УДК 539.3

МЕТОД БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ ГЛАДКИХ ГРАНИЦ[1]

Бабешко В. А.[2], Колесников М. Н.[3], Кашков Е. В.[4], Лозовой В. В.[5], Плужник А. В.[6], Телятников И. С.[7], Иванов П. Б.[8], Шестопалов В. Л.[9], Шишкин А. А.[10], Гладской И. Б.[11]

THE BLOCK ELEMENT METHOD FOR THE SMOOTH BOUNDARY

Babeshko V. A., Kolesnikov M. H., Kashkov E. V., Lozovoi V. V., Pluzhnik A. V., Telatnikov I. S., Ivanov P. B., Shestopalov V. L., Shishkin A. A., Gladskoy I. B.

This work describes the usage of block elements method for solving the boundary value problem in the convex domain having the smooth boundary. It is showed that applying the block elements with special spherical boundary gives possibility to approach the boundary of the domain and to build the approach solution.

Keywords: block element method, boundary value problem, automorphism, pseudo differential equation, complicated dampen.

Строится алгоритм, позволяющий исследовать и решать методом блочного элемента граничные задачи в областях с гладкой границей, более точно учитываяющий форму области, чем другие подходы. Ранее в работах [1–5] построены блочные элементы с плоскими границами, удобные для применения в областях, имеющих участки плоских границ. Однако участки границ, имеющие отличную от нуля кривизну, уже неудобно описывать такими блочными элементами. В этих случаях приходится измельчать разбиение границы, увеличивать число локальных координат, т.к. требуется уплощение окрестностей их начал, и тем самым усложнять решение задачи [5]. Для преодоления подобных проблем в случаях тел с гладкими границами оказывается более удобным использовать подходящие блочные элементы с неплоской, специальной сферической, границей [6]. Ни-

[1]Работа выполнена в соответствии с Соглашением № 14.B37.21.0869 от 6 сентября 2012 г. с Министерством образования и науки РФ.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

[3]Колесников Максим Николаевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; kmm@fpm.kubsu.ru.

[4]Кашков Евгений Вениаминович, инженер-исследователь Южного научного центра РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[5]Лозовой Виктор Викторович, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: niva_kgu@mail.ru.

[6]Плужник Андрей Валерьевич, научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[7]Телятников Илья Сергеевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

[8]Иванов Павел Борисович, заместитель начальника ГУ МЧС по Краснодарскому краю; e-mail: ivanov_p@rambler.ru.

[9]Шестопалов Валерий Леонидович, канд. техн. наук, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН; e-mail: vlshestopalov@gmail.com.

[10]Шишкин Алексей Александрович, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

[11]Гладской Игорь Борисович, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: i.glad@list.ru.

же это показано на примере выпуклых областей с гладкой границей.

Задачи такого рода возникают при исследованиях в области сейсмологии, теории прочности и разрушения объектов, движении обтекаемых тел.

1. Будем считать, что выпуклая область Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega$ с положительной кривизной. Рассмотрим в этой области граничную задачу для уравнения Гельмгольца вида

$$(\Delta + k_1^2)\psi = 0. \qquad (1)$$

В сферической системе координат θ, φ, r уравнение (1) имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \\ + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \qquad (2)$$
$$r, \theta, \varphi \in \Omega_1.$$

При этом могут быть заданы граничные условия как Дирихле, так и Неймана [7]. Если область является шаром радиуса b, решение строится путем построения одного блочного элемента следующим образом. Вводится система операторов вида

$$\mathbf{B}_2(l,m)g = \\ = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta,\varphi)Y_l^{m-}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = G(l,m),$$

$$\mathbf{B}_2^{-1}(\theta,\varphi)G = \\ = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} G(l,m)Y_l^{m+}(\theta,\varphi) = g(\theta,\varphi),$$

$$\mathbf{B}_3(\lambda,l,m)g = \\ = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta,\varphi)J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)Y_l^{m-}(\theta,\varphi)\times \\ \times \sin\theta d\theta d\varphi r dr = G(\lambda,l,m), \qquad (3)$$

$$\mathbf{B}_3^{-1}(r,\theta,\varphi)G = \\ = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int_0^{\infty} G(\lambda,l,m)J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\times \\ \times Y_l^{m+}(\theta,\varphi)\lambda d\lambda = g(r,\theta,\varphi).$$

Здесь $J_\nu(\lambda r)$ — функция Бесселя, $Y_l^m(\theta,\psi)$ — сферическая функция

$$Y_l^{m\pm}(\theta,\varphi) = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}.$$

Применением к уравнению (1) преобразования (3), строится внешняя форма [6, 7], которая принимает вид

$$\omega = Pb^2\sin\theta d\theta\wedge d\varphi + Qbdr\wedge d\theta + Rb\sin\theta d\varphi\wedge dr,$$

где P, Q, R — некоторые функции.

