

УДК 539.37

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО И НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАГРУЖЕНИЯ<sup>1</sup>

*Ганеева М. С.<sup>2</sup>, Моисеева В. Е.<sup>3</sup>*

INVESTIGATION OF SPHERICAL SHELLS STABILITY UNDER THE ACTION OF AXISYMMETRIC AND NONAXISYMMETRIC LOADING

Ganeeva M. S., Moiseeva V. E.

In this paper the process of geometrically and material nonlinear straining of spherical shells under the action of axisymmetric and nonaxisymmetric loading with determination of limit loads of instability is studied. The results of numerical calculations depending on geometrical characteristics of shells, material properties and a type of loading were obtained.

Keywords: spherical shells, stability, nonaxisymmetric loading.

### Введение

При нелинейном деформировании оболочек вращения под действием осесимметричного и неосесимметричного нагружения наблюдается принципиальное отличие [1, 2]. При осесимметричном нагружении можно установить нагрузку бифуркации, при которой в оболочке появляется новая форма с волнами по параллели: ветвь нелинейного неосесимметричного решения. Возможен случай без такой точки бифуркации. Тогда при дальнейшем развитии процесса нелинейного деформирования может наблюдаться перестройка эпюр разрешающих функций по меридиану — на поверхности оболочки образуются круговые вмятины. При наложении обоих процессов в оболочке возникают вмятины в шахматном порядке.

При неосесимметричном нагружении с самого начала деформирования решение является неосесимметричным, зависящим от координат по меридиану и параллели. При развитии процесса возможно появление ветвления решения. С нарастанием нагружения может происходить перестройка разрешающих функций по нагруженным меридиану

или параллели, или одновременно по двум переменным с образованием локальных вмятин.

В [3] представлены результаты о перестройке гармоник прогиба при изгибе цилиндрической оболочки вследствие динамического сжатия. Монография [4] посвящена исследованию устойчивости цилиндрических оболочек при статической неосесимметричной деформации. В данной работе изучается процесс геометрически и физически нелинейного деформирования сферических оболочек. Представлены результаты численных расчетов в зависимости от геометрических характеристик, свойств материала и вида нагружения.

### 1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается оболочка вращения (рис. 1), замкнутая в окружном направлении [5]. За координатные линии приняты меридианы  $s$ , параллели  $\varphi$  и внешняя нормаль  $z$  к срединной поверхности. При этом  $s_1 \leq s \leq s_N$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-0,5h \leq z \leq 0,5h$ ,  $h(s)$  — толщина оболочки;  $R_1(s)$ ,  $R_2(s)$  —

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы механики и смежных наук в изучении многомасштабных процессов в природе и технике»

<sup>2</sup>Ганеева Музаина Саитгареевна, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, главный научный сотрудник лаборатории «Механика сплошной среды» Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН; e-mail: ganeeva@kfti.knc.ru.

<sup>3</sup>Моисеева Валерия Евгеньевна, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории «Механика сплошной среды» Института механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук; e-mail: moiseeva@kfti.knc.ru.

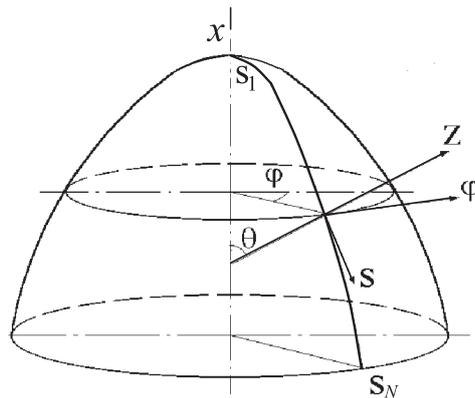


Рис. 1. Оболочка вращения

главные радиусы кривизны;  $r = R_2 \sin(\theta)$  — радиус параллели;  $\theta \in [\theta_1, \theta_N]$  — угол между осью вращения оболочки  $x$  и нормалью к срединной поверхности  $z$ .

На оболочку действуют нагрузки  $X_i^H(s, \varphi)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Задача решается на основе уравнений теории оболочек Кирхгофа-Лява в геометрически нелинейной постановке при умеренных поворотах. Допускается работа материала за пределом упругости, связь между напряжениями и деформациями описывается уравнениями теории малых упругопластических деформаций [6]. Основные соотношения получены в недеформированных координатных линиях. Далее используются соотношения и обозначения работы [5].

Пусть действующие на оболочку нагрузки, граничные условия симметричны (антисимметричны) относительно некоторого меридионального сечения и представлены в виде тригонометрических рядов по координате  $\varphi$

$$X_i^H(s, \varphi) = \sum_{k=0}^n X_{i,k}^H(s) \cos k\varphi, \quad i = 1, 3;$$

$$X_2^H(s, \varphi) = \sum_{k=1}^n X_{2,k}^H(s) \sin k\varphi.$$

Для решения задачи используется метод разложения искомых функций

$$\mathbf{Y} = (T_{11}^H, T_{12}^H, Q_1^*, M_{11}, v_1, v_2, w, \vartheta_1)',$$

$$Q_1^* = Q_1^H + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi}$$

в тригонометрические ряды по окружной координате [7–9]

$$w = \sum_{k=0}^L w_k(s) \cos k\varphi, \quad (1.1)$$

$$v_2 = \sum_{k=1}^L v_{2,k}(s) \sin k\varphi, \dots$$

В силу нелинейности задачи  $L > n$ , и значение  $L$  устанавливается численным экспериментом. Вводится вектор разрешающих функций для амплитуд гармоник рядов (1.1)

$$\mathbf{Z}_k = (\mathbf{T}_k, \mathbf{W}_k)';$$

$$\mathbf{T}_k = (T_{11,k}, T_{12,k}, Q_{1,k}, M_{11,k})'; \quad (1.2)$$

$$\mathbf{W}_k = (v_{1,k}, v_{2,k}, w_k, \vartheta_{1,k})', \quad k = \overline{0, L}.$$

Задача сводится к интегрированию ряда систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{Z}_k}{ds} = \mathbf{H}_k(s)\mathbf{Z}_k + \mathbf{g}_k(s, X_{i,k}^H) + \mathbf{\Gamma}_k(s, \mathbf{Y}) + \mathbf{\Phi}_k(s, \mathbf{Y}), \quad k = \overline{0, L} \quad (1.3)$$

при соответствующих граничных условиях:

$$\mathbf{A}_k \mathbf{Z}_k = \mathbf{a}_k \text{ при } s = s_1, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{B}_k \mathbf{Z}_k = \mathbf{b}_k \text{ при } s = s_N,$$

$$k = \overline{0, L}.$$

Здесь  $\mathbf{H}_k(s)$  — матрица коэффициентов ( $8 \times 8$ );  $\mathbf{g}_k$  — вектор ( $8 \times 1$ ) амплитуд нагрузочных членов;  $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$  — матрицы ( $4 \times 8$ );  $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$  — векторы ( $4 \times 1$ ). При этом коэффициенты Фурье разложений, связывающих системы (1.3) геометрически и физически нелинейных членов  $\mathbf{\Gamma}_k(s, \mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{\Phi}_k(s, \mathbf{Y})$  в ряды вида (1.1), подсчитываются численно по формулам Бесселя [10].

