

УДК 534.1

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ¹*Горбашова Е. А.², Углич П. С.³*

ON THE INVERSE PROBLEM SOLUTION FOR TWO-DIMENSIONAL DOMAIN

Gorbashova E. A., Ouglich P. S.

Both direct and inverse problems for antiplane enforced vibrations of the elastic rectangular bar are considered. Shear modulus and density of the considered body depend on both coordinates. For the direct problem solving, the finite differences method is used. It reduces the direct problem to a linear equations system, which can be solved using the modified tridiagonal matrix algorithm. The inverse problem of material properties definition using displacement field data is also considered and reduced to the iterative solution of the integral equations sequence.

Keywords: inverse coefficient problems, finite difference method.

Введение

Обратными коэффициентными задачами теории упругости называют задачи, в которых требуется определить коэффициенты дифференциальных операторов по некоторой дополнительной информации о решениях, например, по амплитудно-частотным характеристикам. Первые обратные коэффициентные задачи были посвящены в первую очередь проблемам геофизики и сейсмологии. Долгие годы эти области знания стимулировали развитие математического аппарата и численных методов в этом направлении. В последние годы область приложения таких задач постоянно расширяется. Это проблемы акустического контроля при создании функционально-градиентных материалов (ФГМ), задачи эластографии в медицинской диагностике мягких тканей, контроль скорости восстановления костной ткани в месте перелома, задачи идентификации новых композиционных материалов сложной структуры, неразрушающего контроля элементов конструкций.

Задачи о восстановлении скорости звука с помощью акустического зондирования рассматриваются в [1, 2] и цитируемой там литературе. В [3] доказана единственность решения обратной задачи о восстановлении модуля сдвига в задаче об антиплоских колебаниях ограниченного тела, в статье [4] доказана единственность решения задачи о восстановлении плотности. Отметим большое количество работ, посвященных идентификации модуля сдвига в биологической ткани (или эластографии). В частности, в работах [5–7] излагаются последние результаты исследований по восстановлению параметров биологических тканей из данных ультразвукового исследования.

В настоящей статье рассмотрена задача об определении переменного модуля сдвига в прямоугольном образце по данным о волновом поле на части его границы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим прямую задачу об установившихся вынужденных колебаниях неоднородного упругого тела, занимающего ограничен-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (г/к П596) и Южного математического института, г. Владикавказ.

²Горбашова Екатерина Андреевна, студентка факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: katu0509@mail.ru.

³Углич Павел Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Южного математического института Владикавказского научного центра РАН; e-mail: puglich@inbox.ru.

ную плоскую область S , в условиях антиплоского сдвига.

Поле перемещений имеет вид

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0, \\ u_3 = u(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \end{cases}$$

где ω — частота колебаний.

Уравнение колебаний запишется

$$\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \rho \omega^2 u = 0, \quad (1.1)$$

где $\mu = \mu(x_1, x_2)$ — модуль сдвига, $\rho = \rho(x_1, x_2)$ — плотность материала.

Граничные условия представимы в форме

$$\begin{aligned} l = \partial S = l_u \cup l_\sigma, \quad u|_{l_u} = 0, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{l_\sigma} = p(x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где n — внешняя нормаль к границе области S .

2. Обратная задача

Предположим, что известна информация о перемещениях части границы области и требуется установить характер распределения механических характеристик μ или ρ . Информация, по которой осуществляется реконструкция неизвестных функций, имеет вид

$$u|_{l_\sigma} = f(x, \omega). \quad (2.1)$$

Пусть $v(x_1, x_2)$ — гладкая функция своих переменных, удовлетворяющая главному граничному условию

$$v|_{l_u} = 0. \quad (2.2)$$

Умножим уравнение (1.1) на функцию v и проинтегрируем по площади S

$$\int_S [\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \rho \omega^2 u] v dS = 0. \quad (2.3)$$

Рассмотрим первое подынтегральное слагаемое

$$\nabla \cdot (\mu \nabla u) v = \nabla \cdot (\mu \nabla uv) - \mu \nabla u \cdot \nabla v.$$

