

УДК 539.3

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УПРУГИХ ПОТЕНЦИАЛОВ<sup>1</sup>

*Ватульян А. О.<sup>2</sup>, Сухов Д. Ю.<sup>3</sup>*

OF ONE METHOD OF STRAIN ENERGY POTENTIAL'S PARAMETERS DETERMINATION

Vatulyan A. O., Sukhov D. Y.

An application of quasilinearization method to solution of inverse problem of material parameters identification is described. The algorithm is realized for a nonlinear hollow cylinder shear torsion problem. Equilibrium equations are gathered by Saint-Venant semi-inverse method. The results illustrating parameters identification of Blatz and Co material and Klosner-Segal material are presented.

Keywords: quasilinearization method, Saint-Venant semi-inverse method, material parameters identification, hollow cylinder torsion, nonlinearity, Blatz and Co material, Klosner-Segal material.

### Введение

В современной инженерной практике все большее значение приобретает моделирование узлов, тел и механизмов при помощи конечноэлементных (КЭ) пакетов, таких как Ansys, Nastran, Abaqus и многие другие. В этих пакетах упругое деформирование материала определяется функцией удельной потенциальной энергии упругой деформации (потенциалом)  $W(\underline{G})$ , зависящей от меры деформации Коши-Грина [1]. Для моделирования сложного нелинейного поведения материала разрабатываются упругие потенциалы, зависящие от инвариантов тензора деформаций и содержащие набор некоторых параметров (упругий потенциал и есть модель материала). В приведенных выше КЭ-пакетах уже доступны модели материалов, учитывающие пьезоэффект, пористость, различные нелинейные эффекты при деформации.

Существенной проблемой при решении задач в КЭ-пакетах является определение (идентификация) параметров, полностью за-

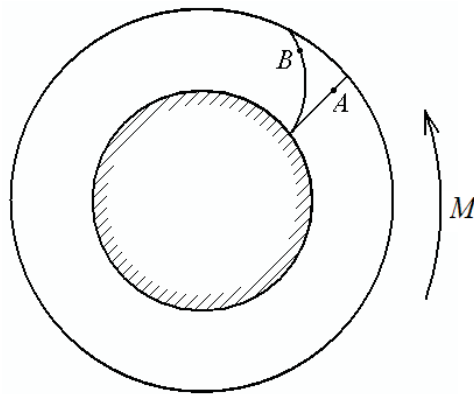
дающих поведение материала при деформации. Их значения обычно находят из экспериментов. Задача согласования результатов эксперимента и теоретических расчетов является очень интересной и непростой, а важность ее постоянно возрастает в связи с появлением все большего числа новых материалов и совершенствованием моделей нелинейных материалов, задающихся с помощью функции удельной потенциальной энергии. Нахождение параметров, входящих в тот или иной потенциал, приводит к некоторой коэффициентной обратной задаче по их определению. Обычно такие задачи решаются с помощью метода наименьших квадратов, что приводит к решению нелинейных систем трансцендентных уравнений.

Одним из перспективных подходов к решению обратной задачи идентификации материальных параметров является метод квазилинеаризации [2]. Он обладает рядом преимуществ, среди которых сравнительно низкие вычислительные затраты, линейно зависящие от размерности задачи, и отсутствие этапа «подстройки» параметров, относящих-

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (г/к П596).

<sup>2</sup>Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.sfedu.ru.

<sup>3</sup>Сухов Дмитрий Юрьевич, ассистент кафедры теории упругости факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: d.u.sukhov@gmail.com.



ся исключительно к вычислениям, для решения конкретной задачи, который необходим, например, в генетических алгоритмах [3]. Из недостатков самый существенный — чувствительность метода к начальному приближению.

В зарубежной литературе одно из самых ранних применений метода квазилинеаризации, он же обобщенный метод Ньютона-Рафсона, для идентификации параметров дифференциальных уравнений было осуществлено в [2, 4]. В [2] с помощью этого метода определялся параметр нелинейной краевой задачи для уравнения Ван-дер-Поля, в [4] — решалась задача по определению шести параметров из краевой задачи для моделирования газового абсорбента. Среди других ранних работ можно назвать [5], где проводилось определение параметра фильтрующей колонны и была показана применимость метода для динамических задач.

В последнее десятилетие метод квазилинеаризации часто используется для решения математически сложных задач — сингулярных систем [6], дифференциальных уравнений в частных производных [7], а также проводятся работы по его дальнейшему обобщению [8–10] и теоретическому обоснованию [10].

Помимо собственно метода квазилинеаризации, перспективным направлением исследования является комбинирование традиционных градиентных методов, к которым относится метод квазилинеаризации, и стохастических методов, например, генетических алгоритмов. При таком подходе градиентный метод, чувствительный к начальному приближению, используется для уточнения решения стохастического метода, который в си-

лу своих особенностей не может обеспечить большой финальной точности результата, но способен производить поиск в широком диапазоне изменения параметров. Использованию комбинированных методов и сравнению их со стохастическим и градиентным подходами посвящена работа [11].

В настоящем исследовании проводилась одновременная идентификация двух материальных параметров, характеризующих упругий потенциал, по следующему алгоритму. Сначала выводились уравнения равновесия и решалась прямая задача, для чего использовался полуобратный метод Сен-Венана [12]. Краевая задача о деформировании нелинейно-упругого тела решалась встроенным методом среды Maple для краевых задач (метод трапеций с интерполяцией Ричардсона). Далее снималась информация, необходимая для постановки и решения обратной задачи, которая затем решалась с помощью метода квазилинеаризации.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим сдвиговое кручение полового нелинейно-упругого цилиндра (рисунок). Внутренняя поверхность его закреплена, внешняя смещается в положительном направлении координаты  $\varphi$  на заданный угол, при этом точка  $A$  недеформированной конфигурации переходит в точку  $B$ . Положение любой точки деформированного цилиндра описывается функциями  $P(r)$ , имеющей смысл нового радиуса-вектора точки,  $F(r)$ , описывающей приращение к координате  $\varphi$ , и  $Z$  — аппликатой точки. Задача решалась для двух нелинейных потенциалов упругой деформации, причем идентификация проводи-

лась отдельно для случаев, когда информация для идентификации материальных параметров задавалась функциями  $P(r)$  и  $F(r)$ .

## 2. Получение уравнений равновесия и решение прямой задачи

Для вывода прямой задачи был применен полуобратный метод Сен-Венана [12], в котором использовалось следующее полуобратное представление деформации:

$$R = P(r), \quad \Phi = \varphi + F(r), \quad Z = z. \quad (2.1)$$

Поведение материала цилиндра определялось трехпараметрическими потенциалами Блейтца и Ко (сжимаемый материал)

$$W = \frac{\mu}{2} \left( \beta \left( I_1 + \frac{I_3^{-\alpha} - 1}{\alpha} - 3 \right) + (1 - \beta) \left( \frac{I_2}{I_3} + \frac{I_3^{-\alpha} - 1}{\alpha} - 3 \right) \right) \quad (2.2)$$

и Клоснера-Сегала (несжимаемый материал)

$$W = \frac{\mu}{4} \left( (1 + \beta) (I_1 - 3) + (1 - \beta) (I_2 - 3) + \kappa (I_2 - 3)^2 \right). \quad (2.3)$$

Далее принимается, что идентификации подлежат параметры  $\{\alpha, \beta\}$  материала (2.2).

На основе соотношений (2.1) и (2.2) в среде Марле были получены уравнения равновесия, которые представляют собой систему двух ОДУ второго порядка, и составлена краевая задача

$$\begin{cases} P''(r) = f(P'(r), F'(r), \\ P(r), F(r), r, \alpha, \beta), \\ F''(r) = g(P'(r), F'(r), \\ P(r), F(r), r, \alpha, \beta), \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} P(r_0) = r_0, & P(r_1) = r_1, \\ F(r_0) = s_0, & F(r_1) = s_1, \end{cases}$$

где в серии расчетов принимались следующие значения параметров  $r_0 = 0, 85$ ,  $s_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $s_1 = 0, 1$ . Задача была решена для следующих значений материальных параметров:  $\mu = 1$ ,  $\alpha = 0, 5$ ,  $\beta = 0$  («упрощенный» материал Блейтца и Ко). После этого внутри цилиндра в трех точках  $[r^0 = 0, 88, r^1 = 0, 90, r^2 = 0, 92]$  была снята информация  $\{P(r^0), F(r^0), P'(r^0), F'(r^0); P(r^1), P(r^2)\}$ , необходимая для решения обратной задачи с

двумя неизвестными параметрами. Здесь и далее принимается, что в качестве априорной информации для идентификации материальных параметров используются значения функции  $P(r)$  в описанном выше наборе точек.

Следует отметить, что в случае, когда значения производных не могут быть получены из имеющихся данных, их можно считать неизвестными параметрами и идентифицировать наряду с искомыми параметрами обратной задачи. Для этого следует соответственно увеличить количество точек, в которых снимается информация о значении функции, для идентификации параметров.

## 3. Обратная задача

Обратная задача состояла в отыскании неизвестных постоянных значений материальных параметров  $\{\alpha, \beta\}$  для материала Блейтца и Ко и параметров  $\{\kappa, \beta\}$  для материала Клоснера-Сегала. Значения материальных параметров были взяты из [12, 13]. Подробное описание алгоритма для случая одновременной идентификации одного материального параметра и значения производной в начальной точке приведено в [14]. Изложим далее основную идею метода квазилинеаризации в применении к обсуждаемой задаче кручения цилиндра.

На основе нелинейной задачи (2.4) построена каноническая система, состоящая из уравнений первого порядка, куда неизвестные параметры входят как неизвестные функции с нулевой производной:

$$\begin{cases} P_1'(r) = P_2(r), \\ F_1'(r) = F_2(r), \\ P_2'(r) = f_1, \\ F_2'(r) = g_1, \\ \alpha'(r) = 0, \\ \beta'(r) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$f_1 = f_1(P_1(r), F_1(r), P_2(r), F_2(r), \alpha(r), \beta(r), r),$$

$$g_1 = g_1(P_1(r), F_1(r), P_2(r), F_2(r), \alpha(r), \beta(r), r)$$

и составляется задача Коши с краевыми условиями

$$\begin{cases} P_1(r^0) = P(r^0), & P_2(r^0) = P'(r^0), \\ F_1(r^0) = F(r^0), & F_2(r^0) = F'(r^0), \\ \alpha(r^0) = \alpha_0, & \beta(r^0) = \beta_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $\{\alpha_0, \beta_0\}$  — начальное приближение. Некоторые рекомендации по выбору начальных приближений идентифицируемых параметров даны в [14].

Обозначим решение задачи Коши (3.1)–(3.3) как  $\{\tilde{P}'(r), \tilde{F}'(r), \tilde{P}(r), \tilde{F}(r), \tilde{\alpha}(r), \tilde{\beta}(r)\}$ .

Наряду с решением системы (3.1)–(3.3) на каждом шаге алгоритма требуется решение системы, линеаризованной в его окрестности. Эта система получается из (3.1) разложением неизвестных функций по степеням  $\varepsilon$ :

$$\begin{cases} P_1(r) = P_{10}(r) + \varepsilon P_{11}(r); \\ P_2(r) = P_{20}(r) + \varepsilon P_{21}(r); \\ F_1(r) = F_{10}(r) + \varepsilon F_{11}(r); \\ F_2(r) = F_{20}(r) + \varepsilon F_{21}(r); \\ \alpha(r) = \alpha_0(r) + \varepsilon \alpha_1(r); \\ \beta(r) = \beta_0(r) + \varepsilon \beta_1(r). \end{cases} \quad (3.3)$$

Собирая коэффициенты при  $\varepsilon^1$  и подставляя вместо  $P_{10}(r)$ ,  $P_{20}(r)$ ,  $F_{10}(r)$ ,  $F_{20}(r)$ ,  $\alpha_0(r)$ ,  $\beta_0(r)$  решение нелинейной задачи, приходим к линеаризованным уравнениям

$$\begin{cases} P'_{11}(r) = P_{21}(r), \\ F'_{11}(r) = F_{21}(r), \\ P'_{21}(r) = f_2, \\ F'_{21}(r) = g_2, \\ \alpha_1(r) = 0, \\ \beta_1(r) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$f_2 = f_2(P_{11}(r), F_{11}(r), P_{21}(r), F_{21}(r), \alpha_1(r), \beta_1(r), \tilde{P}'(r), \tilde{F}'(r), \tilde{P}(r), \tilde{F}(r), \tilde{\alpha}(r), \tilde{\beta}(r), r),$$

$$g_2 = g_2(P_{11}(r), F_{11}(r), P_{21}(r), F_{21}(r), \alpha_1(r), \beta_1(r), \tilde{P}'(r), \tilde{F}'(r), \tilde{P}(r), \tilde{F}(r), \tilde{\alpha}(r), \tilde{\beta}(r), r).$$

Решение краевой задачи (3.4) определяет коррекцию нелинейного решения задачи (3.1)–(3.3). Будем отыскивать решение задачи (3.4) в виде

$$P_{lin}(r) = aP_{lin1}(r) + bP_{lin2}(r), \quad (3.5)$$

где  $P_{lin1}(r)$  — решение системы (3.4) с граничными условиями

$$\begin{cases} P_{lin1}(r^0) = 0, & P'_{lin1}(r^0) = 0, \\ F_{lin1}(r^0) = 0, & F'_{lin1}(r^0) = 0, \\ \alpha_{lin1}(r^0) = 1, & \beta_{lin1}(r^0) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

а  $P_{lin2}(r)$  — решение системы (3.4) с граничными условиями

$$\begin{cases} P_{lin2}(r^0) = 0, & P'_{lin2}(r^0) = 0, \\ F_{lin2}(r^0) = 0, & F'_{lin2}(r^0) = 0, \\ \alpha_{lin2}(r^0) = 0, & \beta_{lin2}(r^0) = 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Такое представление функций коррекции возможно в силу линейности системы (3.4).

Решив системы (3.4)–(3.6) и (3.4)–(3.7) и подставив их решения в (3.5), составляем систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $\{a, b\}$  с использованием информации о значениях искомой функции в точках

$$\begin{cases} aP_{lin1}(r^1) + bP_{lin2}(r^1) = \\ = P(r^1) - \tilde{P}(r^1), \\ aP_{lin1}(r^2) + bP_{lin2}(r^2) = \\ = P(r^2) - \tilde{P}(r^2). \end{cases}$$

Решив эту систему, находим коррекцию данного шага итерации

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0 + \Delta_a, \\ \beta_1 = \beta_0 + \Delta_b, \end{cases}$$

и повторяем итерационный процесс. Критерием выхода из итераций служит малая величина отклонения  $\Delta_P$  функции  $P(r)$  от снятых при решении прямой задачи значений  $P(r^1)$ ,  $P(r^2)$ .

## 4. Численные результаты

**4.1.** В табл. 1 представлены результаты расчетов по одновременной идентификации двух материальных параметров для материала Блейтца и Ко в случае, когда априорная информация для обратной задачи предоставляется функцией  $P(r)$ . Здесь и далее критерий выхода (невязка в заданных точках) принимался равным  $10^{-8}$  по норме «максимум».

Истинные значения параметров  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0$ . Было использовано следующее начальное приближение:  $\alpha_0 = 0,8$ ,  $\beta_0 = 0$ . Полученные значения параметров:  $\alpha = 0,42546539$ ,  $\beta = 0,01848631$ .

**4.2.** В табл. 2 приведены результаты расчетов для материала Блейтца и Ко в случае, когда априорная информация для обратной задачи предоставляется функцией  $F(r)$ .

Истинные значения параметров  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0$ . Начальное приближение  $\alpha_0 = -0,27$ ,

Таблица 1

№	$\alpha_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta_P$
1	0,8	0	-1,27266106	0,19411439	$0,12514 \cdot 10^{-3}$
2	-0,47266106	0,19411439	0,32374085	-0,06347079	$0,33619 \cdot 10^{-3}$
3	-0,14892020	0,13064360	0,29066425	-0,05267191	$0,12730 \cdot 10^{-3}$
4	0,14174405	0,07797170	0,16710409	-0,03219300	$0,34160 \cdot 10^{-4}$
5	0,30884814	0,04577870	0,07944939	-0,01823670	$0,51838 \cdot 10^{-5}$
6	0,38829752	0,02754200	0,03221366	-0,00785140	$0,63047 \cdot 10^{-6}$
7	0,42051119	0,01969060	0,00495420	-0,00120428	$0,79640 \cdot 10^{-7}$
8	0,42546539	0,01848631	-0,00049895	0,00012580	$0,18500 \cdot 10^{-8}$

Таблица 2

№	$\alpha_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta_F$
1	-0,27	-0,01	1,39247799	-0,45024988	$0,93811 \cdot 10^{-3}$
2	1,12247799	-0,46024988	-1,95671829	0,77121213	$0,86099 \cdot 10^{-3}$
3	-0,83424030	0,31096225	0,13470843	-0,00888680	$0,90034 \cdot 10^{-3}$
4	-0,69953187	0,30207545	0,20701078	-0,04721002	$0,34869 \cdot 10^{-3}$
5	-0,49252109	0,25486543	0,26564695	-0,07256558	$0,13019 \cdot 10^{-3}$
6	-0,22687414	0,18229986	0,25965637	-0,06749251	$0,51618 \cdot 10^{-4}$
7	0,03278223	0,11480735	0,19422318	-0,04786133	$0,19407 \cdot 10^{-4}$
8	0,22700542	0,066946022	0,11791842	-0,02874694	$0,58873 \cdot 10^{-5}$
9	0,34492383	0,038199082	0,05934413	-0,01452648	$0,14456 \cdot 10^{-5}$
10	0,40426796	0,023672605	0,02001782	-0,00490412	$0,2888 \cdot 10^{-6}$
11	0,42428579	0,018768481	0,00086294	-0,00020204	$0,297 \cdot 10^{-7}$
12	0,42514873	0,018566436	-0,00014104	0,00003535	$0,7 \cdot 10^{-10}$

$\beta_0 = -0,01$ . Полученные значения параметров  $\alpha = 0,42514873$ ,  $\beta = 0,01856644$ .

**4.3.** Результаты расчетов для материала Клоснера-Сегала в случае, когда априорная информация для обратной задачи предоставляется функцией  $P(r)$ , отражены в табл. 3.

Истинные значения параметров  $\kappa = 0,1$ ,  $\beta = 0,5$ . Начальное приближение  $\kappa_0 = 0,2$ ,  $\beta_0 = 0$ . Полученные значения параметров  $\kappa = 0,08320760$ ,  $\beta = 0,52774245$ .

**4.4.** В табл. 4 — результаты расчетов для материала Клоснера-Сегала в случае, когда априорная информация для обратной задачи предоставляется функцией  $F(r)$ .

Истинные значения параметров  $\kappa = 0,1$ ,  $\beta = 0,5$ . Начальное приближение  $\kappa_0 = 0,2$ ,  $\beta_0 = 0,8$ . Полученные значения параметров  $\kappa = 0,09566589$ ,  $\beta = 0,48197916$ .

### Выводы

Метод квазилинеаризации позволяет проводить одновременную идентификацию нескольких параметров дифференциальных

уравнений, в том числе материальных параметров, в экспериментах с использованием математических моделей деформирования нелинейно упругих материалов. Главное достоинство этого метода заключается в сравнительно большой скорости счета и принципиальной возможности увеличивать количество идентифицируемых параметров без значительного роста требуемых машинных ресурсов. Недостатком метода, прежде всего, является чувствительность к математическим особенностям исследуемой задачи и отсюда — к начальному приближению.

