_{N-1} = \Delta_{N-1}(h_2, h_3, \ldots, h_N),$$

$$\Delta_N = \Delta_N(h_1, h_2, \ldots, h_N).$$

При вычислении определителя (2.3) на стадии аналитических преобразований исключается функция $\Delta_{N-1}\,(h_2, h_3, \ldots, h_N)$, входящая сомножителем соответственно в числитель и знаменатель $\det \mathbf{S}_{N1}^{-1}$ и $\det \mathbf{S}_{(N-1)2}^{-1}$.

$4^0$. *$N-1$ включений в $N$-слойном пакете.* Если в пакете из $N$ слоев имеются включения на всех стыках слоев, то

$$\det \mathbf{K} = \prod_{k=1}^{N-1} D_1^-\,(h_k) \times$$

$$\times \frac{\Delta_1\,(h_N)}{\Delta_N\,(h_1, h_2, \ldots, h_N)}, \quad (2.4)$$

Как следует из (2.2)–(2.4), корневое множество определителя матрицы-символа СИУ (1.6) описывается произведением функций, каждая из которых зависит от геометрических и физико-механических параметров только тех частей объема, которые образованы в пакете слоев плоскостями, содержащими трещины.

### *Литература*


1. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Интегральные уравнения динамических задач для многослойных сред, содержащих систему трещин // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 345–351.
2. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87–97.
3. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов вибропрочности» // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С.44–53.
4. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
5. *Бабешко В. А.* К расчету параметров высокочастотного резонанса в трехмерном случае // ДАН. 1994. Т. 335. № 1. С. 55–58.
6. *Бабешко В. А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
7. *Бабешко В. А.* Теория «вирусов» вибропрочности для совокупностей включений // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 21–23.


Ключевые слова: блочная матрица-символ Грина, система интегральных уравнений, многослойная полуограниченная среда с совокупностью трещин.

Статья поступила 10 марта 2012 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар