УДК 517.956.25

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОГО (НЕЛИНЕЙНОГО) УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ В ГРАНИЧНЫХ ТОЧКАХ

Щербаков Е. А.[1]***, Терентьева Ю. В.***[2]

THE RESEARCH OF THE INTEGRABILITY FEATURES OF THE DERIVATIVES SOLUTIONS OF THE CONJUGATE (NONLINEAR) BELTRAMI EQUATION DEGENERATING AT THE BOUNDARY POINTS

Scherbakov E. A., Terenteva J. V.

In this article we study degenerate elliptic equations. Using the method of integral equations we prove the theorem of existence of solutions of these equations in the class of quasiconformal mappings bounded in the mean, and in the more general case. We prove also higher integrability of the solutions of this equation in the case of the border degeneration.

Keywords: conjugate (nonlinear) Beltrami equation, degenerate elliptic equations, Muckenhoupt class, weighted Sobolev space, embedding theorems, bounded singular operator in weighted space, quasiconformal mappings.

Хорошо известно [1], что теория K — квазиконформных отображений тесно связана с теорией упругости, например, с бесконечно малыми изгибаниями кусочно-регулярных поверхностей и с изучением их жесткости. Чтобы иметь возможность исследования случаев, в которых имеются точки уплощения, необходимо привлекать теорию общих квазиконформных отображений, которая в последнее время находится в стадии своего развития и все еще далека от своего завершения.

Предметом изучения данной работы являются обобщенные решения $w(z) = u(z) + iv(z)$ эллиптических систем вида

$$\begin{cases} \rho(z)\, u_x = v_y, \\ \rho(z)\, u_y = -v_x, \end{cases} \tag{1}$$

осуществляющие топологическое отображение круга $B_1 = B(0;1) = \{z : |z| < 1\}$ на себя.

Подобная задача рассмотрена ранее в работе [2].

Обозначим через Γ_0 конечное множество точек на границе Γ круга B_1.

Будем предполагать, что функция $\rho(z)$ неотрицательна внутри B_1, обращается в нуль в точках множества $\Gamma_0 \subset \Gamma$, обладает обобщенными производными первого порядка в B_1 и непрерывна в $\bar{B}_1$.

Переходя к комплексным переменным, запишем систему (1) в следующем виде:

$$w_z = \frac{1-\rho}{1+\rho}\overline{w_z}. \tag{2}$$

Определение 1 [3]. Будем говорить, что отображение $w(z)$ есть *обобщенное решение* уравнения (2) в B_1, если $w(z)$ локально суммируемо в B_1 и существуют обобщенные производные $\partial_{\bar z} w$ и $\partial_z w$ класса $L_p(B_1)$, $p \geqslant 1$, удовлетворяющие уравнению (2) почти всюду в B_1.

Нас интересуют обобщенные решения системы (1), осуществляющие топологические отображения. Их свойства определяются свойствами так называемой весовой функции $\rho(z)$.

Определение 2 [3]. Топологическое отображение $w : \Omega \to w(\Omega)$, сохраняющее ориентацию, называется *K-квазиконформным*, если его характеристика

$$K(z) = \frac{|w_z| + |w_z|}{|w_z| - |w_z|}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ ограничена константой $K \in \mathbb{R}$.

---

[1]Щербаков Евгений Александрович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: echt@math.kubsu.ru.

[2]Терентьева Юлия Валерьевна, аспирант кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: tuv86@mail.ru.

Так как функция $\rho(z)$ обращается в нуль на Γ_0 и в нашем случае $K(z) = \rho^{-1}(z)$, то отображения, удовлетворяющие уравнению (2), не являются K — квазиконформными ни для какой константы $K \in \mathbb{R}$. Такие отображения назовем общими квазиконформными отображениями, а соответствующую им систему — вырождающейся. Система (1) в таком случае не является равномерно эллиптической.

Из геометрических соображений ясно, что действительная часть $u(z)$ топологического отображения $w(z)$ интегрируема с квадратом с весом $\rho(z)$, а мнимая часть — с весом $\rho^{-1}(z)$ в круге B_1.

Известно [3], что если в классическом уравнении Бельтрами

$$w_{\bar{z}} = \mu(z)\, w_z \tag{3}$$

функция μ измерима и $\|\mu\|_\infty \leqslant q_0 < 1$, то существует единственное квазиконформное отображение w^μ круга на себя, нормированное, например, соответствием трех пар граничных точек, комплексная характеристика $\frac{w_{\bar{z}}}{w_z}$ которого равна $\mu(z)$ почти всюду. При этом координатные функции $u(z), v(z)$ принадлежат пространству $W^{1,2}(B_1)$ [4]. Б. В. Боярским в работе [5] было показано, что производные K — квазиконформных отображений обладают улучшенными свойствами интегрируемости.

В монографии [6] исследуются свойства общих квазиконформных отображений плоскости на себя с интегрируемой характеристикой. Там, в частности, показано, что обобщенные производные первого порядка локально интегрируемы в $\mathbb{C}$. Кроме того, показано, что существует конечное множество, вне которого первые производные локально интегрируемы с квадратом.

В настоящей работе получены улучшенные свойства интегрируемости производных определенного класса общих квазиконформных отображений в дополнительном предположении, что производные функции $\rho(z)$ обладают некоторыми свойствами интегрируемости. Прежде всего, нас будет интересовать множество весов $\rho(z)$, принадлежащих так называемому классу Макенхаупта.

Определение 3 [7]. Пусть константа $C > 1$, $|\Omega|$ — площадь круга Ω. Говорят, что функция f принадлежит *классу Макенхаупта* $A_2(\mathbb{C})$, если для любого круга $\Omega \subset \mathbb{C}$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega f\, dxdy \int\limits_\Omega f^{-1} dxdy \leqslant C\,|\Omega|^2 .$$

Будем говорить также, что функция f принадлежит *классу Макенхаупта* $A_2(D)$, $D \subset \mathbb{C}$, если она допускает продолжение в $\mathbb{C}$ функцией f^*, принадлежащей классу Макенхаупта $A_2(\mathbb{C})$.

Пусть $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция, принадлежащая классу Макенхаупта $A_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$. В дальнейшем в наших построениях большую роль будут играть весовые пространства С.Л. Соболева $W^{1,p}(\omega, \Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Определение 4. Весовое пространство С.Л.Соболева $W^{1,p}(\omega, \Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, есть пространство локально суммируемых функций $\phi(z)$ в $\Omega \subset \mathbb{C}$, имеющих обобщенные производные $\partial_{\bar{z}}\phi$ и $\partial_z \phi$ и конечную норму

$$\|\phi\|_{W^{1,p}(\omega,\Omega)} = \|\phi\|_{p,\omega} + \|\nabla\phi\|_{p,\omega} ,$$

здесь $\|\phi\|_{p,\omega}$ — норма в пространстве $L_{p,\omega}(\Omega)$, определяемая следующим образом:

$$\|\phi\|_{L_p(\omega,\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\phi|^p\, \omega\, dxdy \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Для доказательства теоремы существования решения уравнения (2) с дополнительными ограничениями на дифференциальные свойства функции $\rho(z)$ нам понадобится теорема вложения [8] для весовых пространств.

Лемма 1 [8] («весовая» теорема вложения). Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — измеримое множество, такое что $|\bar{K}| = 0$. Предположим также, что для точек $z \in B_r = \{z : |z - z_0| < r\} \subset B_1$ функции $\omega^*(z), v(z)$ определяются выражениями

$$\omega^*(z) = \operatorname{dist}^{\alpha^*}(z, K), \quad v(z) = \operatorname{dist}^{\beta}(z, K),$$

где α^*, $\beta \in \mathbb{R}$ и α^*, β, q удовлетворяют неравенствам

$$1 \leqslant q < 2; \quad \frac{\alpha^* + 2}{q} > 1 + \beta.$$

Пусть t, p, q — константы, удовлетворяющие условиям

$$1 \geqslant \frac{1}{p} > 1 - \frac{1}{q}; \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Также положим $\sigma(z) = v^p(z)\,(\omega^*(z))^{-(p-1)}$ и $r_K = \max\{r, \operatorname{dist}(z_0, K)\}$.