### Литература

1. Грин А., Аткинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
2. Bellman R., Kalaba R. Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems. Elsevier: New York, 1965. 218 p.
3. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы. М.: Физматлит, 2006. 320 с.

Таблица 3

№	$\alpha_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta_P$
1	0,2	0	-0,094961231	0,58947828	$0,18754 \cdot 10^{-4}$
2	0,10503877	0,58947828	-0,031305303	-0,05708868	$0,76880 \cdot 10^{-5}$
3	0,07373346	0,53238960	0,009393636	-0,00512809	$0,10016 \cdot 10^{-5}$
4	0,08312710	0,52726150	0,000080504	0,00048095	$0,51982 \cdot 10^{-7}$
5	0,08320760	0,52774245	-0,000007173	0,00001217	$0,11 \cdot 10^{-10}$

Таблица 4

№	$\kappa_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta_P$
1	0,2	0,8	-0,23378660	-0,38024541	$0,21993 \cdot 10^{-5}$
2	-0,03378660	0,41975458	0,05795243	0,02334176	$0,23083 \cdot 10^{-4}$
3	0,02416583	0,44309634	0,04967854	0,03003085	$0,81904 \cdot 10^{-5}$
4	0,07384437	0,47312719	0,01989764	0,00791245	$0,19653 \cdot 10^{-5}$
5	0,09374201	0,48103964	0,00192388	0,00093953	$0,15728 \cdot 10^{-6}$
6	0,09566589	0,48197916	0,00002079	0,00003149	$0,123 \cdot 10^{-8}$

4. *Sylvester R. J., Meyer F.* Two Point Boundary Problems by Quasilinearization // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1965. Vol. 13. No. 2. P. 586–602.
5. *Lee E. S.* Quasilinearization, parameter estimation, and distillation column design // Chemical Engineering Communications. 1974. Vol. 1. Iss. 5. P. 249–259.
6. *Abd-Ellateef Kamar A. R., Attia G. M., Vajravelu K., Mosaad M.* Generalized quasilinearization for singular system of differential equations // Applied Mathematics and Computation. 2000. Vol. 114. Iss. 1. P. 69–74.
7. *Vasundhara Devi J., McRae F. A., Drici Z.* Generalized quasilinearization for fractional differential equations // Computers Mathematics with Applications. 2009. Vol. 59. No. 3. P. 1057–1062.
8. *Ahmad B., Nieto J. J., Shahzad N.* Generalized quasilinearization method for mixed boundary value problems // Applied Mathematics and Computation. 2002. Vol. 133. No. 2–3. P. 423–429.
9. *Lakshmikantham V., Vatsala A. S.* Generalized Quasilinearization for Nonlinear Problems. In: Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1998. 276 p.
10. *Mandelzweig V. B., Tabakin F.* Quasilinearization approach to nonlinear problems in physics with application to nonlinear ODEs // Computer Physics Communications. 2001. Vol. 141. Iss. 2. P. 268–281.
11. *Chaparro B., Thuillier S., Menezes L., Manach P., Fernandes J.* Material parameters identification: Gradient-based, genetic and hybrid optimization algorithms // Computational Materials Science. 2008. Vol. 44. Iss. 2. P. 339–346.
12. *Гавриляченко Т. В., Карякин М. И.* Методы компьютерной алгебры в задачах нелинейной теории упругости // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды 2-й Международной конференции. Т. 1. Ростов н/Д. 1996. С. 30–34.
13. *Колесников А. М.* Большие деформации высокоэластичных оболочек. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 2006. 115 с.
14. *Ватульян А. О., Беляк О. А., Сухов Д. Ю., Явруян О. В.* Обратные и некорректные задачи. Ростов-н/Д: Изд-во Южного федерального университета, 2011. 232 с.

Ключевые слова: метод квазилинеаризации, полуобратный метод Сен-Венана, идентификация материальных параметров, кручение полого цилиндра, нелинейность, материал Блейтца и Ко, материал Клоснера-Сегала.