Функциональное уравнение рассматриваемой задачи представимо в форме [6, 7]

$$K(\lambda)\Psi(l,m,\lambda) = \int_{\partial\Omega}\omega, \quad K(\lambda) = \lambda^2 - k_1^2. \qquad (4)$$

Здесь в случае шара имеем

$$(\lambda^2 - k_1^2)\Psi(l,m,\lambda) = L_{lm}(\lambda),$$
$$L_{lm}(\lambda) = b^2\psi'_{lm}(b)T_{lm}(\lambda,b) - b^2\psi_{lm}(b)T'_{lm}(\lambda,b),$$
$$\psi_{lm}(r) = \mathbf{B}_2(l,m)\psi(r,\theta,\varphi),$$
$$T_{lm}(\lambda,r) = \frac{1}{\sqrt{r}}J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r).$$

Для обеспечения автоморфизма и получения псевдодифференциального уравнения строится представление решения граничной задачи в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \mathbf{B}_3^{-1}(r,\theta,\varphi)\frac{L_{lm}(\lambda)}{(\lambda^2 - k_1^2)}.$$

Требование автоморфизма состоит в выполнении равенства [6, 7]

$$\psi(r,\theta,\varphi) = 0, \quad r > b.$$

В результате несложных преобразований для рассматриваемой задачи получается псевдодифференциальное уравнение, вырождающееся в алгебрагическое,

$$L_{lm}(k_1) = 0. \qquad (5)$$

В случае задания на границе $\partial\Omega$ условий Дирихле вида

$$\psi(r,\theta,\varphi)|_{r=b} = \psi_0(b,\theta,\varphi) \qquad (6)$$

решение псевдодифференциального уравнения (5) получается в форме

$$\psi'_{lm}(b) = \frac{\psi_{lm0}(b)T'_{lm}(k_1,b)}{T_{lm}(k_1,b)}.$$

Здесь принято обозначение

$$\psi_{lm0}(b) = \mathbf{B}_2(l,m)\psi_0(b,\theta,\varphi)$$

Тот же алгоритм применяется при решении задачи с граничным условием Неймана. В этом случае вместо граничного условия (6) задается условие

$$\left.\frac{\partial\psi(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=b} = \psi_1(b,\theta,\varphi).$$

Решение псевдодифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$\psi_{lm}(b) = \frac{\psi'_{lm1}(b)T_{lm}(k_1,b)}{T'_{lm}(k_1,b)},$$

где

$$\psi_{lm1}(b) = \mathbf{B}_2(l,m)\psi_1(b,\theta,\varphi).$$

Если заданная область не является шаровой, то для исследования граничной задачи в такой области можно применить следующий подход. Построенный выше блочный элемент для шара, который можно вписать в область Ω, «наращивается» в этой области путем «приклеивания» к нему блочных элементов, построенных в [6], до достижения границ области Ω. Подбор указанных блочных элементов необходимо осуществлять таким образом, чтобы граница $\partial\Omega$ была бы аппроксимирована как можно точнее.

Используемые для этих целей блочные элементы строятся следующим образом. Рассматриваются два шара радиусами A и B, $A < B$ в декартовой системе координат с центрами на оси oz. Они занимают области Ω_1 и Ω_2 пространства R^3 соответственно. Расстояние между центрами равно h. Обозначим через Ω_3 область пересечения шаров, т.е.

$$\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Следуя алгоритму применения дифференциального метода факторизации [6], введем две сферические системы координат с началами в центрах шаров на оси z исходной декартовой системы координат с параметрами r, θ, φ и ρ, γ, σ в областях Ω_1, Ω_2 соответственно. Эти системы координат обеспечивают касательное расслоение границы для выбранного многообразия с краем. Применяя к уравнению (1) преобразования (3), построим внешнюю форму [6], которая в координатах r, θ, φ принимает вид

$$\omega = g\Big\langle \left[\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - im\psi\right] r dr\wedge d\theta - \\ - \left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \psi\frac{\partial P_l^{|m|}(\cos\theta)}{\partial\theta}\left\{P_l^{|m|}(\cos\theta)\right\}^{-1}\right]\times \\ \times r\sin\theta dr\wedge d\varphi + \\ + \left[\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial r^{-0,5}J^{(}_{l+0,5}\lambda r)}{\partial r}\left\{r^{-0,5}J^{(}_{l+0,5}\lambda r)\right\}^{-1}\right]\times \\ \times r^2\sin\theta d\theta\wedge d\varphi\Big\rangle,$$

$$g(\theta,\varphi,r) = Y_l^{m+}(\theta,\varphi)r^{-0,5}J_{l+0,5}(\lambda r).$$

Аналогичный вид имеет форма в системе ρ, γ, σ.