Тогда существует константа c_3, не зависящая от z_0 и r, такая что выполнено

$$\left(\int\limits_{B(z_0,r)} |\Psi|^t \omega^*\right)^{1/t} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 r_K^{\frac{\alpha^*}{q}-\beta} r^{\frac{2}{q}-1} \left(\int\limits_{B(z_0,r)} |\nabla\Psi|^p \sigma\right)^{1/p} \quad (4)$$

для любой функции $\Psi \in C_0^\infty(B(z_0,r))$ и верно

$$(\omega^*)^{1/q}(B(z_0,r)) \leqslant$$

$$\leqslant c_2 r_K^{\frac{\alpha^*}{q}-\beta} r^{\frac{2}{q}-1} \gamma(\partial B(z_0,r)). \quad (5)$$

Здесь $\omega^*(X) = \int\limits_X \omega^*$, $\gamma(\partial X) = \int\limits_X v dH$, X — открыто и $X \subseteq B(z_0,r)$, а H — одномерная мера Хаусдорфа.

Определение 5 [9]. Отображение $w(z)$ называется *квазиконформным в среднем* в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, если его характеристика ограничена в интегральном смысле

$$\iint\limits_{\Omega} (K(z))^2 \, dxdy < \infty. \quad (6)$$

Результат, содержащийся в формулируемой ниже теореме, является известным, но приводится его авторское доказательство. Используемые интегральные свойства и свойства непрерывности решений применяются далее при доказательстве теоремы об улучшенной интегрируемости производных решения уравнения (2). Такой подход позволяет доказывать существование отображений, не являющихся квазиконформными в среднем.

Теорема 1. Пусть в уравнении (2) функция $\rho(z) = |z-z_0|^\alpha$, $z \in B_1$, $z_0 \in \Gamma_0$, $0 < \alpha < 1$. Тогда существует квазиконформное в среднем отображение $w(z): B_1 \to B_1$, являющееся обобщенным решением нелинейного уравнения Бельтрами (2). Это отображение непрерывно вплоть до границы B_1 с нормировкой $w(z_0) = i$; $w(z_1) = -i$, $w(z_2) = w_2$, $|z_1| = |z_2| = |w_2| = 1$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность K_n — квазиконформных отображений $w_n(z) = u_n(z) + iv_n(z)$, являющихся решениями уравнений

$$w_{n\bar{z}} = \frac{1-\rho_n}{1+\rho_n}\overline{w_{nz}}, \quad (7)$$

где $\rho_n = \rho\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)z\right]$ в круге B_1, с нормировкой $w(z_0) = i$; $w(z_1) = -i$, $w(z_2) = w_2$, $|z_1| = |z_2| = |w_2| = 1$.

Пусть $\omega_n = \rho_n u_n + iv_n$ а ω_n^* — продолжения функций ω_n в круг B_2 по правилу

$$\omega_n^*(z) = \frac{1}{\bar{\omega}_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad z \in B_2.$$

Так как $\omega_{n\bar{z}} = \rho_{n\bar{z}} u_n \in L_{2+l}(B_1)$, $l > 0$, то имеет место следующее представление И. Н. Векуа [1]:

$$\omega_n^* = \Phi_n^* - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{B_2} \frac{\omega_{n\bar{\zeta}}^*}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

Здесь аналитические функции Φ_n^* имеют вид

$$\Phi_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_2} \frac{\omega_{n\bar{\varsigma}}^*}{\varsigma - z} d\varsigma.$$

Пусть $\Omega_n^* = \omega_n^* - \Phi_n^*$. Так как в B_2 верно, что

$$[\Omega_n^*]_{\bar{z}} = \omega_{n\bar{z}}^* \in L_{2+l}(B_2), \quad l > 0,$$

$$[\Omega_n^*]_z = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{B_2} \frac{\omega_{n\bar{\zeta}}^*}{(\zeta-z)^2} d\xi d\eta \in L_{2+l}(B_2),$$

что означает, что функция Ω_n^* непрерывна по Гёльдеру, то есть $\Omega_n^* \in C^{\frac{l}{2+l}}(B_2)$. Так как функции Ω_n^* равномерно ограничены и равномерно ограничены в $C^{\frac{l}{2+l}}(B_2)$, то последовательность $\{\Omega_n^*\}$ компактна в $C(\bar{B}_2)$.

