

УДК 532.516

ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ РЕЖИМАМИ ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИФУРКАЦИЙ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА¹*Алексеев А. А.²*

TRANSITIONS BETWEEN DIFFERENT STATES OF FLOW NEAR CODIMENSION-2 BIFURCATION POINTS IN THE COUETTE-TAYLOR PROBLEM

Alexeev A. A.

Regimes of flow between two concentric rotating cylinders are investigated using codimension-2 bifurcation theory. The intersection of monotonic and oscillating instabilities is considered. Schemes of transitions between secondary flows are presented. The results of investigation are in a good agreement with known experimental studies.

Keywords: the Couette-Taylor problem, codimension-2 bifurcation, amplitude equations.

Введение

Задача Куэтта-Тейлора является одной из классических задач гидродинамики и долгое время остается удобным объектом для наблюдения переходов между режимами течения жидкости вплоть до развития турбулентности. Обзор теоретических и экспериментальных работ, касающихся развития вторичных, третичных и т.д. режимов течения можно найти, например, в [1]. Известно, что первая потеря устойчивости основного режима происходит с рождением вторичного стационарного либо колебательного режима. Появлению каждого из этих режимов соответствует некоторая нейтральная кривая в плоскости параметров. Нейтральные кривые, соответствующие появлению разных режимов, могут иметь точки пересечения. Для исследования режимов движения в окрестности точек пересечения нейтральных кривых (точек бифуркации коразмерности-2) в работах [2, 3] была построена теория бифуркаций коразмерности 2 для задач с цилиндрической симметрией. Основной объект такого исследования — система амплитудных уравнений, являющаяся обобщением известного амплитудного уравнения Ландау. Как было показано в [4], для различных точек пе-

ресечения бифуркаций амплитудные системы могут иметь различный вид. А именно, в них могут присутствовать либо отсутствовать дополнительные («резонансные») слагаемые. В работах [2, 3] исследован случай, который в последующих работах (начиная с [4]) называется случаем «основного резонанса». В настоящей работе исследуются переходы между режимами течения, соответствующие нерезонансной ситуации (когда амплитудная система не содержит дополнительных слагаемых) при пересечении бифуркаций рождения вихрей Тейлора и азимутальных волн.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными соосными цилиндрами радиусов r_1, r_2 (см. рис. 1).

Цилиндры вращаются независимо друг от друга с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 соответственно. Используя цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль оси цилиндров, безразмерные уравнения движения (уравнения Навье-Стокса) можно записать в следующем виде:

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (12-01-31262 мол_а), ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России» на 2007–2013гг. (16.516.11.6106) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013гг. (14.740.11.0877).

²Алексеев Александр Александрович, ассистент кафедры вычислительной математики и математической физики Южного федерального университета; e-mail: alxv@bk.ru.

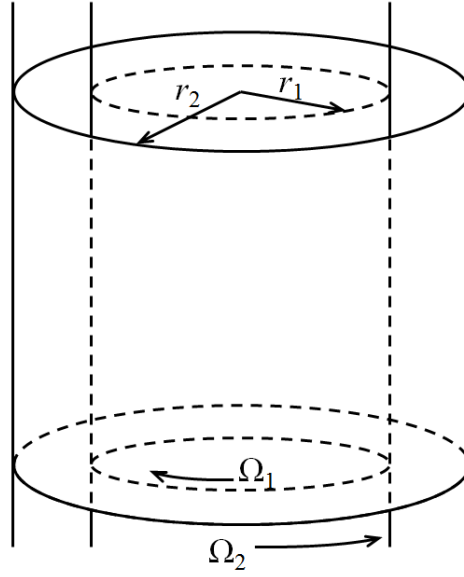


Рис. 1. Геометрия задачи Куэтта-Тейлора

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{A}\mathbf{v} = -\nabla p - \text{Re}_1 \mathbf{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты, $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ — скорость течения, p — давление, $\text{Re}_1 = \Omega_1 r_1^2 d^2 / \nu$ — число Рейнольдса, ν — кинематический коэффициент вязкости, $d = \eta - 1$ — безразмерный зазор между цилиндрами, $\eta = r_2 / r_1$ — отношение радиусов цилиндров. Линейный оператор \mathbf{A} и нелинейный оператор \mathbf{L} определяются следующими дифференциальными выражениями:

$$(Av)_r = -\Delta v_r + \frac{v_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta},$$

$$(Av)_\theta = -\Delta v_\theta + \frac{v_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta},$$

$$(Av)_z = -\Delta v_z,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$(L(v, u))_r = v_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{v_\theta u_\theta}{r},$$

$$(L(v, u))_\theta = v_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta u_r}{r},$$

$$(L(v, u))_z = v_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\nabla = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

На стенках цилиндров задается условие прилипания:

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\theta = 1/(\eta - 1),$$

$$r = 1/(\eta - 1),$$

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\theta = \Omega \eta / (\eta - 1),$$

$$r = \eta / (\eta - 1),$$

где $\Omega = \Omega_2 / \Omega_1$ — отношение угловых скоростей вращения цилиндров.

Будем рассматривать течения с периодическими по z полями скорости и давления с заданным периодом $2\pi/\alpha$. Заметим, что требование периодичности играет здесь роль «осевого краевого условия».

Система (1.1) обладает группой симметрии $G = SO(2) \times O(2)$ — она инвариантна относительно вращений L_θ^δ , трансляций L_z^h и отражения J , действующих на поле скорости по правилам:

$$(L_\theta^\delta \mathbf{v})(t, r, \theta, z) = \mathbf{v}(t, r, \theta + \delta, z),$$

$$(L_z^h \mathbf{v})(t, r, \theta, z) = \mathbf{v}(t, r, \theta, z + h),$$

$$(J\mathbf{v})(t, r, \theta, z) =$$

$$= (v_r(t, r, \theta, -z), v_\theta(t, r, \theta, -z), -v_z(t, r, \theta, -z))$$

для любых вещественных δ и h .

При всех значениях параметров система имеет точное решение с вектором скорости $\mathbf{v}_0(r) = (0, v_{0\theta}(r), 0)$ — течение Куэтта. Здесь

$$v_{0\theta} = ar + b/r,$$

$$a = \frac{\Omega \eta^2 - 1}{\eta^2 - 1}, \quad b = -\frac{(\Omega - 1)\eta^2}{(\eta^2 - 1)d^2}.$$

В экспериментах течение Куэтта наблюдается лишь при малых скоростях вращения цилиндров. С увеличением значения числа Рейнольдса течение Куэтта теряет устойчивость с рождением вторичного стационарного либо колебательного режима.

2. Режимы течения при пересечении бифуркаций

Потере устойчивости течения Куэтта и появлению вторичного режима соответствует некоторая нейтральная кривая в плоскости параметров $(\text{Re}_2, \text{Re}_1)$. Здесь Re_1 и $\text{Re}_2 = \Omega_2 r_2^2 d^2 / \nu$ — числа Рейнольдса, связанные с вращением внутреннего и внешнего цилиндра соответственно. Нейтральные кривые, соответствующие монотонной и колебательной потере устойчивости, могут иметь точки пересечения. Это относится к ситуации, когда в спектре устойчивости течения Куэтта содержатся ноль и пара чисто мнимых собственных значений.

Пусть $(\text{Re}_{2*}, \text{Re}_{1*})$ — точка пересечения нейтральных кривых. В [2] было показано, что в её малой окрестности, которая задаётся равенствами $\text{Re}_2 = \text{Re}_{2*} + k_2 \varepsilon^2$, $\text{Re}_1 = \text{Re}_{1*} + k_1 \varepsilon^2$ (k_1, k_2 — параметры надкритичности, ε — малый параметр), решение исходной задачи (1.1) можно искать в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon(\Phi + \Phi^*) + \dots,$$

$$\Phi = \xi_{0k}(\tau)\Phi_{0k} + \xi_{nl+}(\tau)\Phi_{nl+} + \xi_{nl-}(\tau)\Phi_{nl-},$$

где \mathbf{v}_0 — вектор скорости течения Куэтта при критических значениях параметров, $\xi_{0k}, \xi_{nl+}, \xi_{nl-}$ — неизвестные комплексные амплитуды, зависящие от медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$, а $\Phi_{0k}, \Phi_{nl+}, \Phi_{nl-}$ — собственные решения линеаризованной задачи устойчивости:

$$\Phi_{0k} = e^{-ik\alpha z} \varphi_{0k}(r),$$

$$\Phi_{nl+} = e^{i(\omega_n t - (n\theta + l\alpha z))} \varphi_{nl+}(r),$$

$$\Phi_{nl-} = e^{i(\omega_n t - (n\theta - l\alpha z))} \varphi_{nl-}(r) = J\Phi_{nl+}.$$

Если при этом ($k \neq l$), то комплексные амплитуды удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\xi}_{0k} = \xi_{0k}(\sigma + A|\xi_{0k}|^2 + B|\xi_{nl+}|^2 + B^*|\xi_{nl-}|^2),$$

$$\dot{\xi}_{nl+} = \xi_{nl+} \times$$

$$\times (\mu + D|\xi_{0k}|^2 + E|\xi_{nl+}|^2 + F|\xi_{nl-}|^2), \quad (2.1)$$

$$\dot{\xi}_{nl-} = \xi_{nl-}(\mu + D|\xi_{0k}|^2 + F|\xi_{nl+}|^2 + E|\xi_{nl-}|^2).$$

Ранее [5,6] была исследована аналогичная система амплитудных уравнений, но содержащая по одному дополнительному слагаемому в каждом уравнении. Эта система соответствовала случаю пересечения монотонной и колебательной неустойчивости в случае, когда $k = l$.

Коэффициенты системы (2.1) выражаются через собственные решения линеаризованной задачи устойчивости (нейтральные моды), собственные решения сопряженной задачи и решения линейных неоднородных задач, правые части которых зависят от нейтральных мод. Коэффициенты σ, μ зависят также от параметров надкритичности, что позволяет при исследовании системы считать их свободными параметрами. Систему (2.1) удобно исследовать, перейдя к дифференциальным уравнениям для модулей комплексных амплитуд — «моторной подсистеме»:

$$\dot{\rho}_{0k} = \rho_{0k}(\sigma + A\rho_{0k}^2 + B_r(\rho_{nl+}^2 + \rho_{nl-}^2)),$$

$$\dot{\rho}_{nl+} = \rho_{nl+} \times$$

$$\times (\mu_r + D_r\rho_{0k}^2 + E_r\rho_{nl+}^2 + F_r\rho_{nl-}^2), \quad (2.2)$$

$$\dot{\rho}_{nl-} = \rho_{nl-}(\mu_r + D_r\rho_{0k}^2 + F_r\rho_{nl+}^2 + E_r\rho_{nl-}^2).$$

Равновесиям моторной подсистемы (2.2) соответствуют стационарные и периодические режимы движения исходной системы Навье-Стокса. Эти режимы могут быть как инверсионно-симметричными (вихри Тейлора, азимутальные волны, смешанные азимутальные волны), так и существующими инверсионно-связанными парами (спиральные волны, смешанные спиральные волны). Простейшие режимы движения и соответствующие им равновесия моторной подсистемы перечислены в таблице.

На рис. 2 показаны поверхности уровня азимутальной компоненты завихренности ($W_\theta = \partial_z v_r - \partial_r v_z$) для каждого из режимов, а также возможные варианты переходов между ними в окрестности точек пересечения нейтральных кривых (черные и белые стрелки соответствуют динамике в окрестности различных точек).

Формулы для равновесий системы, условия их существования и устойчивости, а также выражения для соответствующих полей скорости приведены в работе [7]. Настоящая статья посвящена численному исследо-

Режимы движения, отвечающие равновесиям системы (2.2).

Течение/модули амплитуд	$ \xi_{0k} $	$ \xi_{nl+} $	$ \xi_{nl-} $
течение Куэтта (COU)	0	0	0
вихри Тейлора (TV)	ρ_{0k}	0	0
спиральные волны (SW)	0	ρ_{nl}	0
—//—	0	0	ρ_{nl}
азимутальные волны (AW)	0	ρ_{nl}	ρ_{nl}
смешанные спиральные волны (MSW)	ρ_{0k}	ρ_{nl}	0
—//—	ρ_{0k}	0	ρ_{nl}
смешанные азимутальные волны (MAW)	ρ_{0k}	ρ_{nl}	ρ_{nl}

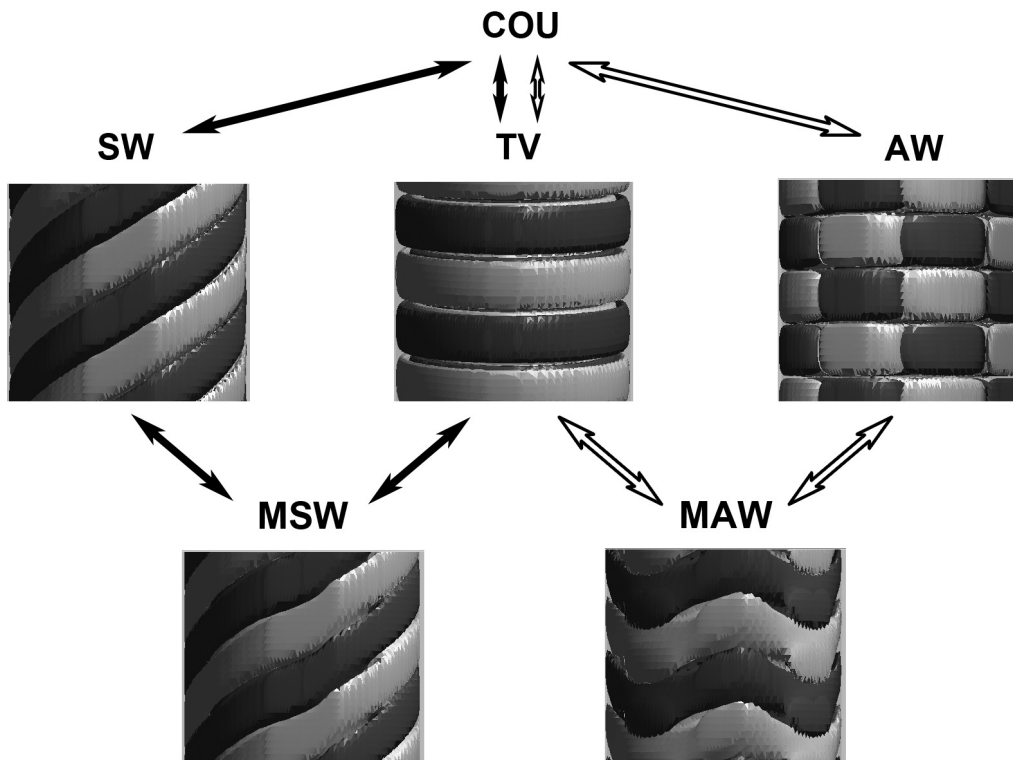


Рис. 2. Режимы движения жидкости и возможные варианты переходов между ними. На рисунках показаны поверхности уровня азимутальной компоненты завихренности $W_\theta = \partial_z v_r - \partial_r v_z$ каждого из описанных режимов.

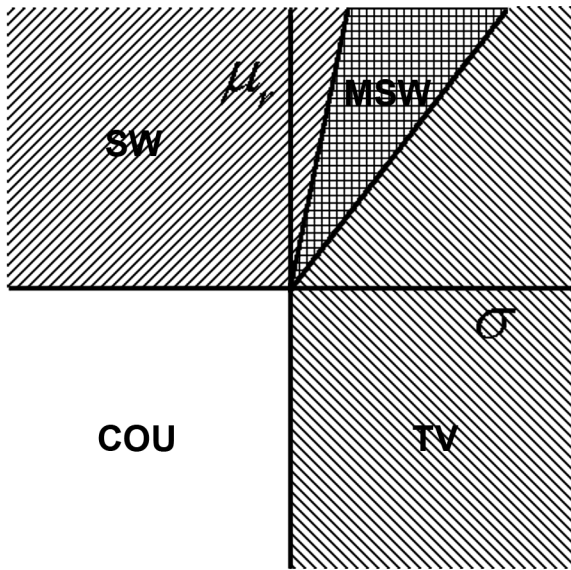


Рис. 3. Режимы движения при обходе точек пересечения бифуркаций при $\Omega > 0, k > l$.

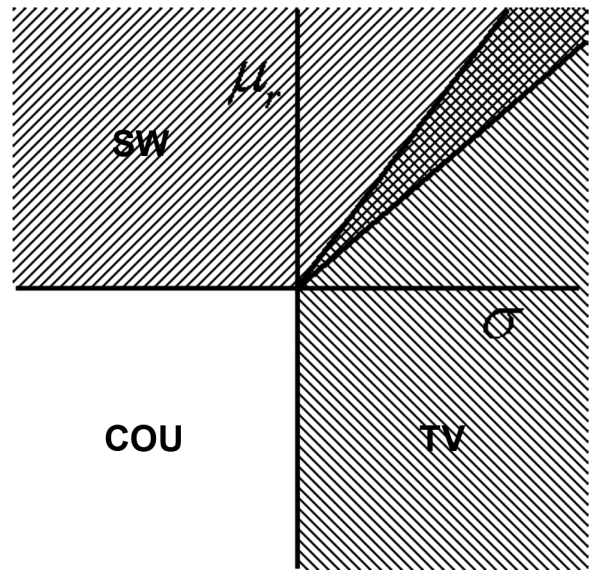


Рис. 4. Режимы движения при обходе точек пересечения бифуркаций при $\Omega > 0, k < l$.