Для решения нелинейной краевой задачи (1.3), (1.4) используется метод последовательных приближений [7, 8] в сочетании с методом ортогональной прогонки [11]. Процесс последовательных приближений организован по ряду значений ведущего параметра [8, 9], удачный выбор которого обеспечивает сходимость процесса для получения полной картины характерной кривой зависимости параметров нагрузки и прогиба с определением предельных точек. Основу методики составляет алгоритм продолжения численного решения по некоторому интегральному параметру, который определяется эпюрой полуволны на амплитуде одной из основных гармоник прогиба в тригонометрическом ряду по окружной координате (1.1). Для оболочки с полюсом ( $\theta_1 = 0, r = 0$ ) соотношения (1.3), (1.4) в полюсе и его окрестности неприменимы, т.к. в (1.3), (1.4) присутствуют члены вида  $r^{-\alpha}, \alpha > 0$ . Тогда в малой окрестности полюса  $\Delta r$  для разрешающих функций (1.2) используются разложения, полученные с достаточной точностью в [5].

## 2. Примеры и анализ результатов

Рассматривается деформирование сферической оболочки под действием внешнего нормального давления  $X_3^H$ . Используются обозначения:  $R$  — радиус сферы,  $h$  — толщина,  $a$  — радиус основания,  $H$  — высота полюса над основанием. Материал оболочки следует закону линейного упрочнения [6] с коэффициентом упрочнения  $\lambda = 0,9; \nu = 0,3$  — коэффициент Пуассона;  $\sigma_S/E = 2,5 \cdot 10^{-3}$  — предел текучести;  $E$  — модуль Юнга;  $\sigma_i = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{0,5}$  — интенсивность напряжений. Основание оболочки жестко заделано, т.е.

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_1 = 0.$$

Рассмотрены следующие случаи внешнего нормального давления  $X_3^H$ :

– осесимметричное нагружение

$$X_3^H = Q; \tag{2.1}$$

– неосесимметричное нагружение

$$X_3^H = \begin{cases} Q, & \theta \in [0, \theta_0], \\ Q[1 + \sin(\theta - \theta_0)(C_1 \cos \varphi + \\ + C_2 \cos 2\varphi)], & \theta \in [\theta_0, \theta_N], \end{cases} \tag{2.2}$$

с амплитудами  $X_{3,0}^H, X_{3,1}^H, X_{3,2}^H$ , где  $C_1, C_2$  — коэффициенты. При одинаковом среднем

давлении  $Q$  случаи (2.1), (2.2) задают одинаковый полный груз на поверхность оболочки. Далее приняты сокращения:  $L$  — линейное решение,  $\Gamma$  — геометрически нелинейное решение,  $\Gamma\Phi$  — геометрически и физически нелинейное решение, НДС — напряженно-деформированное состояние. Отметим, что  $\Gamma$ -решение соответствует случаю, когда материал оболочки имеет высокий предел текучести  $\sigma_S$  и оболочка деформируется упруго.

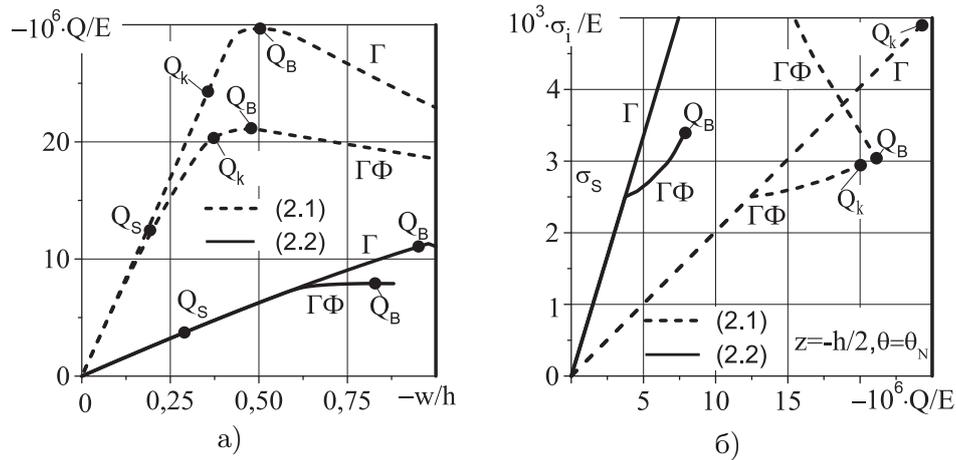
**А.** В табл. 1 и на рис. 2–4 представлены результаты вычислений для полусферической оболочки с параметрами  $a = H = R, a/h = 200, H/a = 1, \theta_0 = 0,055, \theta_N = \pi/2, C_1 = 1, C_2 = 0,5$ .

В табл. 1 приведены безразмерные значения параметра нагрузки  $Q/E$ , максимальных значений прогиба  $\max_{s,\varphi} w/h$  и интенсивности напряжений  $\max_{s,\varphi,z} \sigma_i/E$  при нагружении (2.2). Показана зависимость НДС оболочки в окрестности верхнего критического значения параметра нагружения  $Q_B$  от числа членов  $L$  в рядах искоемых функций (1.1) при  $\Gamma$ - и  $\Gamma\Phi$ -решениях. Вычисления показали, что решение в окрестности параметра  $Q_S$ , когда  $\max_{s,\varphi,z} \sigma_i = \sigma_S$ , устанавливается при  $L = 4: Q_S/E = -3,724 \cdot 10^{-6}, \max_{s,\varphi} w/h = -0,290, \max_{s,\varphi,z} \sigma_i/E = 2,493 \cdot 10^{-3}$ . Необходимо обратить внимание на особенность данных табл. 1. На первый взгляд кажется, что решение в окрестности параметра  $Q_B$  устанавливается при  $L = 8$ . Однако дальнейшее увеличение параметра  $L$  приводит к значительному изменению  $\Gamma$ -решения ( $L = 22$ ) и некоторому изменению  $\Gamma\Phi$ -решения ( $L = 14$ ).