Так как последовательность $\{\Phi_n^*\}$ ограничена [1], то она компактна в смысле равномерной сходимости на $\bar{B}_1$. Поэтому последовательность $\{\rho_n u_n + iv_n\}$ также является компактной в смысле равномерной сходимости в круге $\bar{B}_1$ [10]. Это значит, что

$$\omega = \rho u + iv = \lim_{n\to\infty}(\rho_n u_n + iv_n)$$

непрерывна в $\bar{B}_1$. Поэтому функция $v(z)$ непрерывна в точке z_0.

Так как $v(z) \in C(\bar{B}_1)$, то функция $u(z)$ принимает на границе круга B_1 значения непрерывных функций $\pm\sqrt{1-v^2(z)}$ почти всюду. Используя критерий Винера [8], легко показать, что функция $u(z)$ непрерывна в точке z_0.

Заметим, что компактность $\{u_n\}, \{v_n\}$ может быть доказана и другими способами [11–13]. Функция $w(z) = u(z) + iv(z)$ является, очевидно, однолистной [14].

Теорема доказана.

Для доказательства улучшенной интегрируемости производных решения уравнения (2) в случае слабого вырождения в одной граничной точке, когда $\rho(z)$ является A_2-весом, нам понадобится следующая

Лемма 2. Пусть

$$p_{\bar{\varsigma}}(\varsigma) := \mathrm{const}\,|\varsigma - z_0|^{\alpha-1},\ 0<\alpha<1,\ z_0 \in \partial B_1$$

и $u = u(\varsigma)$ — ограниченная в круге $B_1 = \{\varsigma : |\varsigma| < 1\}$ функция. Тогда

$$\left|\iint\limits_{B_1} \frac{p_{\bar{\varsigma}} u(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} d\xi d\eta\right| \leqslant \frac{C}{|z-z_0|^{1-\alpha}} A(z), \quad (8)$$

$$A \in L_p(B_1)\,\forall\, p, p > 1.$$

Доказательство. Пусть

$$B_r = \{\varsigma \in B_1 : |\varsigma - z| < r\},$$

$$0 < r < \frac{1}{2}|z - z_0|;$$

$$B = B(z) := \left\{\varsigma \in B_1 \left| |\varsigma - z| < \frac{1}{2}|z-z_0| \right.\right\},$$

$$D = D(z) := \{\varsigma \in B_1 \,||\varsigma - z| < |z - z_0|\},$$

$$E = E(z) := B_1 \backslash D(z),$$

$$C = C(z) :=$$

$$:= \left\{\varsigma \in B_1 \left| \frac{1}{2}|z - z_0| < |\varsigma - z| < |z - z_0| \right.\right\}.$$

Положим $I_N = \iint\limits_{N} \frac{p_{\bar{\varsigma}} u(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} d\xi d\eta$

для измеримого множества N. Тогда

$$I_{B_1} = I_B + I_C + I_E. \quad (9)$$

Для слагаемых суммы (9) мы получаем следующие оценки:

$$|I_B| \leqslant$$
$$\leqslant \left[C_1 |\lg|z - z_0|| + \tilde{C}_1\right] \frac{1}{|z - z_0|^{1-\alpha}}, \quad (10)$$

$$|I_C| \leqslant$$
$$\leqslant \left[C_2 |\lg|z - z_0|| + \tilde{C}_2\right] \frac{1}{|z - z_0|^{1-\alpha}}, \quad (11)$$

$$|I_E| \leqslant$$
$$\leqslant \left[C_3 |\lg|z - z_0|| + \tilde{C}_3\right] \frac{1}{|z - z_0|^{1-\alpha}}. \quad (12)$$

Здесь C_i, $\tilde{C}_i$ — константы, не зависящие от z.

Учитывая представления (9) и неравенства (10)–(12), получим оценку (8).

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему о повышении показателя интегрируемости производных v_z, u_z. Впервые такого рода задача была рассмотрена для решения уравнения Бельтрами в работе Б. В. Боярского [14] (см. также [6]).