ванию переходов между различными режимами при обходе точки пересечения бифуркаций.

3. Численные результаты

Численное исследование режимов движения в окрестности точек пересечения бифуркаций включает в себя расчет нейтральных кривых, поиск точек пересечения, вычисление коэффициентов амплитудных уравнений и расчет полей скорости, соответствующих различным равновесиям моторной подсистемы, при различных значениях параметров надкритичности.

Алгоритм расчета точек пересечения бифуркаций и коэффициентов системы амплитудных уравнений описан в [7]. Для вычисления коэффициентов использовался пакет программ, составленный С.Н. Овчинниковой.

Для численного исследования было выбрано отношение радиусов $r_1/r_2 = 0,883$, что соответствует экспериментальному исследованию [8]. Азимутальное квантовое число m полагалось равным нулю, а n принимало значения от 1 до 4. Аксиальные квантовые числа k и l , а также волновое число α выбирались таким образом, чтобы точки пересечения нейтральных кривых находились вблизи кривой первой потери устойчивости. Рас-

смотренные значения k, l, α покрывают диапазон $1 \leq k\alpha, l\alpha \leq 10$.

Расчеты показывают, что в окрестности различных точек пересечения бифуркаций может существовать и быть устойчивым либо один из вторичных режимов, либо вихри Тейлора вместе со спиральными (или азимутальными) волнами. Спиральные волны и азимутальные волны в окрестности одной и той же точки не могут существовать и быть устойчивыми, что согласуется с результатами работы [7].

Схема переходов между режимами в случае цилиндров, вращающихся в одну сторону, показана на рис. 3, 4. Переход через ось σ соответствует переходу через нейтральную кривую рождения вихрей Тейлора, ось μ_r — через нейтральную кривую рождения спиральных волн. Если аксиальное волновое число k больше l , то переход от вихрей Тейлора к спиральным волнам и обратно происходит через смешанные спиральные волны. Соответствующая последовательность режимов показана на рис. 2 — переходы, отмеченные черными стрелками. В случае, когда $k < l$, области существования и устойчивости вихрей Тейлора и спиральных волн перекрываются. Следовательно, в экспериментах при соответствующих значениях параметров могут наблюдаться гистерезисные явления. Такие же картины переходов выявлены, если цилиндры вращаются в противополо-

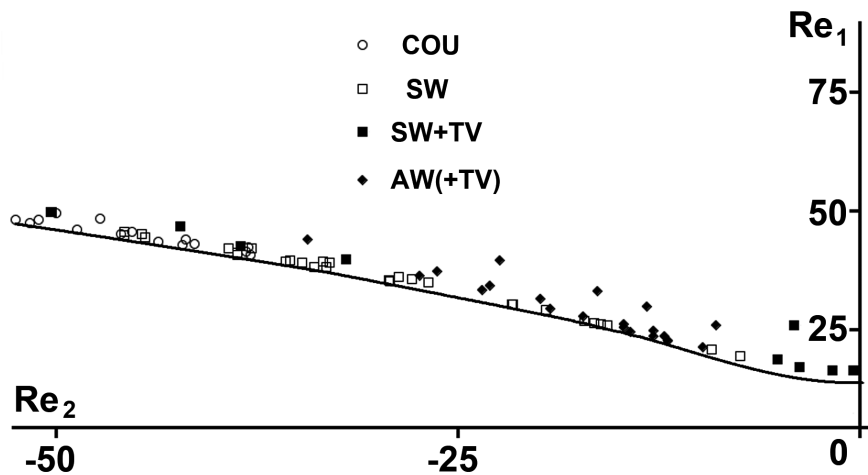


Рис. 5. Точки пересечения бифуркаций и существующие в их окрестности режимы движения при $m = 0, n = 2$. Сплошной линией показана нейтральная кривая, соответствующая первой потере устойчивости основного течения.