Расчеты проводились при  $L = 22$  для  $\Gamma$ -решения и  $L = 14$  для  $\Gamma\Phi$ -решения. На рис. 2 показана зависимость параметра нагрузки  $Q/E$  от параметра максимального прогиба  $\max_{s,\varphi} w/h$  и максимальной интенсивности напряжений  $\max_{s,\varphi,z} \sigma_i/E$  от параметра нагрузки на наиболее нагруженном меридиане  $\varphi = 0$  для случая осесимметричного (2.1) (штриховые линии) и неосесимметричного (сплошные линии) нагружения (2.2). Отмечены следующие точки:  $Q_S$  — нагрузка, при которой достигается предел текучести  $\max_{s,\varphi,z} \sigma_i = \sigma_S$ ,  $Q_k$  — нагрузка волнообразования по параллели с числом волн  $k = 22$  при нагружении (2.1),  $Q_B$  — верхнее критическое значение параметра  $Q$  при нагружениях (2.1), (2.2). Из рис. 2 видно значительное влияние на НДС

Таблица 1. НДС оболочки с параметрами  $a/h = 200$ ,  $H/a = 1$ 

L		4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Окрестность $Q_B$ ; $\Gamma$ , (2.2)	$-10^6 \cdot Q/E$	16,8	16,5	16,2	15,9	14,9	13,5	12,4	11,6	11,3	11,0
	$-w/h$	2,16	1,78	1,74	1,70	1,58	1,24	1,10	1,01	0,98	0,95
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	11,6	11,5	11,4	11,2	10,5	9,19	8,44	7,85	7,65	7,47
Окрестность $Q_B$ ; $\Gamma\Phi$ , (2.2)	$-10^6 \cdot Q/E$	8,00	8,00	7,99	7,97	7,94	7,91				
	$-w/h$	1,00	0,98	0,91	0,90	0,83	0,83				
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	3,42	3,42	3,41	3,40	3,40	3,39				

Рис. 2. Зависимости при  $a/h = 200$ ,  $H/a = 1$ : а)  $Q(w)$ , б)  $\sigma_i(Q)$ 

оболочки вида нагружения и учета  $\Gamma$ - и  $\Gamma\Phi$ -нелинейностей.

О характере поведения решения при нарастании параметра нагружения можно судить по рис. 3, 4, где приведены эпюры прогиба  $\bar{w} = w/h$  и амплитуд  $\bar{w}_0 = w_0/h$ ,  $\bar{w}_1 = w_1/h$ ,  $\bar{w}_2 = w_2/h$ ,  $\bar{w}_3 = w_3/h$  по меридиану. Для осесимметричного нагружения (2.1) эпюры прогибов представлены на рис. 3 до верхней критической нагрузки с номерами 1–3 и на ниспадающей ветви с номерами 4, 5 для случаев упругого (рис. 3а) и упругопластического (рис. 3б) деформирования. Из рис. 3а видно спокойное поведение прогиба по меридиану вплоть до нагрузки  $Q_B$ , при которой наблюдается частое волнообразование по меридиану. После перехода через нагрузку  $Q_B$  происходит резкое изменение эпюры прогиба с образованием глубокой вмятины в окрестности полюса. В случае  $\Gamma\Phi$ -решения (рис. 3б) поведение прогиба по большей части меридиана спокойное с деформированием в окрестности основания, которое после превышения уровня нагрузки  $Q_B$  приводит к образованию кольцевой вмятины в окрестности основания.

На рис. 4 изображены эпюры прогиба  $\bar{w}$  и амплитуд  $\bar{w}_0$ ,  $\bar{w}_1$ ,  $\bar{w}_2$ ,  $\bar{w}_3$  по меридиа-

ну при неосесимметричном нагружении (2.2). Эпюры на рис. 4а соответствуют  $\Gamma$ -решению при малых прогибах до достижения предела текучести материала  $\sigma_S$ . Решение складывается из гармоник  $k = 0, 1, 2$ , которые определяются из уравнений задачи (1.3) амплитудами нагружения  $X_{3,0}^H, X_{3,1}^H, X_{3,2}^H$ . При этом в рассматриваемой задаче определяющей является гармоника  $k = 1$ . Влияние гармоник  $k \geq 3$ , вызываемых нелинейными членами, практически отсутствует. С нарастанием  $\Gamma$ -нелинейности при достижении верхней критической нагрузки  $Q_B$  (рис. 4б) амплитуды  $\bar{w}_k$ ,  $k \geq 3$  становятся ненулевыми.

При  $\Gamma\Phi$ -решении для НДС оболочки волнообразование по меридиану также наблюдается в окрестности верхней критической нагрузки  $Q_B$  (рис. 4в). Но оно не охватывает всего меридиана, возникая в окрестности основания с образованием локальной вмятины на меридиане  $\varphi = 0$ . Здесь же наблюдаются ненулевые высшие гармоники  $\bar{w}_k$ ,  $k \geq 3$ . На рис. 4б, 4в для сравнения даны эпюры прогиба  $\bar{w}$  по меридиану  $\varphi = \pi$  при параметре нагрузки  $Q_B$ . Видно, что эта область слабо нагруженного меридиана в основном прогибается наружу.

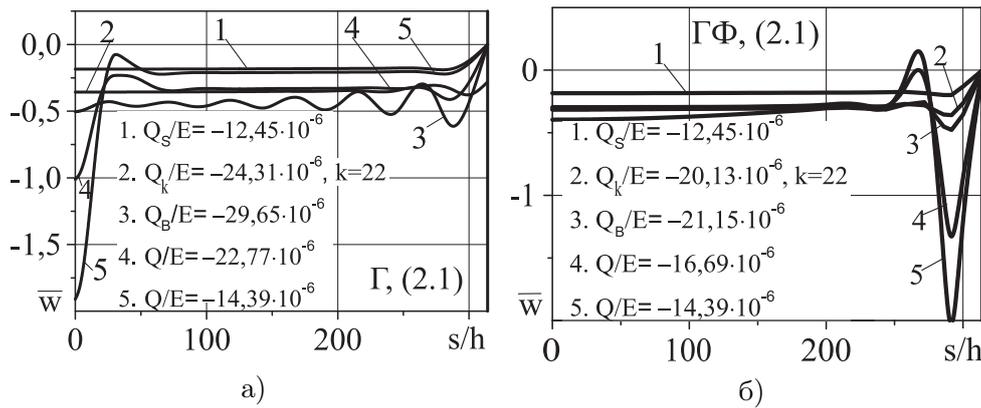


Рис. 3. Эпюры  $\bar{w}$  по меридиану при  $a/h = 200, H/a = 1$ : а)  $\Gamma, (2.1)$ , б)  $\Gamma\Phi, (2.1)$