Теорема 2. Пусть $\rho : \bar{B}_1 \to \mathbb{R}$ — функция из уравнения (2), обладающая свойствами

1) непрерывна, ограничена и неотрицательна в $\bar{B}_1$;

2) существуют неотрицательные числа a_1, a_2, такие, что

$$a_1 \mathrm{dist}^{\alpha}(z,\, z_0) \leqslant \rho(z) \leqslant a_2 \mathrm{dist}^{\alpha}(z,\, z_0),$$

$$0 < \alpha < 1;$$

3) существуют обобщенные производные первого порядка в B_1, такие, что

$$\frac{\rho_x(z)}{\sqrt{\rho(z)}}, \frac{\rho_y(z)}{\sqrt{\rho(z)}} \in L_{2+l}(B_1), \quad l > 0.$$

4) функция $\rho(z)$ допускает продолжение в $\mathbb{C}$ функцией, являющейся $A_2(\mathbb{C})$-весом.

Пусть $w(z) = u(z) + iv(z)$ — квазиконформное в среднем отображение из теоремы 1, являющееся обобщенным решением уравнения (2) в круге B_1 с нормировкой $w(z_0) = i$; $w(z_1) = -i$, $w(z_2) = w_2$, $|z_1| = |z_2| = |w_2| = 1$. Тогда функция $v(z)$ принадлежит шкале пространств

$$v \in W^{1,\tau_1}\left(\mathrm{dist}^{\alpha^*}(z, z_0), B_1\right),$$

$$\tau_1 = \frac{2(2+\alpha^*)}{2-\alpha}, \quad \alpha^* \in [-\alpha; 0];$$

$$v \in W^{1,\tau_2}\left(\mathrm{dist}^{\alpha^{**}}(z, z_0), B_1\right),$$

$$\tau_2 = \frac{2(2-\delta)^2(2+\alpha^{**})}{8 - 8\alpha - 4\delta + 6\alpha\delta - \alpha\delta^2},$$

$$\alpha^{**} \in \left[\frac{\alpha(2-\delta)}{\alpha - 2}; 0\right], \quad u \in W^{1,s}(B_1),$$

$$s = 2 - 2\delta \frac{2+\alpha}{4+\alpha\delta}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность K_n — квазиконформных отображений $w_n = u_n + iv_n$ с нормировкой $w(z_0) = i$; $w(z_1) = -i$, $w(z_2) = w_2$, $|z_1| = |z_2| = |w_2| = 1$, являющихся решениями уравнений (7), где $\rho_n = \rho\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)z\right]$ в круге B_1 и

$$\frac{\rho_{nx}(z)}{\sqrt{\rho_n(z)}}, \frac{\rho_{ny}(z)}{\sqrt{\rho_n(z)}} \in L_{2+l}(B_1), \quad l>0.$$

Рассмотрим последовательность отображений $\omega_n = \rho_n u_n + iv_n$. Равномерная сходимость и непрерывность функций $\rho_n u_n + iv_n$ в точке z_0 следует из доказательства теоремы 1.

Продолжим функции ρ_n и v_n в круг B_2 симметрично относительно единичной окружности. Далее мы получаем

$$v^*_{nz\bar z}(z) = v_{nz\bar z}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_{nx}}{\rho_n}v_{nx} + \frac{\rho_{ny}}{\rho_n}v_{ny}\right),$$

$$v_{nzz}(z) = F_n^{*\prime}(z) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B_2}\left(\frac{\rho_{nx}}{\rho_n}v_{nx} + \frac{\rho_{ny}}{\rho_n}v_{ny}\right)\times \frac{1}{(\varsigma - z)^2}d\xi d\eta, \quad (13)$$

где интеграл в (13) является сингулярным.

Последовательность $\left\{F_n^{*\prime}\right\}$, очевидно, является ограниченной в $\bar B_2$ [1] и компактной в смысле равномерной сходимости на $\bar B_1$. Так как рассматриваемый нами вес $\rho(z)$ принадлежит классу Макенхаупта, то сингулярный интеграл (13) ограничен [15, 16].