Осуществим переход к функциональному уравнению. Последнее представимо в форме [4–6]

$$K(\lambda)\Psi(l,m,\lambda) = \int\limits_{\partial\Omega}\omega, \quad K(\lambda) = \lambda^2 - k^2. \quad (7)$$

Построим блочный элемент для граничной задачи в области

$$\Omega_3 = \Omega_2 \backslash \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad h < A < B < h + A,$$

т.е. в дополнении к пересечению $\Omega_1 \cap \Omega_2$ в Ω_2, при этом центры шаров находятся вне области Ω_3.

Обозначим границу рассматриваемого тела в виде $\partial\Omega_3 = \partial\Omega_{10} \cup \partial\Omega_{20}$, где $\partial\Omega_{10}$ представляет собой поверхность сферы радиуса A границы $\partial\Omega_3$, а $\partial\Omega_{20}$ — поверхность сферы радиуса B указанной границы. Преобразуем правую часть в (5), положив

$$\int\limits_{\partial\Omega_3}\omega = \int\limits_{\partial\Omega_{10}}\omega_{2k-1} + \int\limits_{\partial\Omega_{20}}\omega_{2k} \quad k = 1,2. \quad (8)$$

Ради сокращения записи граничные значения решений на этих границах везде будут обозначаться ψ_1, ψ_2 соответственно, хотя их численные значения для различных граничных задач являются разными.

Для рассматриваемого случая значения внешней формы на границах принимают вид

$$\omega_1 = g_1\Big(r^{-0,5}H^{(1)}_{l+0,5}(\lambda r)\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \\ - \psi_1\frac{\partial r^{-0,5}H^{(1)}_{l+0,5}(\lambda r)}{\partial r}\Big)A^2\sin\theta d\theta\wedge d\varphi,$$

$$\omega_2 = g_2\left(f_2^{\rho}\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho} - \psi_2\frac{\partial f_2^{\rho}}{\partial\rho}\right)B^2\sin\gamma d\gamma\wedge d\sigma,$$

$$\omega_3 = g_1\left(f_1^{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \psi_1\frac{\partial f_1^{r}}{\partial r}\right)A^2\sin\theta d\theta\wedge d\varphi,$$

$$\omega_4 = g_2\Big(\rho^{-0,5}J_{l+0,5}(\lambda\rho)\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho} - \\ - \psi_2\frac{\partial\rho^{-0,5}J_{l+0,5}(\lambda\rho)}{\partial\rho}\Big)B^2\sin\gamma d\gamma\wedge d\sigma,$$

$$g_1(\theta,\varphi,l,m) = Y_l^{m-}(\theta,\varphi),$$

$$g_2(\gamma,\sigma,s,n) = Y_s^{n-}(\gamma,\sigma),$$

$$f_1(r,\theta,l,\lambda) = \Gamma(l+0,5)\times \\ \times\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^k s_q(r)(l+0,5+t)\cos^q(\pi-\theta)\times \\ \times C_t^{l+0,5}\left[\cos(\pi-\theta)\right]J_{l+0,5+t}(\lambda r)J_{l+0,5+t}(\lambda h),$$

$$f_2(r,\theta,l,\lambda) = \Gamma(l+0,5)\times \\ \times\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^k s_q(r)(l+0,5+t)\cos^q(\pi-\theta)\times \\ \times C_t^{l+0,5}\left[\cos(\pi-\theta)\right]H^{(1)}_{l+0,5+t}(\lambda r)J_{l+0,5+t}(\lambda h),$$

$$f_\nu(r,\theta,l,\lambda)\equiv f_\nu^r,\quad f_\nu(\rho,\gamma,s,\tau)\equiv f_\nu^\rho$$

$$(\nu = 1,\ 2),$$

$$s_q(r)\equiv s_q(r,l,\lambda) = \frac{(-1)^q\Gamma(l+1+0,5)}{q!\Gamma(l+0,5-q+1)}\times \\ \times\left(\frac{4}{\lambda\sqrt{r^2+h^2}}\right)^{\nu}\left(\frac{2rh}{r^2+h^2}\right)^{q-l+0,5}.$$