Таблица 2. НДС оболочки с параметрами  $a/h = 100, H/a = 1$

L		4	6	8	10	12	14	16	18	20
Окрестность $Q_B; \Gamma, (2.2)$	$-10^6 \cdot Q/E$	66,8	63,9	60,8	54,7	48,3	43,2	39,6	37,6	36,9
	$-w/h$	2,07	1,98	1,97	1,65	1,26	1,06	0,93	0,82	0,80
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	23,3	23,2	22,5	20,0	17,3	15,3	14,0	12,9	12,7
Окрестность $Q_B; \Gamma\Phi, (2.2)$	$-10^6 \cdot Q/E$	19,7	19,6	19,4	19,3	19,1	18,9			
	$-w/h$	1,10	0,99	0,91	0,86	0,77	0,72			
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	4,27	4,06	3,97	3,98	3,95	3,94			

В табл. 2 и на рис. 5–7 приведены результаты расчетов для полусферической оболочки с параметрами  $a = H = R, a/h = 100, H/a = 1, \theta_0 = 0,055, \theta_N = \pi/2, C_1 = 1, C_2 = 0,5$ . Вычисления показали, что решение в окрестности параметра  $Q_S$  при нагружении (2.2) устанавливается при  $L = 4: Q_S/E = -7,353 \cdot 10^{-6}, \max_{s,\varphi} w/h = -0,145, \max_{s,\varphi,z} \sigma_i/E = 2,493 \cdot 10^{-3}$ . В табл. 2 повторяется особенность табл. 1: решение в окрестности параметра  $Q_B$  предварительно устанавливается при  $L = 8$ , но дальнейшее увеличение параметра  $L$  показывает значительное изменение  $\Gamma$ -решения ( $L = 20$ ) и некоторое изменение  $\Gamma\Phi$ -решения ( $L = 14$ ).

Из рис. 5–7 видно качественное согласование характеристик НДС со случаем более тонкостенной оболочки  $a/h = 200, H/a = 1$ . Различие наблюдается в том, что утолщение стенки оболочки приводит к повышению значений параметров нагружения. Так, например, при осесимметричном  $\Gamma$ -нагружении оболочка разрушится задолго до достижения нагрузок  $Q_k$  и  $Q_B$ . Отметим, что на рис. 6, 7 наблюдается уменьшение частоты волн по меридиану по сравнению с результатами рис. 3, 4.

**В.** Деформирование пологого сферического сегмента с параметрами  $a/h = 200,$

$H/a = 0,2, \theta_0 = 0,008, \theta_N = 0,39479, C_1 = 2,5, C_2 = 1,25$ .

Результаты вычислений приведены в табл. 3 и на рис. 8, 9. Из табл. 3 видно, что для тонкостенной пологой сферической оболочки для получения решения в окрестности верхнего критического значения параметра нагрузки  $Q_B$  при нагружении (2.2) требуется в рядах (1.1)  $L = 20$  членов. При этом такая оболочка до достижения параметра  $Q_B$  деформируется упруго:  $\max_{s,\varphi,z} \sigma_i < \sigma_S (L = 20)$ .

На рис. 8 представлены зависимости для НДС  $Q(w)$  и  $\sigma_i(Q)$ . На рис. 9 даны эпюры прогиба  $\bar{w}$  и амплитуд  $\bar{w}_0, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$  при некоторых условиях деформирования. Из рис. 9а видно, что при осесимметричном нагружении (2.1) полая оболочка в пределах параметра  $Q_B$  претерпевает частое волнообразование по меридиану. После преодоления  $Q_B$  наблюдается глубокая вмятина в окрестности полюса. При неосесимметричном нагружении (2.2) (рис. 9б, 9в,  $L = 20$ ) основные прогибы развиваются в окрестности основания на наиболее нагруженном меридиане  $\varphi = 0$ : здесь образуется глубокая локальная вмятина.

В табл. 4, 5 и на рис. 10–12 приведены результаты вычислений для пологого сферического сегмента с параметрами  $a/h = 100, H/a = 0,2, \theta_0 = 0,008, \theta_N = 0,39479,$