Равенство (2.3) с учётом формулы Грина принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{l_\sigma} \mu \nabla u \cdot n v dl - \\ - \int_S [\mu \nabla u \cdot \nabla v - \rho \omega^2 uv] dS = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

или

$$\int_S [\mu \nabla u \cdot \nabla v - \rho \omega^2 uv] dS = \int_{l_\sigma} p(x) v dl. \quad (2.5)$$

Если $v = u$, то равенство (2.5) приобретает вид

$$\int_S [\mu \nabla u \cdot \nabla u - \rho \omega^2 u^2] dS = \int_{l_\sigma} p(x) u dl. \quad (2.6)$$

Проварьируем равенство (2.6) по переменным u , μ и ρ

$$\begin{aligned} \int_S [\delta \mu \nabla u \cdot \nabla u + 2\mu \nabla u \cdot \nabla \delta u - \\ - \delta \rho \omega^2 u^2 - 2\rho \omega^2 u \delta u] dS = \\ = \int_{l_\sigma} p(x) \delta u dl. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Преобразуем подынтегральные слагаемые в левой части равенства (2.7), содержащие δu с учётом (1.1)

$$\begin{aligned} 2\mu \nabla u \cdot \nabla \delta u - 2\rho \omega^2 u \delta u = \\ = 2\nabla \cdot (\mu u \nabla \delta u) - 2[\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \rho \omega^2 u] \delta u = \\ = 2\nabla \cdot (\mu u \nabla \delta u). \end{aligned}$$

Подставляя последнее равенство в (2.7) с учётом граничных условий (1.2) получаем

$$\begin{aligned} \int_S [\delta \mu \nabla u \cdot \nabla u - \delta \rho \omega^2 u^2] dS + \\ + \int_{l_\sigma} p(x) \delta u dl = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вариационное уравнение (2.8) позволяет построить итерационную процедуру для решения обратной коэффициентной задачи. Предположим, что известна плотность в теле и требуется найти модуль сдвига. Выбирается некоторое начальное значение $\mu^0(x)$ и далее строится поле перемещений $u^{(0)}$ при $\mu = \mu^{(0)}$. Далее, если известно $u^{(0)}$, то функция $\mu^{(n)}$

должна удовлетворять уравнению следующего вида:

$$\int_S \mu^{(n)} \nabla u^{(n-1)} \cdot \nabla u^{(n-1)} dS + \int_{l_\sigma} p(x) (p - u^{(n-1)}) dl = 0. \quad (2.9)$$

После решения прямой задачи строится следующее уравнение для отыскания поправки к модулю сдвига μ . Прибавляя к модулю сдвига поправку $\mu^{(n)}$, эти действия выполняются пока очередная поправка не станет меньше определенной величины.

Аналогично может быть рассмотрена задача отыскания неизвестного закона распределения ρ при известном μ . Итерационная последовательность интегральных уравнений приобретает вид

$$-\omega^2 \int_S \rho^{(n)} (u^{(n-1)})^2 dS + \int_{l_\sigma} p(x) (p - u^{(n-1)}) dl = 0.$$

3. Решение прямой задачи для прямоугольника

Предположим, что рассматриваемая область имеет вид прямоугольника $[0, b] \times [-d, d]$, левая сторона которого жёстко закреплена, а к правой приложена нагрузка. Уравнение (1.1) и краевые условия (1.2) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \rho \omega^2 u = 0, \quad (3.1)$$

$$u|_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\pm d} = 0, \quad (3.2)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=b} = p(x_1).$$

Решение задачи (3.1)–(3.2) в случае неоднородных $\mu = \mu(x_1, x_2)$ и $\rho = \rho(x_1, x_2)$ не может быть построено в аналитическом виде. Воспользуемся методом конечных разностей. Преобразуем формулы (3.1)–(3.2) с помощью

метода конечных разностей [9]. Осуществим разбиение прямоугольника на равномерной сетке. Разобьём отрезок $[0, b]$ на N частей, а отрезок $[-d, d]$ на M частей. Шаг разбиения по оси x_1 обозначим $h_1 = b/N$, по оси $x_2 - h_y = 2d/M$.

Приближённые выражения для производных запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{4h_x^2} (\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}) (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) +$$

$$+ \frac{\mu_{i,j}}{h_x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{4h_y^2} (\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j-1}) (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) +$$

$$+ \frac{\mu_{i,j}}{h_y^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}), \quad (3.5)$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq M,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\pm d} = \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h_y} =$$

$$= \frac{u_{i,M+1} - u_{i,M}}{h_y} = 0, \quad (3.6)$$

$$0 \leq i \leq N + 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=b} = \frac{u_{N+1,j} - u_{N,j}}{h_x} = \frac{p_j}{\mu_{N+1,j}}, \quad (3.7)$$

$$0 \leq j \leq M + 1.$$

В последних формулах

$$\mu_{i,j} = \mu(x_1^i, x_2^j), \quad \rho_{i,j} = \rho(x_1^i, x_2^j),$$

$$u_{i,j} = u(x_1^i, x_2^j), \quad x_1^i = h_x i, \quad x_2^j = -d + h_y j.$$

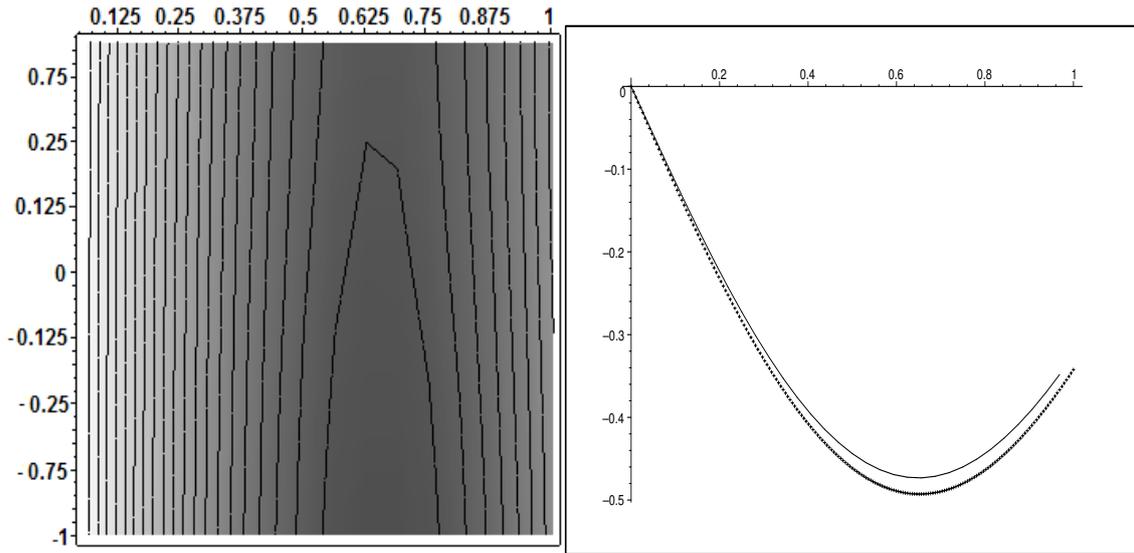


Рис. 1. Результаты решения прямой задачи в случае $\omega = 10000$ Гц, $\mu^0 = 1, 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = \mu^0[1 + 0, 1(x_1 - x_1x_2)]$. Нагрузка $p(x_2) = \mu^0$

Подставляя (3.3)–(3.6) в краевую задачу (3.1)–(3.2), получаем систему линейных алгебраических уравнений с матрицей блочно-диагонального вида

$$\begin{cases} C^0 U^0 - B^0 U^1 = F^0, \\ -A^j U^{j-1} + C^j U^j - B^j U^{j+1} = F^j, \\ \quad \quad \quad 1 \leq j \leq M, \\ -A^N U^{M-1} + C^N U^M = F^M, \end{cases} \quad (3.8)$$