Требование автоморфизма [8] приводит к следующим псевдодифференциальным уравнениям

$$\mathbf{B}_{21}^{-1}(\theta,\varphi)\Bigg[\left(r^{-0,5}H^{(1)}_{l+0,5}(kr)\right)^{-1}\times \\ \times\Bigg\{\int_0^{2\pi}\int_{\pi}^{\pi-\theta_0} g_1\Big\langle r^{-0,5}H^{(1)}_{l+0,5}(kr)\times \\ \times\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \psi_1\frac{\partial r^{-0,5}H^{(1)}_{l+0,5}(kr)}{\partial r}\Big\rangle A^2\sin\theta d\theta d\varphi + \\ + \int_0^{2\pi}\int_{\gamma_0}^{\pi} g_2(\gamma,\sigma,l,m)\Big\langle f_2(\rho,\gamma,l,k)\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho} - \\ - \psi_2\frac{\partial f_2(\rho,\gamma,l,k)}{\partial\rho}\Big\rangle B^2\sin\gamma d\gamma d\sigma\Bigg\}\Bigg] = 0,$$

$$r = A,\quad \rho = B,\quad \theta,\varphi\in\partial\Omega_{10};$$

$$\mathbf{B}_{21}^{-1}(\gamma,\sigma)\Bigg[\left(\rho^{-0,5}J_{l+0,5}(k\rho)\right)^{-1}\times \\ \times\Bigg\{\int_0^{2\pi}\int_{\gamma_0}^{\pi} g_1\Big\langle\rho^{-0,5}J_{l+0,5}(k\rho)\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho} - \\ - \psi_2\frac{\partial\rho^{-0,5}J_{l+0,5}(k\rho)}{\partial\rho}\Big\rangle B^2\sin\gamma d\gamma d\sigma + \\ + \int_0^{2\pi}\int_{\pi}^{\pi-\theta_0} g_1(\theta,\varphi,s,n)\Big\langle(f_1(r,\theta,s,k)\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \\ - \psi_1\frac{\partial f_1(r,\theta,s,k)}{\partial r})\Big\rangle A^2\sin\theta d\theta d\varphi\Bigg\}\Bigg] = 0,$$

$$\gamma,\sigma\in\partial\Omega_{20},$$

$$\theta_0 = \arccos\frac{B^2-A^2-h^2}{2Ah},$$

$$\gamma_0 = \arccos\frac{A^2-B^2-h^2}{2Bh}.$$

Сечение области Ω_3 плоскостью, проходящей через центры шаров, имеет серповидную форму. Выбирая радиус A равным ралиусу вписанного в область Ω шара, получим его наращивание построенным блочным элементом.

Продолжая этот процесс дальше, подбирая блочные элементы по радиусу вогнутой части его границы, «приклеивая» их к растущему шару, получим приближенное представление области Ω с достаточно гладкой границей.

Построенные блочные элементы должны быть сопряжены между собой в соответствии с алгоритмом, изложенным в [9–12]. В том случае, если на границах сопряжения окажутся трещины или включения, соответствующие параметры должны быть внесены в псевдодифференциальные уравнения контактирующих блочных элементов.

Литература

1. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О проблеме блочных структур академика М.А. Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. № 4. С. 480–485.
2. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О блочном элементе в форме произвольной треугольной пирамиды // ДАН. 2009. Т. 429. № 6. С. 758–761.
3. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О пирамидальном блочном элементе // ДАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 30–34.
4. *Евдокимова О.В., Зарецкая М.В., Павлова А.В., Бабешко О.М., Лозовой В.В., Бабешко В.А., Федоренко А.Г.* О полуограниченных блочных элементах // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. № 4. С. 14–19.
5. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В, Бабешко О.М.* О многогранных и выпуклых блочных элементах // ДАН. 2010. Т. 432. № 5. С. 620–623.
6. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О блочных элементах с неплоской границей // ДАН. 2012. Т 444. №5 С. 501–505.
7. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы со сферической границей // ДАН. 2010. Т. 434. № 5. С. 616–619.
8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // ДАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 623–625.
9. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и наноструктурах // ДАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 596–599.
10. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Некоторые общие свойства блочных элементов // ДАН. 2012.Т. 442. № 1. С.37–40.
11. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О блочных элементах в приложениях // Физическая мезомеханика. 2012. Т.15. №1. С. 95–103.
12. *Бабешко В.А,.Евдокимова О.В,.Бабешко О.М Зарецкая М.В., Павлова А.В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424, № 1. С. 36–39.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничная задача, автоморфизм, псевдодифференциальные уравнения, сложные области.

Статья поступила 19 ноября 2012 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар
ГУ МЧС по Краснодарскому краю, г. Краснодар