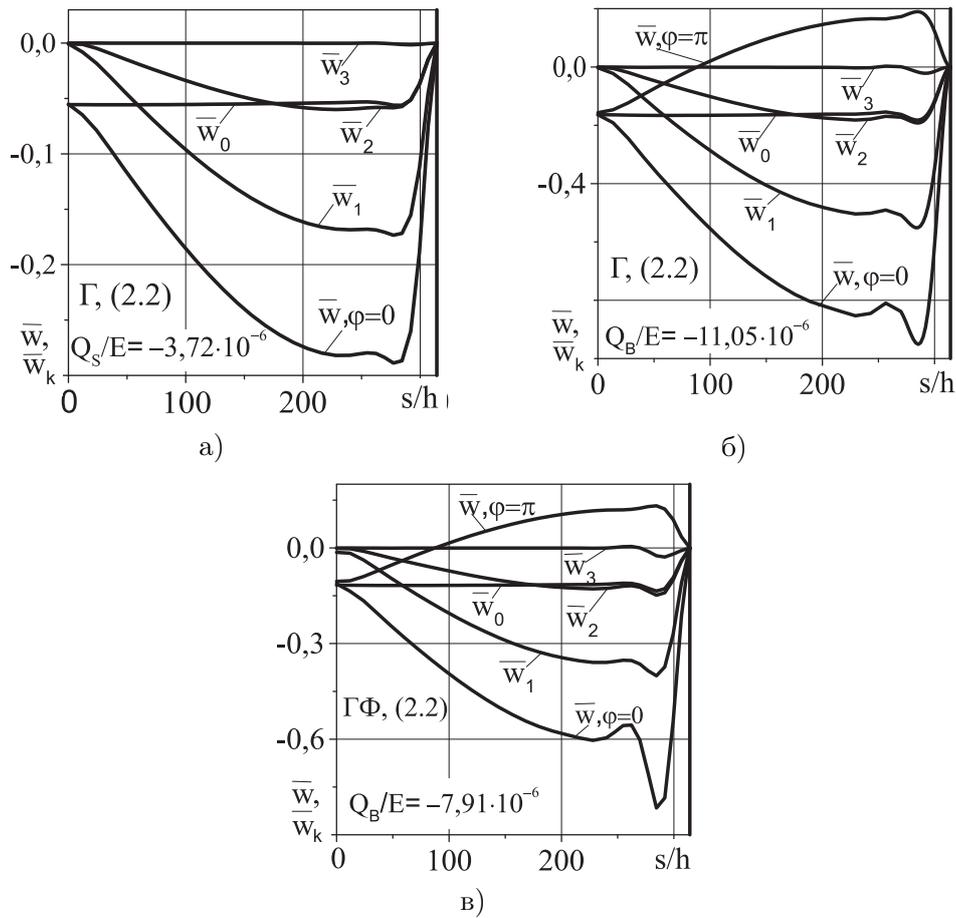


Рис. 4. Эшоры  $\bar{w}$  и  $\bar{w}_k, k = \bar{0}, \bar{3}$  по меридиану при  $a/h = 200, H/a = 1$ : а)  $Q_S/E$ ;  $\Gamma, (2.2)$ ; б)  $Q_B/E$ ;  $\Gamma, (2.2)$ ; в)  $Q_B/E$ ;  $\Gamma\Phi, (2.2)$

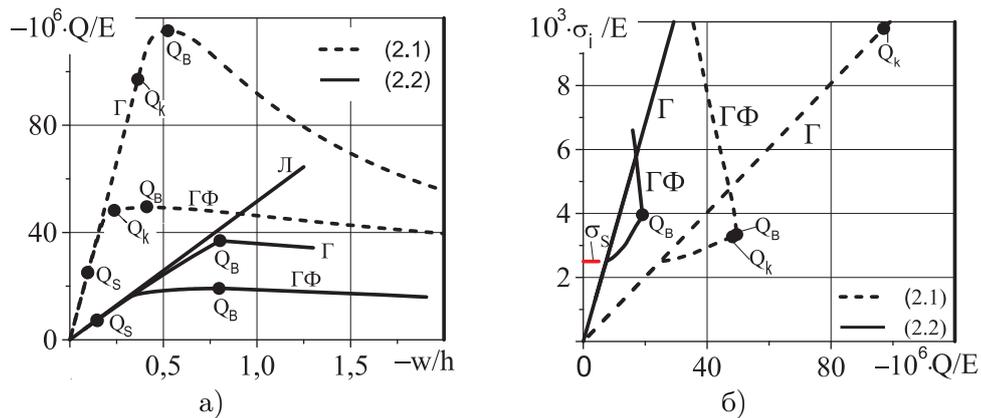


Рис. 5. Зависимости при  $a/h = 100, H/a = 1$ : а)  $Q(w)$ , б)  $\sigma_i(Q)$

Таблица 3. НДС оболочки с параметрами  $a/h = 200, H/a = 0,2$

L		4	6	8	10	12	14	16	18	20
Окрестность $Q_B; \Gamma, (2.2)$	$-10^6 \cdot Q/E$	2,62	2,34	2,03	1,82	1,67	1,59	1,55	1,53	1,53
	$-w/h$	2,12	2,02	1,48	1,11	0,93	0,84	0,76	0,75	0,74
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	4,78	4,44	3,39	2,97	2,69	2,49	2,43	2,42	2,40

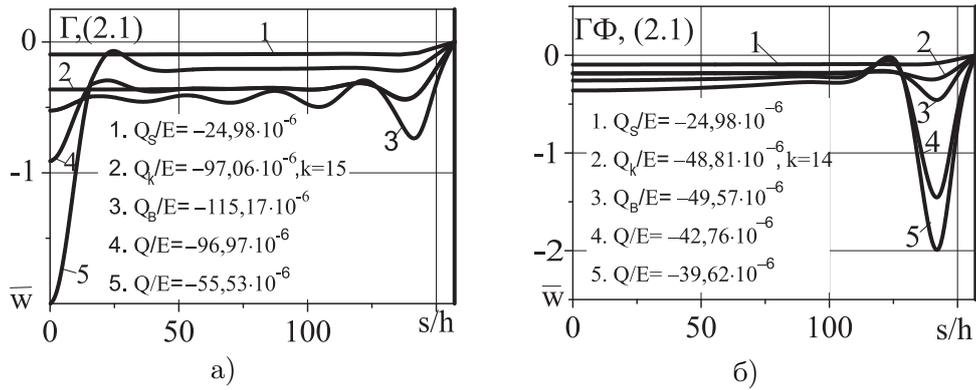


Рис. 6. Эпюры  $\bar{w}$  по меридиану при  $a/h = 100$ ,  $H/a = 1$ : а)  $\Gamma$ , (2.1), б)  $\Gamma\Phi$ , (2.1)