где C^j — трёхдиагональные матрицы с элементами

$$\begin{aligned} C_{i,i}^j &= \rho_{i,j} \omega^2 - 2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \mu_{i,j}, \\ C_{i,i-1}^j &= -\frac{1}{4h_x^2} (\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}) + \frac{1}{h_x^2} \mu_{i,j}, \\ C_{i,i+1}^j &= -C_{i,i-1}^j, \\ C_{N,N}^j &= \rho_{N,j} \omega^2 - \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right) \mu_{N,j}, \\ C_{i,i}^0 &= \rho_{i,1} \omega^2 - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \mu_{i,1}, \\ C_{N,N}^0 &= \rho_{1,1} \omega^2 - \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \mu_{1,1}, \\ C_{i,i}^M &= \rho_{i,M} \omega^2 - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \mu_{i,M}, \\ C_{N,N}^M &= \rho_{N,M} \omega^2 - \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \mu_{N,M}, \end{aligned}$$

$$0 \leq i \leq N-1, \quad 0 < j \leq M-1,$$

$$F_i^j = p(x_2^j), \quad U_i^j = u_{i,j}, \quad 0 < i, j \leq M.$$

В (3.8) A^j, B^j — трёхдиагональные матрицы с элементами

$$A_{i,i}^j = -\frac{1}{4h_y^2} (\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j-1}) + \frac{1}{h_y^2} \mu_{i,j},$$

$$B_{i,i}^j = -A_{i,i}^j.$$

Все остальные элементы матриц A^j, B^j, C^j и векторов F^j ($j = 1, \dots, N$) равны нулю. Система (3.8) может быть решена методом матричной прогонки [9] по формулам

$$\alpha_{j+1} = (C^j - A^j \alpha_j)^{-1} B^j, \quad \alpha_1 = (C^0)^{-1} B^0,$$

$$\beta_{j+1} = (C^j - A^j \alpha_j)^{-1} (F^j + A^j \beta_j),$$

$$\beta_1 = (C^0)^{-1} F^0,$$

$$U^j = \alpha_{j+1} U^{j+1} + \beta_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

$$U^M = \beta_{M+1}.$$

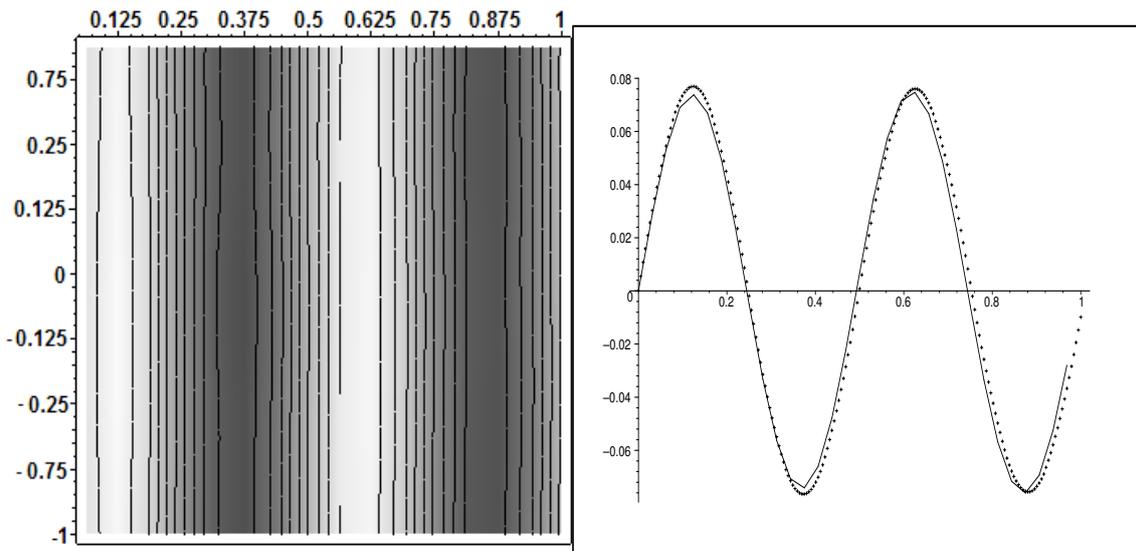


Рис. 2. Результаты решения прямой задачи в случае $\omega = 50000$ Гц, $\mu^0 = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = \mu^0(1 + 0,1x_1)$. Нагрузка $p(x_2) = \mu^0$

4. Численные результаты решения прямой задачи

Для того, чтобы убедиться в достоверности численных результатов решения прямой задачи, произведено сравнение с результатами, полученными в конечноэлементном пакете FlexPDE, а также с известными аналитическими результатами в одномерном случае. Разница между результатами, полученными методом матричной прогонки и методом конечных элементов возрастает с увеличением частоты и в приведенных примерах не превышает 10%.