Таким образом, последовательности $v_{nz\bar z}(z)$ и $v_{nzz}(z)$ компактны в смысле равномерной сходимости и для предельной функции $v(z) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(z)$ в круге B_1 имеют место равенства

$$v_{z\bar z}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_x}{\rho}v_x + \frac{\rho_y}{\rho}v_y\right),$$

$$v_{zz}(z) = F^{*\prime}(z) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B_2}\left(\frac{\rho_x}{\rho}v_x + \frac{\rho_y}{\rho}v_y\right)\frac{1}{(\varsigma - z)^2}d\xi d\eta. \quad (14)$$

Известно [8], что для весовых пространств с весовой функцией $\rho(z)$, удовлетворяющей условию теоремы 2, имеет место «весовая» теорема вложения (см. лемму 1).

Так как производные v_x, v_y принадлежат весовому пространству $L_2\left(\rho^{-1}, B_1\right)$, то $\frac{\rho_x v_x}{\rho}$, $\frac{\rho_y v_y}{\rho}$ суммируемы со степенью $t_1 = 2$ и с весом $\sigma_1 = \mathrm{dist}^{2-\alpha}(z, z_0)$. При этом вес σ_1 принадлежит классу $A_2(B_1)$.

Сингулярный интегральный оператор (14) ограничен в весовых пространствах с A_2-весом [15, 16].

Значит $(v_z)_x$, $(v_{\bar z})_y$ суммируемы со степенью t_1 и весом σ_1. В силу «весовой» теоремы вложения [8] производные v_x, v_y ограничены в пространстве $L_{t_2}\left(\mathrm{dist}^{\alpha*}(z, z_0), B_1\right)$, где

$$t_2 = \frac{2(2+\alpha^*)}{2-\alpha}$$

с весом $\omega^*(z) = \mathrm{dist}^{\alpha^*}(z, z_0)$. Поскольку параметр $q \in [1; 2)$, то показатель $\alpha^* \in [-\alpha; 0]$.

Так как $(\rho u + iv)_{\bar z} = \rho_{\bar z} u$, то производная $(\rho u + iv)_{\bar z}$ принадлежит тому же пространству, что и ρ_x, ρ_y. Учитывая представление И. Н. Векуа для функции $\rho u + iv$ и лемму 2, имеем, что производная $(\rho u + iv)_z$ принадлежит тому же пространству, что и функция $|z - z_0|^{\alpha-1}A(z)$. Поэтому и производные v_x, v_y принадлежат тому пространству, что и функция $|z - z_0|^{\alpha-1}A(z)$, где $A \in L_p(B_1)$, $\forall\, p, p>1$.

В силу сказанного, при

$$\gamma = \frac{2-\delta}{(2-\alpha)(1+\varepsilon)},$$

δ, ε — малые величины, имеем

$$\iint\limits_{B_1}\left(\frac{v_x^2(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right)^{\gamma} d\xi d\eta \leqslant \iint\limits_{B_1}\left(\frac{A^2(\zeta)\rho_x^2(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right)^{\gamma} d\xi d\eta \leqslant \left(\iint\limits_{B_1}\left(\frac{\rho_x^2(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right)^{\gamma(1+\varepsilon)} d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \times$$

$$\times\left(\iint\limits_{B_1} A^{2\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}(\zeta) d\xi d\eta\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \leqslant \tilde C \iint\limits_{B_1}\frac{1}{|\zeta - z_0|^{(2-\alpha)\gamma(1+\varepsilon)}}d\xi d\eta < \infty.$$

Аналогичное неравенство имеет место и для $\frac{v_y^2}{\rho}$.