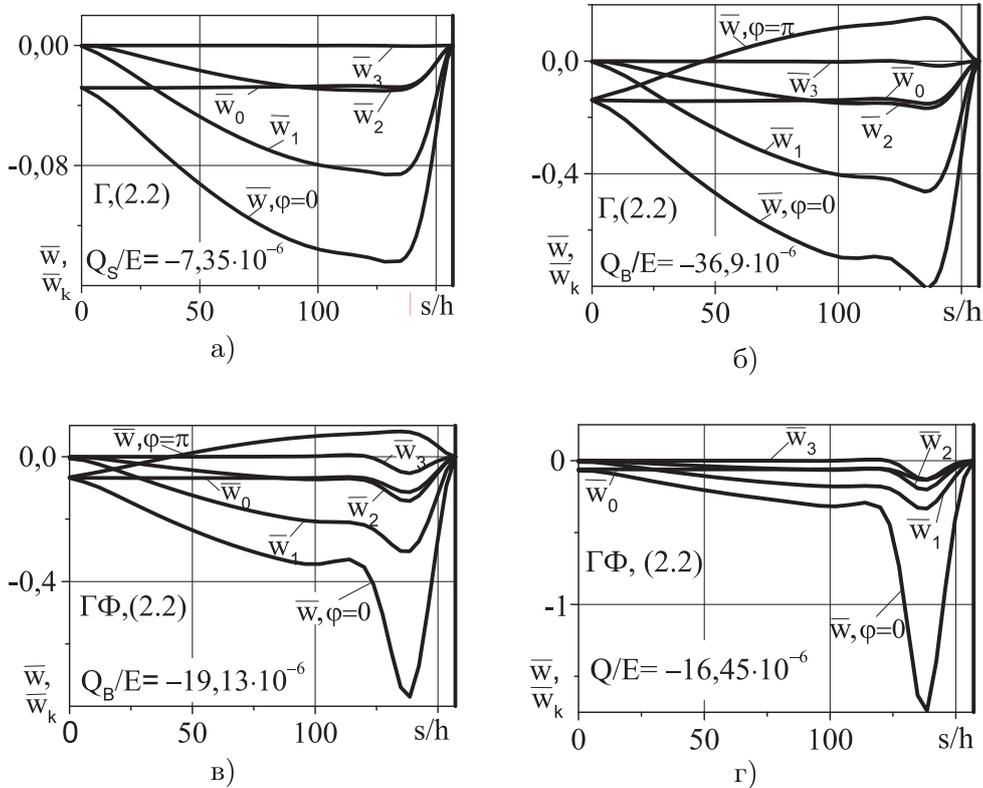


Рис. 7. Эпюры  $\bar{w}$  и  $\bar{w}_k, k = \overline{0, 3}$  по меридиану при  $a/h = 100$ ,  $H/a = 1$ : а)  $Q_s/E$ ;  $\Gamma$ , (2.2), б)  $Q_B/E$ ;  $\Gamma$ , (2.2), в)  $Q_B/E$ ;  $\Gamma\Phi$ , (2.2), г)  $Q/E = -16,45 \cdot 10^{-6}$ ;  $\Gamma\Phi$ , (2.2)

Таблица 4. НДС оболочки с параметрами  $a/h = 100$ ,  $H/a = 0,2$

L		4	6	8	10	12	14
Окрестность $Q_B$ ; $\Gamma$ , (2.2)	$-10^6 \cdot Q/E$	9,39	7,51	6,63	6,24	6,12	6,07
	$-w/h$	2,42	1,41	1,07	0,93	0,87	0,85
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	7,55	6,23	5,50	5,18	5,04	4,99
Окрестность $Q_B$ ; $\Gamma\Phi$ , (2.2)	$-10^6 \cdot Q/E$	6,37	6,03	5,77	5,62	5,57	5,56
	$-w/h$	0,93	0,88	0,76	0,71	0,69	0,68
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	3,20	3,14	3,05	2,99	2,97	2,97

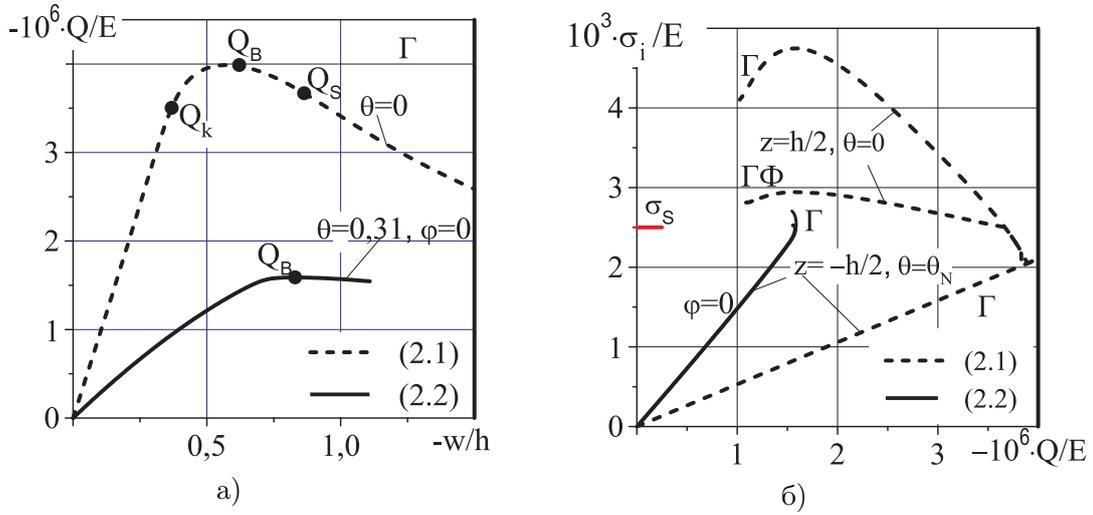


Рис. 8. Зависимости при  $a/h = 200$ ,  $H/a = 0, 2$ : а)  $Q(w)$ , б)  $\sigma_i(Q)$

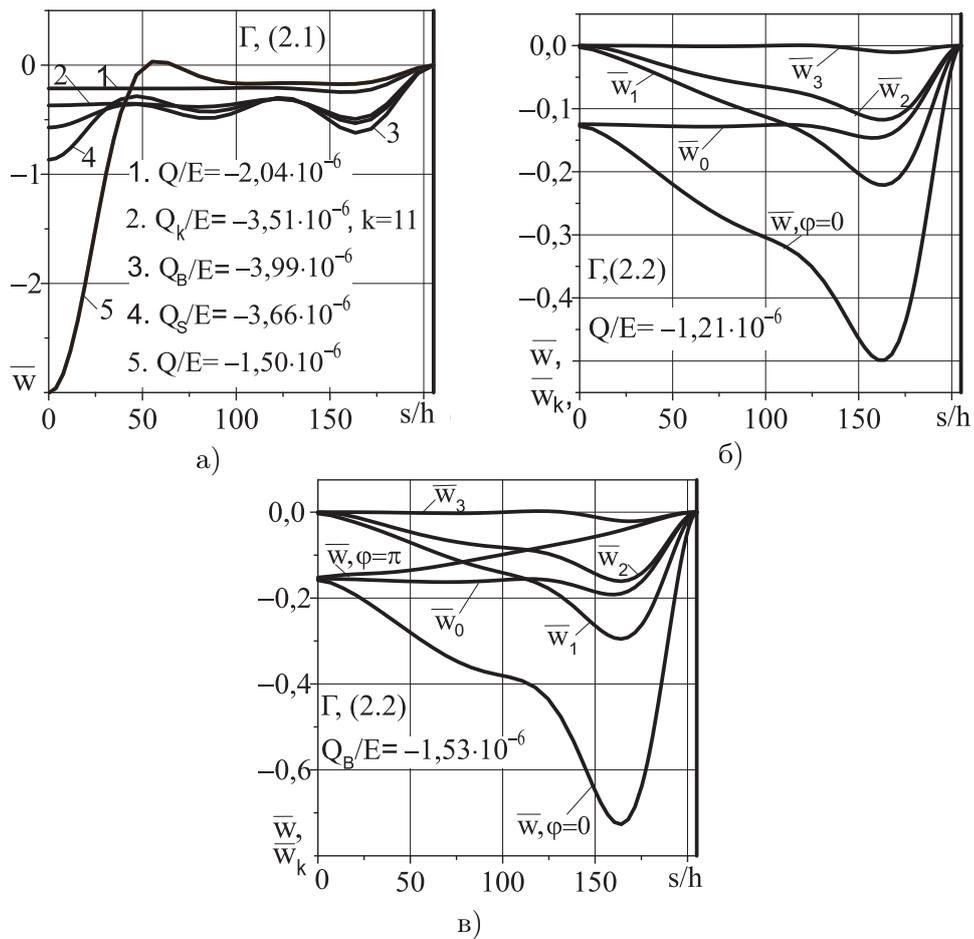


Рис. 9. Эпюры по меридиану при  $a/h = 200$ ,  $H/a = 0, 2$ : а)  $\bar{w}$ ,  $\Gamma$ , (2.1), б)  $\bar{w}$  и  $\bar{w}_k$ ,  $k = 0, 3$ ,  $Q/E = -1, 21 \cdot 10^{-6}$ ;  $\Gamma$ , (2.2), в)  $\bar{w}$  и  $\bar{w}_k$ ,  $k = 0, 3$ ,  $Q_B/E$ ;  $\Gamma$ , (2.2)