Далее представлены результаты решения прямой задачи в случае $b = 1$ м, $d = 0,5$ м, $N = M = 16$. Плотность считается постоянной и равной $\rho = 7800$ кг/м³. На рис. 1, 2 изображены результаты расчета амплитуды перемещения $u(x_1, x_2)$, найденные при помощи метода матричной прогонки. Слева на рис. 1, 2 изображены графики функции $u(x_1, x_2)$, темный цвет означает меньшее значение, справа — графики функции $u(x_1, x_2)$ на нижней поверхности прямоугольного бруса. Сплошная линия соответствует решению, найденному методом матричной прогонки, точки — решению, найденному при помощи пакета FlexPDE.

Кроме того, приведено сравнение с аналитическим результатом в случае $\omega = 0$, $\mu = \text{const} = \mu^0$, $p(x_2) = \text{const} = p_0$. В этом случае задача (1.1)–(2.4) имеет аналитиче-

ское решение $u(x_1, x_2) = p_0 x_1 / \mu^0$. Совпадение результатов оказалось полным.

Далее на рис. 3 представлена амплитудно-частотная характеристика в случае двумерной зависимости вида

$$\mu = \mu^0 \left(1 + \eta \sin \frac{\pi x_1}{b} \cos \frac{\pi x_2}{2d} \right).$$

5. Обратная задача

При решении обратной задачи нагрузка считалась заданной в N_1 точках ξ_i , расположенных на отрезке $[-d, d]$. Решение прямой задачи осуществлялось на M_1 частотах, расположенных на отрезке, не содержащем собственных частот. В приведенных ниже примерах $N = M = N_1 = M_1 = 16$. Итерационный процесс останавливался, когда наибольшее по модулю значение очередной поправки не становилось меньше $\varepsilon = 10^{-4}$ или количество итераций не становилось больше некоторого заданного количества. В табл. 1 приведены результаты численных экспериментов в случае

$$\mu = \mu^0 \left(1 + \eta \sin \frac{\pi x_1}{b} \cos \frac{\pi x_2}{2d} \right)$$

при различных значениях амплитуды неровности η , а в табл. 2 — результаты численных экспериментов при $\mu = \mu^0(1 + \eta x_1)$.

Результаты проведенных исследований свидетельствуют о достаточной эффективности предложенного алгоритма.

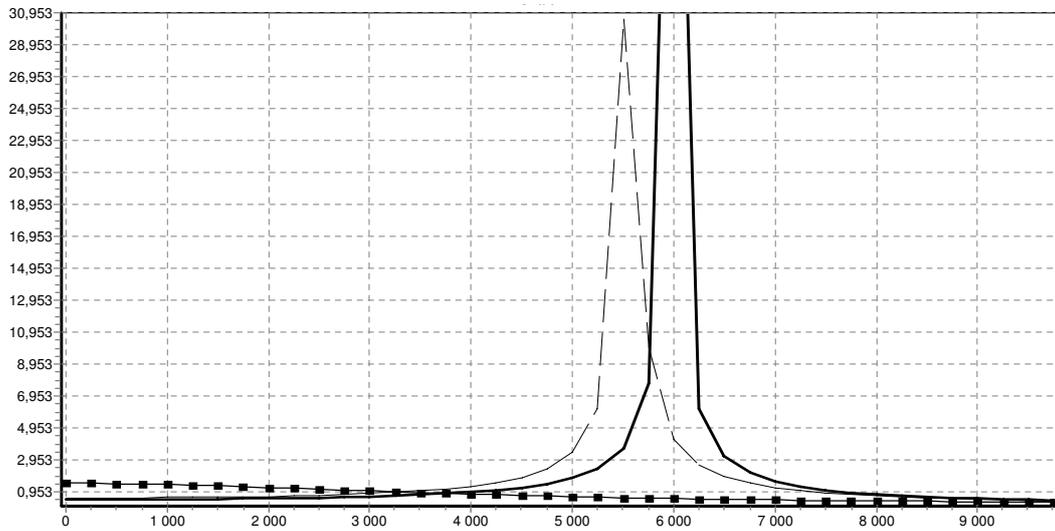


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика. Сплошная линия — АЧХ при $\eta = 0$, пунктир — при $\eta = 0,1$, квадраты — при $\eta = 1$