ложные стороны, но отношение их угловых скоростей мало. Отметим, что в случае цилиндров, вращающихся в одну сторону, нет областей существования устойчивых азимутальных волн, по крайней мере, в рассмотренном диапазоне параметров.

В случае, когда цилиндры вращаются в противоположные стороны, возможно появление всех описанных режимов. На рис. 5 показана серия точек пересечения нейтральных кривых, вычисленных для $m = 0, n = 2$ и различных значений параметров k, l, α , в плоскости чисел Рейнольдса Re_2, Re_1 . Пустыми квадратами показаны точки, в окрестности которых существуют устойчивые спиральные волны, заполненными квадратами — спиральные волны и вихри Тейлора (при этом переход между ними осуществляется через смешанные спиральные волны, аналогично показанному на рис. 3), ромбами — точки, в окрестности которых существуют азимутальные волны и, быть может, вихри Тейлора (причём эти два режима разделены областью существования устойчивых смешанных азимутальных волн — переходы, отмеченные белыми стрелками на рис. 2). Видно, что вблизи оси Re_1 (отношение угловых скоростей мало) при потере устойчивости основного течения возможно появление вихрей Тейлора либо спиральных волн. Чуть далее вдоль кривой первой потери устойчивости (сплошная линия) расположена область существования устойчивых азимутальных волн, которая при дальнейшем увеличении Re_2 смещается выше, уступая место спиральным волнам. Пустыми кружками отме-

чены точки, в окрестности которых не существует устойчивых режимов с заданными параметрами (кроме, разумеется, течения Куэтта в докритической области). Подобная (но слегка смещенная) картина наблюдается и для значений параметра $n = 1, 3, 4$. Полученные результаты качественно согласуются с экспериментом [8].

Заключение

Исследованы переходы между режимами движения жидкости в окрестности точек пересечения монотонной и колебательной неустойчивости в нерезонансном случае. Показано, что в зависимости от значений параметров задачи в окрестности таких точек могут существовать различные комбинации устойчивых вторичных режимов — вихрей Тейлора, спиральных волн, азимутальных волн. При этом переход между вихрями Тейлора и спиральными (либо азимутальными) волнами может происходить как «скачком», так и через некоторый смешанный режим — устойчивые смешанные спиральные (либо азимутальные) волны. Также в плоскости параметров существуют точки, в окрестности которых не существует устойчивых режимов со значениями волновых чисел, использованными в наших расчетах. Заметим, что анализ устойчивости найденных режимов относительно возмущений, нарушающих заданную периодичность, не проводился.

Автор выражает признательность научному руководителю доценту И.В. Морш-

невой и доценту С.Н. Овчинниковой за полезные обсуждения и советы.

Литература

1. Tagg R. The Couette-Taylor problem // *Nonlinear Sci Today*. 1994. No. 4: P. 1–25.
2. Юдович В. И. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннот. докладов 6-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. Ташкент: Фан, 1986. С. 661.
3. Iooss G., Chossat P. The Couette-Taylor problem. New-York: Springer-Verlag, 1994. 233 p.
4. Yudovich V. I., Ovchinnikova S. N. Resonances in the intersections of bifurcations in the Couette-Taylor problem // *Patterns and Waves*, Saint-Petersburg, 2003. P. 55–77.
5. Колесов В. В., Юдович В. И. Расчет колебательных режимов в течении Куэтта вблизи точки пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн // *Изв. РАН, МЖГ*, 1998. №4. С. 81–93.
6. Колесов В. В., Хоперский А. Г. Неизотермическая проблема Куэтта-Тейлора. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009. 192 с.
7. Алексеев А. А., Моршнева И. В. Пересечение бифуркаций рождения вихрей Тейлора и азимутальных волн в задаче Куэтта-Тейлора в нерезонансном случае // *Изв. Вузов. Сев.-Кав. регион. Естественные науки*, 2010. №5. С. 34–38.
8. Andereck C. D., Liu S. S., Swinney H. L. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders // *J. Fluid Mech*, 1986. Vol. 164. P. 155–183.

Ключевые слова: задача Куэтта-Тейлора, пересечение бифуркаций, вторичный режим, амплитудные уравнения.

Статья поступила 25 мая 2012 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
© Алексеев А. А., 2012