Таблица 5. Амплитуды гармоник ряда (1.1) ( $L = 14$ ) для оболочки с параметрами  $a/h = 100$ ,  $H/a = 0,2$

$\bar{Q} = 10^6 \cdot Q/E$	$\bar{Q}_1 = -1,67$	$\bar{Q}_2 = \bar{Q}_S = -3,43$	$\bar{Q}_3 = \bar{Q}_B = -6,07$	$\bar{Q}_4 = -6,03$	$\bar{Q}_5 = -4,09$
$-w/h$	0,15	0,33	0,85	0,93	2,08
$w_1/w_0$	1,30	1,34	1,42	1,43	1,64
$w_2/w_0$	0,68	0,72	0,84	0,86	1,31
$w_3/w_0$	0,02	0,05	0,20	0,23	0,96
$w_4/w_0$	0,01	0,02	0,15	0,20	0,96
$w_6/w_0$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	0,12	0,18	0,78

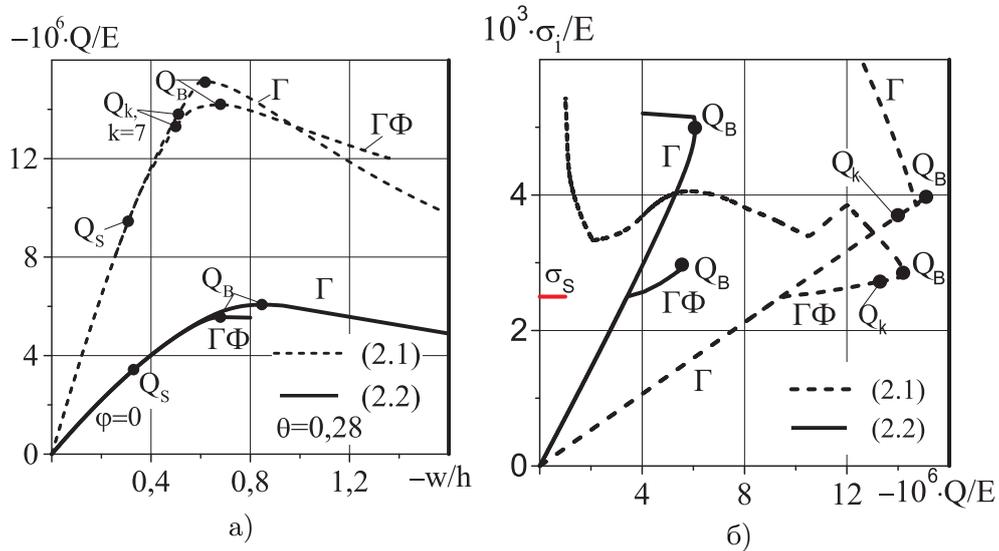


Рис. 10. Зависимости при  $a/h = 100$ ,  $H/a = 0,2$ : а)  $Q(w)$ , б)  $\sigma_i(Q)$

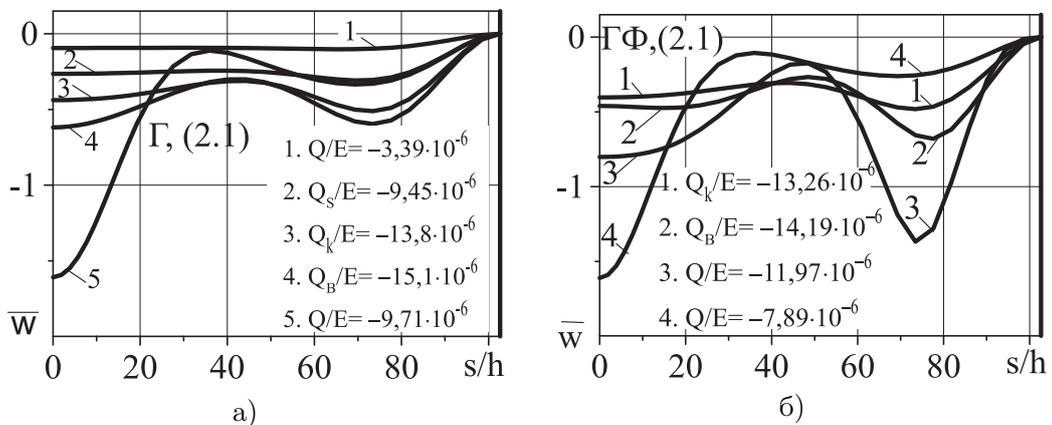


Рис. 11. Эпюры  $\bar{w}$  по меридиану при  $a/h = 100$ ,  $H/a = 0,2$ : а)  $\Gamma$ , (2.1); б)  $\Gamma\Phi$ , (2.1)