Это значит, что производные v_x, v_y суммируемы со степенью

$$t_3 = \frac{2(2-\delta)}{(2-\alpha)(1+\varepsilon)}$$

и весом

$$\rho^{-\frac{2-\delta}{(2-\alpha)(1+\varepsilon)}}$$

в круге B_1. Тогда легко показать, что $\frac{\rho_x v_x}{\rho}$, $\frac{\rho_y v_y}{\rho}$ суммируемы со степенью

$$t_3 = \frac{2(2-\delta)}{(2-\alpha)(1+\varepsilon)}$$

и весом

$$\sigma_2 = \operatorname{dist}^{\frac{2-\delta}{1+\varepsilon}}(z, z_0).$$

При этом вес σ_2 принадлежит классу $A_2(B_1)$. Поэтому $(v_z)_x, (v_{\bar{z}})_y$ суммируемы со степенью t_3 и весом σ_2, где ε можно пренебречь. В силу «весовой» теоремы вложения [8], мы имеем ограниченность производных v_x, v_y в пространстве $L_{t_4}\left(\operatorname{dist}^{\alpha^{**}}(z, z_0), B_1\right)$, где

$$t_4 = \frac{2(2-\delta)^2(2+\alpha^{**})}{8-8\alpha-4\delta+6\alpha\delta-\alpha\delta^2}$$

с весом $\omega^{**}(z) = \operatorname{dist}^{\alpha^{**}}(z, z_0)$. Поскольку параметр $q \in [1;2)$, то показатель

$$\alpha^{**} \in \left[\frac{\alpha(2-\delta)}{\alpha-2}; 0\right].$$

Применяя неравенство Гёльдера, легко показать, что при

$$s = 2 - 2\delta\frac{2+\alpha}{4+\alpha\delta}$$

производные u_x, u_y принадлежат невесовому пространству $L_s(B_1)$.

Теорема доказана.

Следствие. В условиях теоремы 2, производные v_x, v_y функции $v(z)$ отображения $w = u + iv$ принадлежат невесовому пространству $L_t(B_1)$, где

$$t = \begin{cases} \dfrac{4}{2-\alpha}, & \alpha \in (0;\delta); \\ \dfrac{4(2-\delta)^2}{8-8\alpha-4\delta+6\alpha\delta-\alpha\delta^2}, & \alpha \in (\delta;1) \end{cases}$$

и δ сколь угодно мало.

Замечание. В силу того, что производные функции v_x, v_y координатной функции $v(z)$ в соответствии с теоремой 2 о шкале пространств принадлежат пространству $L_{\frac{4}{2-\alpha}}(B_1)$ функция $v(z)$ принадлежит пространству Гёльдера $C^{\tilde{\alpha}}(B_1)$, $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{2}$. Поэтому доказанная ранее теорема 1 для случая вырождения в одной граничной точке переносится на случай произвольного конечного числа граничных точек вырождения. Приведенное ранее доказательство непрерывности функции $v(z)$, не опирающееся на теорему о шкале пространств, целесообразно в том случае, когда мы заботимся о сохранении нормировки в точке вырождения.

Докажем теперь теорему существования обобщенного решения уравнения (2), осуществляющего топологическое отображение круга B_1 на себя, в случае сильного вырождения веса $\rho(z)$ в точке $z_0 \in \Gamma_0$, то есть при $\alpha > 1$.

Теорема 3. Пусть в уравнении (2) функция $\rho(z) = |z - z_0|^\alpha$, $z \in B_1$, $z_0 \in \Gamma_0$, $\alpha > 1$.

Тогда существует квазиконформное отображение $w(z) : B_1 \to B_1$, являющееся обобщенным решением нелинейного уравнения Бельтрами (2), непрерывное вплоть до границы B_1 с нормировкой

$$w(z_0) = i; \quad w(z_1) = -i, \quad w(z_2) = w_2,$$

$$|z_1| = |z_2| = |w_2| = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность K_n-квазиконформных отображений $w_n = u_n + iv_n$ с нормировкой

$$w(z_0) = i; \quad w(z_1) = -i, \quad w(z_2) = w_2,$$

$$|z_1| = |z_2| = |w_2| = 1,$$

являющихся решениями уравнений (7), где $\rho_n = \rho\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)z\right]$ в B_1.

Пусть $\omega_n = \rho_n u_n + iv_n$. Так как $\omega_{n\bar{z}} = \rho_{n\bar{z}} u_n \in L_{2+l}(B_1)$, $l > 0$, то имеет место представление И. Н. Векуа [1], в котором Φ_n — аналитические в B_1 функции, непрерывные в $\bar{B}_1 \setminus \{z_0\}$.