Таблица 1

Амплитуда неровности	Число итераций	Погрешность (%)	Частотный диапазон
$\eta = 0,01$	3	0,076	[6250; 17750]
$\eta = 0,1$	5	0,43	[6250; 17750]
$\eta = 0,2$	3	0,75	[5750; 18000]
$\eta = 0,3$	3	1,67	[7500; 19250]
$\eta = 0,4$	3	5,93	[4750; 18250]
$\eta = 0,5$	5	0,99	[4000; 18250]

Таблица 2

Амплитуда неровности	Число итераций	Погрешность (%)	Частотный диапазон
$\eta = 0,01$	6	0,076	[6750; 17750]
$\eta = 0,1$	5	0,21	[7000; 18000]
$\eta = 0,2$	5	0,22	[7000; 18500]
$\eta = 0,3$	3	0,39	[7250; 18750]
$\eta = 0,4$	3	0,34	[7500; 19250]
$\eta = 0,5$	4	0,43	[7500; 19500]

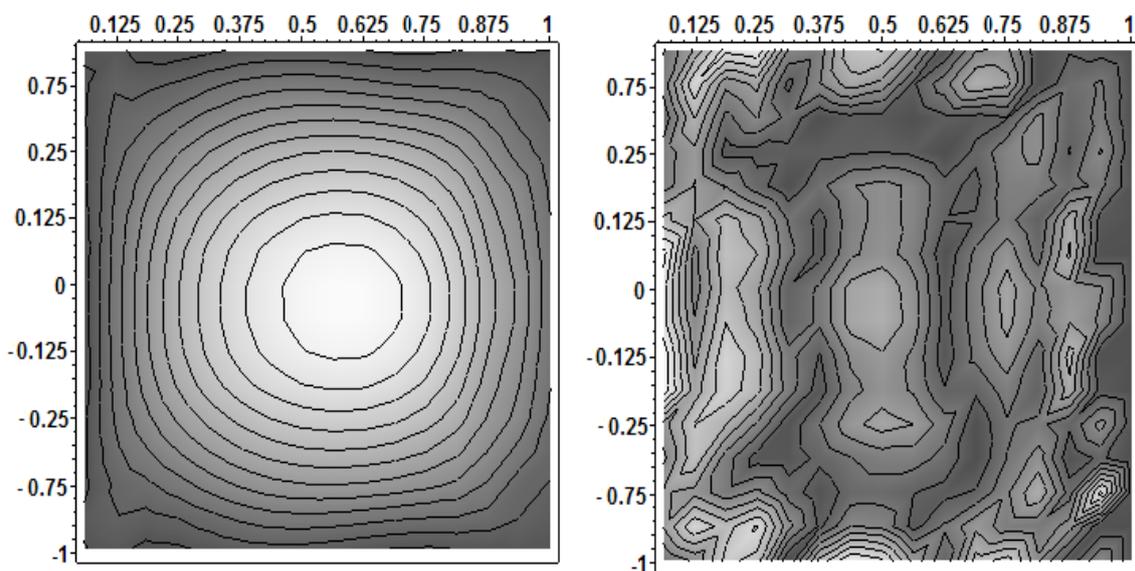


Рис. 4. Результаты решения обратной задачи в случае $\mu = \mu^0 \left(1 + 0,1 \sin \frac{\pi x_1}{b} \cos \frac{\pi x_2}{2d}\right)$, $\mu = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па, $\omega \in [6250, 17750]$, слева — решение обратной задачи, справа — погрешность между точным и найденным решением, наибольшая погрешность — 0,436%, достигнута за 5 итераций

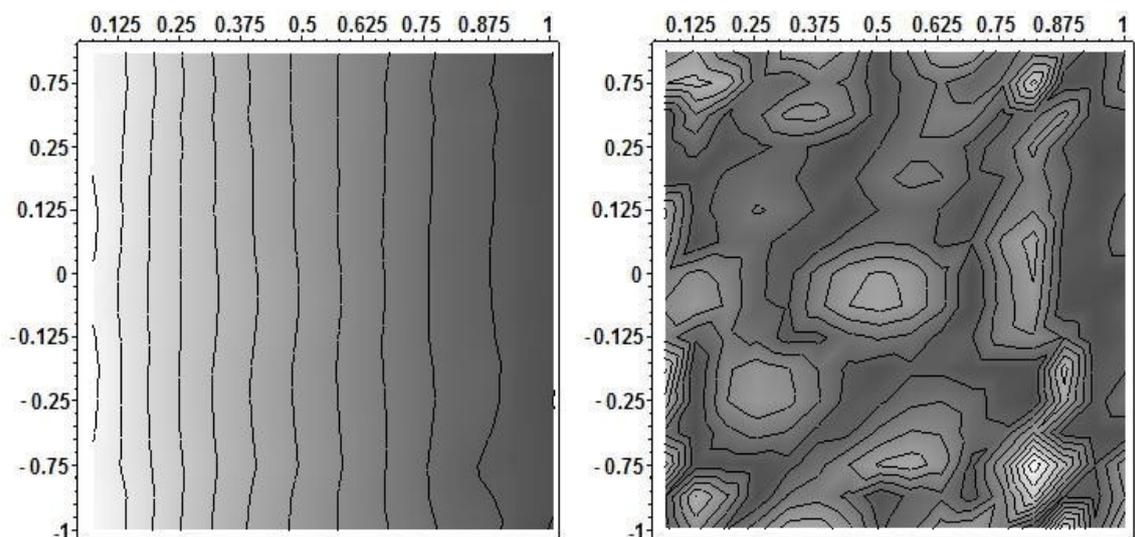


Рис. 5. Результаты решения обратной задачи в случае $\omega \in [8250, 19750]$, $\mu = \mu^0 [1 + 0,2 \exp(-x_1)]$, $\mu = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па, слева — решение обратной задачи, справа — погрешность между точным и найденным решением, наибольшая погрешность — 0,437%, достигнута за 3 итерации

Литература

1. *Cox S. J., Gockenbach M. S.* Recovering planar Lamé moduli from a single-traction experiment // *Math. Mech. Solids*. 1997. Vol. 2. P. 297–306.
2. *Gockenbach M. S., Khan A. A.* Identification of Lamé parameters in linear elasticity: a fixed point approach // *J. Indust. Manag. Optim.* 2005. Vol. 1. No. 4. P. 487–497.
3. *Rachele L. V.* An Inverse Problem in Elastodynamics: Uniqueness of the wave speeds in the interior // *J. Diff. Eqs.* 2000. Vol. 162 (2). P. 300–325.
4. *Rachele L. V.* Uniqueness of the density in an inverse problem for isotropic elastodynamics // *Transactions of the American Mathematical Society*. 2003. Vol. 355. № 12. P. 4781–4806.
5. *McLaughlin J., Yoon J.-R.* Arrival times for the wave equation // *Communications on Pure and Applied Mathematics (CPAM)*. 2011. Vol. 64. No. 3. P. 313–327.
6. *Lin K., McLaughlin J., Thomas A., Parker K., Castaneda B. and Rubens D.* Two-dimensional shear wave speed and crawling wave speed recoveries from in vitro prostate data // *Journal of Acoustical Society of America*. 130(1). P. 585–598.
7. *Lin K., McLaughlin J., Renzi D., Thomas A.* Shear wave speed recovery in sonoelastography using crawling wave data // *Journal of the Acoustical Society*. July 2010. 128(1). P. 88–97.
8. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
9. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: БИНОМ, 2004. 636 с.
10. *Ватумлян А. О.* Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // *ДАН*. 2005. Т. 405 № 3. С. 343–345.

Ключевые слова: обратные коэффициентные задачи, метод конечных разностей.

Статья поступила 27 апреля 2012 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
Владикавказский научный центр РАН, г. Владикавказ
© Горбашова Е. А., Углич П. С., 2012