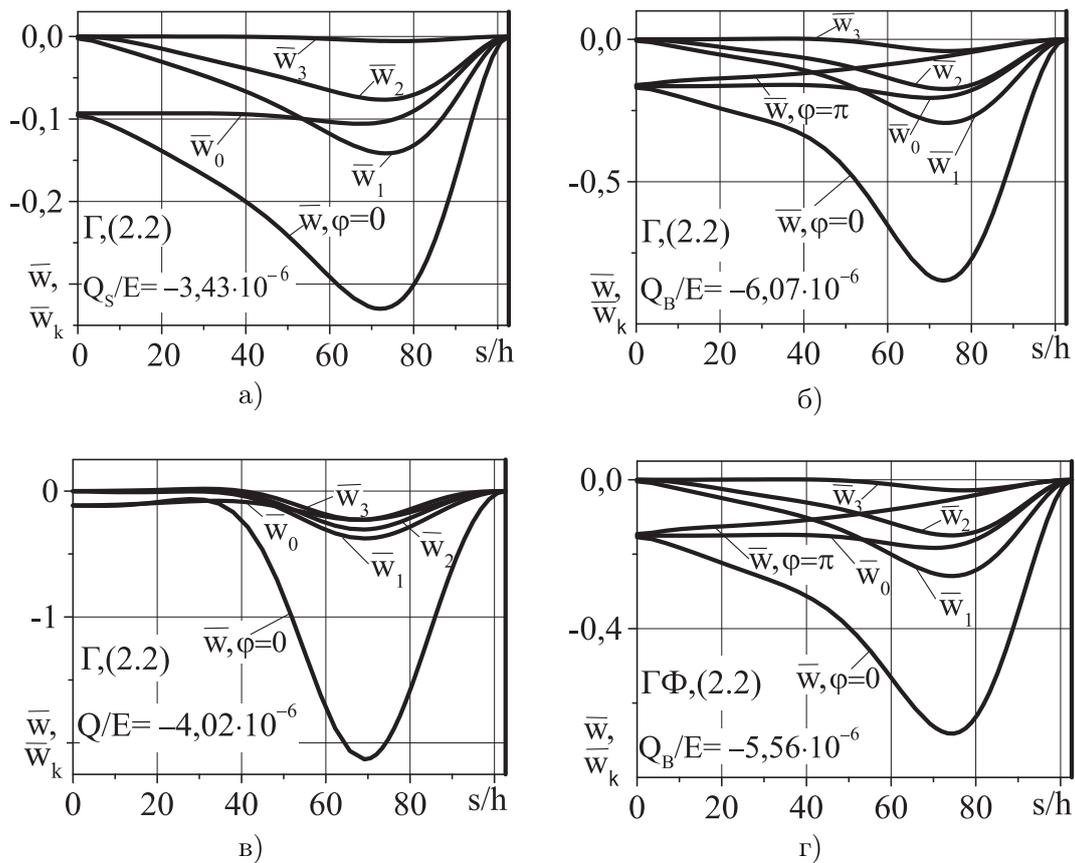


Рис. 12. Эшоры  $\bar{w}$  и  $\bar{w}_k, k = \overline{0, 3}$  по меридиану при  $a/h = 100, H/a = 0, 2$ :  
 а)  $Q_S/E$ ;  $\Gamma, (2.2)$ ; б)  $Q_B/E$ ;  $\Gamma, (2.2)$ ; в)  $Q/E = -4,02 \cdot 10^{-6}$ ;  $\Gamma, (2.2)$ ; г)  $Q_B/E$ ;  $\Gamma\Phi, (2.2)$

$C_1 = 2,5, C_2 = 1,25$ . Вычисления показали, что для получения окрестности  $Q_S$  при нагружении (2.2) достаточно  $L = 4$ :  $Q_S/E = -3,426 \cdot 10^{-6}$ ,  $\max_{s,\varphi} w/h = -0,330$ ,  $\max_{s,\varphi,z} \sigma_i/E = 2,51 \cdot 10^{-3}$ . Из табл. 4 видно, что для получения решения в окрестности верхнего критического значения параметра нагружения  $Q_B$  требуется в рядах (1.1)  $L = 14$  членов.

В табл. 5 показано изменение соотношения между амплитудами некоторых гармоник ряда (1.1) для прогиба с увеличением  $\Gamma$ -нелинейности в процессе деформирования полой сферической оболочки под действием неосесимметричного внешнего давления (2.2) для значений параметра нагрузки  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3$  на восходящей ветви и  $\bar{Q}_4, \bar{Q}_5$  на нисходящей ветви зависимости  $Q(w)$ . Из табл. 5 видно нарастание влияния низших гармоник  $k = 1, k = 2$  и высших гармоник  $k \geq 3$  по сравнению с гармоникой  $k = 0$ .

Из табл. 4 и рис. 10–12 видно, что полая сферическая оболочка с большей толщиной может деформироваться неупруго, по срав-

нению с оболочкой с параметрами  $a/h = 200, H/a = 0, 2$ . Опасные области деформирования оболочки могут наблюдаться в виде вмятин в окрестности полюса (рис. 11а), в виде вмятин в окрестности полюса и кольцевой бороздки в окрестности основания (рис. 11б) или локальной вмятины нагруженного меридиана в окрестности основания (рис. 12а–12г).

Таким образом, в статье представлены результаты численного решения нелинейной краевой задачи о влиянии на изгиб и устойчивость сферических оболочек вида нагружения, геометрических параметров и характеристик материала. Приведенные результаты качественно согласуются с данными статьи [12]. В ней показано на основе обширного экспериментального материала, что форма потери устойчивости сферических сегментов под равномерным внешним давлением различна и зависит от характера начальных неправильностей срединной поверхности оболочки, ее подъемности, толщины, материала. Это разнообразие увеличивается при

действию на оболочку неосесимметричного внешнего давления.

### Литература

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. Физматлит, 1967. 984 с.
2. *Григорюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука. Физматлит, 1978. 360 с.
3. *Ильгамов М. А.* Перестройка гармоник при изгибе цилиндрической оболочки вследствие динамического сжатия // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. №3. С. 167–174.
4. *Андреев Л. В., Ободан Н. И., Лебедев А. Г.* Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. М.: Наука. Физматлит, 1988. 208 с.
5. *Ганеева М. С.* Прочность и устойчивость оболочек вращения. М.: Наука, 1992. 161 с.
6. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Уруго-пластические деформации. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. 376 с.
7. *Ганеева М. С., Моисеева В. Е.* Методика расчета больших прогибов непологих уруго-пластических оболочек вращения при неосесимметричном нагружении // Известия вузов. Авиационная техника, 2007. №4. С. 3–7.
8. *Ганеева М. С., Моисеева В. Е., Скворцова З. В.* Расчет нелинейного напряженно-деформированного состояния непологих оболочек вращения под действием ветровой нагрузки // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2009. №9–10. С. 89–98.
9. *Ганеева М. С., Моисеева В. Е.* Нелинейное деформирование оболочек вращения с полюсом под действием неосесимметричного нагружения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. №3. С. 31–38.
10. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа: Справочное руководство. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
11. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математич. наук. 1961. Т. 16. №3. С. 171–174.
12. *Суркин Р. Г., Степанов С. Г.* Экспериментальное исследование устойчивости сферических сегментов при внешнем равномерно распределенном давлении // Теория пластин и оболочек: Труды II Всес. конф. Львов, 15–21 сентября 1961 г. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. С. 311–313.

Ключевые слова: сферические оболочки, устойчивость, неосесимметричное нагружение.

Статья поступила 27 июня 2012 г.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, г. Казань

© Ганеева М. С., Моисеева В. Е., 2012