Пусть $\Omega_n = \omega_n - \Phi_n$. Так как

$$[\Omega_n]_{\bar{z}} = \rho_{n\bar{z}} u_n \in L_{2+l}(B_1), \quad l > 0,$$

$$[\Omega_n]_z = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{B_1} \frac{\rho_{n\bar{\zeta}} u_n}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta \in C^{\frac{l}{2+l}}(B_1),$$

то $\Omega_n \in W^{1,2+l}(B_1)$, $l > 0$, и последовательность $\{\Omega_n\}$ компактна в $C(\bar{B}_1)$.

Пусть $\Omega = \lim_{n\to\infty} \Omega_n$ для сходящейся подпоследовательности. Как и $\{\Phi_n\}$, последовательность $\{\omega_n\}$ сходится равномерно в $\bar{B}_1 \setminus \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$.

Пусть

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \omega_n, \quad \Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi_n.$$

Функция Φ принадлежит пространству $W^{1,2}(B_1)$. Она не является однолистной, но имеет пределы слева и справа в точке z_0. Пользуясь критерием Линделёфа [10] можно сказать, что $\omega = \rho u + iv$ непрерывна в точке z_0. Это означает непрерывность $v(z)$ в точке z_0.

Функция $w(z) = u(z) + iv(z)$ является, очевидно, однолистной [14].

Так как в данной теореме имеет место сильное вырождение веса $\rho(z)$, то комплексная характеристика $K(z)$ не является ограниченной в пространстве $L_2(B_1)$ и отображение $w(z)$ не является квазиконформным в среднем.

Теорема доказана.

Литература

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. *Щербаков Е. А.* Гомеоморфные решения одной вырождающейся эллиптической системы // Известия ВУЗов. Математика. 1976. №10 (173). С. 93–96.
3. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М: Мир, 1969. 133 с.
4. *Bojarski B.* Homeomorphic solutions of Beltrami systems // Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 1955. №102. P. 661–664.
5. *Bojarski B.* Generalised suolutions of PDE system of the first order and elliptic type with discontinuosus coefficients // Mat. Sb. 1957. №43. P. 451–503.
6. *Astala K, Iwaniec T, Martin G.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. Princeton University press, 2009. 696 pp.
7. *Малаксиано Н. А.* О точных вложениях классов Геринга в классы Макенхаупта // Математические заметки. 2011. Т. 70. Вып. 5. С. 742–750.
8. *Stredulinsky E. W.* Weighted inequalition and Degenerate Elliptic partial Differential Equations, Lachtes Notes in Mathematics Sprienger., 1984, No. 1074. 143 pp.
9. *Митюк И. П., Шеретов В. Г., Щербаков Е. А.* Плоские квазиконформные отображения. Краснодар: Изд-во КубГУ, 1979. 84 с.
10. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 471 с.
11. *Миклюков В., Кругликов В.* О некоторых классах топологических отображений с неограниченными характеристиками // Метр. вопросы теории функций и отображений. Киев, Наукова думка. 1973. Вып. 4. С. 102–104.
12. *Михайлов А. П.* О проблеме отображений, являющихся решением эллиптических систем, вырождающихся на границе // Сибирс. Мат. Журнал. 1983. Т. 24. №3. С. 119–127.
13. *Lehto O.* Remarks on generalized Beltrami equations and conformal mappings. Proceedings of the Romanian-Finnish Seminar on Teichmuller Spaces and Quasiconformal Mappings, Brasov, 1969 // Publ. House of the Acad. of the Socialist Republic of Romania, Bucharest. 1971. P. 203–214.
14. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. 1957. Т. 43 (85). №4. С. 454–503.
15. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., ВИНИТИ. 1983. №21. С. 42–129.
16. *Coifman R. R., Fefferman C.* Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Stud. Math. (PRL), 1974. Vol. 15. No. 3. P. 241–250 (РЖМат 1975Б 4Б63).

Ключевые слова: сопряженное (нелинейное) уравнение Бельтрами, вырождающиеся эллиптические уравнения, класс Макенхаупта, весовые соболевские пространства, теоремы вложения, ограниченные сингулярные операторы в весовых пространствах, квазиконформные отображения.

Статья поступила 10 марта 2012 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар