УДК 531.375

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ДВУХ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБРАЗОВАНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ДЕФЕКТА В ПРОСТРАНСТВЕННОМ СЛУЧАЕ

***Дунаев В. И.*[1], *Лозовой С. Б.*[2], *Молдаванов С. Ю.*[3]**

ENERGETIC CONDITION OF FRAGILE DISTRUCTION FOR TWO CLASSICAL MODELS FORMATION OF ISOLATED DEFECT IN SPACE CASES

Dunaev V. I., Lozovoy S. B., Moldavanov S. Y.

In a given work the analysis of a power condition of fragile destruction of Griffith's type for two known models of formation of the isolated defect is carried out. Unlike Griffith's conditions from the offered conditions different critical pressure follow from pressures different upon its absolute value which depend on elastic constants and as well as on temperature and the coefficient of thermal expansion.

Keywords: ragile distruction, energy conditions, defect models.

Введение

В работах [1, 2] предлагается энергетическое условие хрупкого разрушения твердых тел при образовании изолированного дефекта в случае однократного статического нагружения при постоянной температуре. Приводится анализ этого условия при плоском напряженном состоянии и плоской деформации для двух классических моделей изолированного дефекта [3, 4]. В первой модели на внешней поверхности. В первой модели на внешней поверхности тела до и после образования дефекта заданы одни и те же напряжения. Во второй модели на внешней поверхности тела с дефектом заданы перемещения, соответствующие приложенной нагрузке, но до того, как в теле образовался дефект. На поверхности дефекта в обоих случаях напряжения полагаются равными нулю. Доказывается, что первая модель приводит к известному условию Гриффитса, из которого следуют одинаковые по абсолютной величине критические напряжения, что противоречит экспериментальным характеристикам практически для всех хрупких материалов. Вторая модель приводит к условию типа Гриффитса, из которого следуют различные по абсолютной величине критические напряжения, зависящие от упругих постоянных, температуры, коэффициента теплового расширения и характерного размера дефекта.

В данной работе проведен анализ предложенного энергетического условия в пространственном случае и получены аналогичные плоскому случаю результаты. Рассмотрена модельная задача о разрушении сферы с дефектом сферической формы при всестороннем растяжении и сжатии, качественно устанавливающая величину критических напряжений и их зависимость от указанных выше параметров.

1. Анализ энергетического условия хрупкого разрушения для двух моделей изолированного дефекта

Для тел, подчиняющихся вплоть до разрушения закону Гука, в изотермических условиях (температура $T = T_0 = \text{const}$)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta; \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

[1]Дунаев Владислав Игоревич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры строительной механики и сопротивления материалов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru.

[2]Лозовой Станислав Борисович, канд. физ.-мат. наук доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru.

[3]Молдаванов Сергей Юрьевич, канд. физ.-мат. наук доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru.

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad (1.2)$$

ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; u_i — компоненты вектора перемещений; x_i — координаты точек тела; $\theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$; δ_{ij} — символ Кронекера;

$$\mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(2+\nu)\,(1-2\nu)};$$

E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

В [1,2] предложено условие хрупкого разрушения

$$dW = 0, \quad W = U - A - \gamma\Sigma, \qquad (1.3)$$

где W — полная энергия тела при образовании в нем новой поверхности Σ (площади Σ), которая состоит из высвобождающейся внутренней энергии $U = U^{(0)} - U^{(1)}$, работы внешних сил $A = A^{(0)} - A^{(1)}$ и энергии $\gamma\Sigma$, затраченной на образование поверхности дефекта Σ.

Здесь γ — удельная внутренняя энергия, «в среднем» затраченная на образование единицы поверхности дефекта.

Следуя [5, 6], термодинамические величины, определяющие высвобождающуюся внутреннюю энергию, с учетом закона Гука (1.1) при $T = T_0 = \mathrm{const}$ имеют вид

$$u = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + 3\alpha_0 T_0 K_0 \theta, \qquad (1.4)$$

где u — удельная внутренняя энергия тела; α_0 — коэффициент теплового расширения;

$$K_0 = \frac{E}{3\,(1-2\nu)}.$$

В правую часть выражения (1.4) входят два слагаемых, первое представляет работу деформации, второе определяется взаимодействием поля деформации и поля температуры [5, 6] и имеет заведомо ненулевое значение при стационарной температуре $T = T_0 = \mathrm{const}$. Это слагаемое может быть названо энтропийной составляющей удельной внутренней энергии. Рассмотрим энергетическое условие (1.3) для двух известных моделей [3, 4] образования изолированного дефекта.

В модели (А) на внешней поверхности тела S_0 до и после образования изолированного дефекта Σ заданы одни и те же напряжения, а на поверхности дефекта напряжения равны нулю. В этой модели внешние силы совершают работу на внешней поверхности S_0 на перемещениях, вызванных образованием дефекта.

В модели (В) на внешней поверхности тела S_0 зафиксированы перемещения, которые соответствуют приложенной нагрузке, но до того, как образовался дефект. На поверхности дефекта Σ в модели (В) напряжения также равны нулю. На поверхности S_0 при образовании дефекта $dA = 0$, так как перемещения фиксированы. Для рассматриваемых моделей объемные силы X_i полагаются равными нулю.

Сформулируем краевые задачи, соответствующие моделям (А) и (Б), из решения которых определяется высвобождающаяся удельная внутренняя энергия, входящая в условие разрушения (1.3)

$$\mu\Delta u_i^{(0)} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial x_i} = 0, x_i \in V_0, \quad i = 1,2,3,$$

при граничных условиях

$$p_i = \sigma_{ij}^{(0)} n_j = \mu\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i}\right) n_j + \lambda\theta^{(0)} n_i, \qquad (1.5)$$

$$x_i \in S_0, \quad i,j = 1,2,3.$$

Напряженно-деформированное состояние твердого тела после образования в нем дефекта для модели (А) описывает следующая краевая задача теории упругости:

$$\mu\Delta u_i^{(1)} + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x_i} = 0, x_i \in V_1, \quad i = 1,2,3,$$

при граничных условиях

$$p_i = \sigma_{ij}^{(1)} n_j = \mu\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i}\right) n_j + \lambda\theta^{(1)} n_i,$$

$$x_i \in S_0, \quad i,j = 1,2,3,$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} n_j = 0, \quad x_i \in \Sigma. \qquad (1.6)$$

Отметим, что в этих краевых задачах на границе тела заданы только напряжения.

Напряженно-деформированному состоянию твердого тела после образования в нем дефекта для модели (В) соответствует следующая краевая задача

$$\mu\Delta u_i^{(1)} + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x_i} = 0,$$

$$x_i \in V_1, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$u_i^{(1)} = u_i^{(0)}, \quad x_i \in S_0.$$
$$\sigma_{ij}^{(1)} n_j = 0, \quad x_i \in \Sigma, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.7}$$

В соответствии с моделью образования дефекта (B) для решения краевой задачи (1.7) функции $u_i^{(0)}$ определяются из решения краевой задачи (1.5).

Интегралы внутренней энергии (1.3) с учетом выражения (1.4) имеют вид

$$U = U^{(0)} - U^{(1)} = \\ = \left(U_p^{(0)} - U_p^{(1)}\right) + T_0\left(S^{(0)} - S^{(1)}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{V_0} \sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)} dv - \int\limits_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)} dv\right) + \\ + 3\alpha_0 T_0 K_0 \left(\int\limits_{V_0} \varepsilon_{ij}^{(0)}\delta_{ij} dv - \int\limits_{V_1} \varepsilon_{ij}^{(1)} dv\right), \tag{1.8}$$
$$i, j = 1, 2, 3,$$

где $U_p = U_p^{(0)} - U_p^{(1)}$ и $S = S^{(0)} - S^{(1)}$ — приращение потенциальной энергии и приращение энтропийной составляющей внутренней энергии соответственно, V_0 — объем тела без дефекта, V_1 — объем тела с дефектом, а V — объем дефекта.

Рассмотрим выражения для полной энергии W(1.1) в случае моделей (A) и (B). Для вычисления первых двух интегралов в выражении (1.8) используем теорему взаимности:

$$\sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(0)}.$$

Тогда с учетом работы внешних сил

$$A = \oint\limits_{S_0} \sigma_{ij}^{(0)}\left(u_i^{(0)} - u_i^{(1)}\right) n_j ds,$$

и выражения (1.3) для полной энергии W получаем

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{V_1}\left(\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(0)} - \varepsilon_{ij}^{(1)}\right) dv + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{V} \sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)} dv - \oint\limits_{S_0} \sigma_{ij}^{(0)}\left(u_i^{(0)} - u_i^{(1)}\right) n_j ds + \\ + 3\alpha_0 T_0 K_0 \left(\int\limits_{V_0} \varepsilon_{ij}^{(0)}\delta_{ij} dv - \int\limits_{V_1} \varepsilon_{ij}^{(1)} dv\right) - \\ - \gamma\Sigma. \tag{1.9}$$

Здесь $V = V_0 - V_1$, n_j — направляющие косинусы внешней нормали $\mathbf{n}$ к поверхности тела.

Для дальнейшего преобразования выражения (1.9) используем формулу Остроградского и ее следствия. Согласно формуле Остроградского для функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывных вместе со своими производными первого порядка в области V, ограниченной замкнутой поверхностью D, имеем

$$\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \iint\limits_{D} P dx_2 dx_3 + \iint\limits_{D} Q dx_3 dx_1 + \iint\limits_{D} R dx_1 dx_2.$$

Представив $P = fg$ и положив $Q = R = 0$ из формулы Остроградского получим

$$\iiint\limits_{V} f\frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = -\iiint\limits_{V} g\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \\ + \iint\limits_{D} fg dx_2 dx_3. \tag{1.10}$$

Аналогичные выражения имеем для $Q = fg$, $P = R = 0$ и $R = fg$, $P = Q = 0$.

Для уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

имеем

$$\iiint\limits_{V}\left[x_1\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}\right) + \\ + x_2\left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}\right) + \\ + x_3\left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\right)\right] dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = 0. \tag{1.11}$$

Тогда из соотношения (1.10), а также двух других аналогичных соотношений и равенства (1.11) получаем

$$\iiint\limits_{V} \sigma_{ij}\delta_{ij} dv = \iint\limits_{D} x_i\sigma_{ij} n_j ds. \tag{1.12}$$

Покажем, что в случае модели (А) два последних интеграла в формуле (1.8) равны, т.е. приращение энтропийной составляющей внутренней энергии обращается в ноль. Это следует непосредственно из равенства (1.12).

Действительно, из закона Гука (1.1) имеем

$$\varepsilon_{ij}\delta_{ij} = K\sigma_{ij}\delta_{ij}, \qquad (1.13)$$

где

$$K = \frac{1}{2\left(3\mu+\lambda\right)}.$$

С учетом соотношений (1.13), (1.12), а также граничных условий (1.6), соответствующих модели (А), получаем

$$\int\limits_{V_0} \varepsilon_{ij}^{(0)}\delta_{ij}dv - \int\limits_{V_1} \varepsilon_{ij}^{(1)}\delta_{ij}dv = \\ = K\left(\int\limits_{V_0} \sigma_{ij}^{(0)}\delta_{ij}dv - \int\limits_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)}\delta_{ij}dv\right) = \\ = K\left(\iint\limits_{S_0} x_i\sigma_{ij}^{(0)}n_jds - \iint\limits_{S_0} x_i\sigma_{ij}^{(1)}n_jds + \right. \\ \left. + \iint\limits_{\Sigma} x_i\sigma_{ij}^{(1)}n_jds\right) = 0. \qquad (1.14)$$

Итак, приращение энтропийной составляющей внутренней энергии в случае модели (А), равна нулю.

Для преобразования первых двух интегралов в выражении (1.9) используем соотношение Коши (1.2), формулу Остроградского и уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial\sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_i} = 0, i, j = 1,2,3.$$

Тогда соотношения (1.9) с учетом равенства (1.14) принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\iint\limits_{S_0+\Sigma}\left(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}^{(1)}\right)\left(u_i^{(0)}-u_i^{(1)}\right)n_jds + \\ + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(0)}n_jds - \\ - \iint\limits_{S_0}\sigma_{ij}^{(0)}\left(u_i^{(0)}-u_i^{(1)}\right)n_jds - \gamma\Sigma = \\ = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(1)}n_jds - \gamma\Sigma. \qquad (1.15)$$

Подставляя выражения (1.15) в условие (1.3), получаем критерий Гриффитса в следующем виде (при $\gamma = \text{const}$)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{da}\left(\iint\limits_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(1)}n_jds\right) - \gamma\frac{d\Sigma}{da} = 0. \qquad (1.16)$$

Проведем вычисление приращения полной энергии Wдля модели (В). В этом случае работа внешних сил равна нулю. Исходя из выражения (1.9), формулы Остроградского и уравнений равновесия получаем

$$W = U - \gamma\Sigma = \\ = \frac{1}{2}\iint\limits_{S_0+\Sigma}\left(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}^{(1)}\right)\left(u_i^{(0)}-u_i^{(1)}\right)n_jds + \\ + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(0)}n_jds + \\ + \alpha_0T_0K_0\left(\iint\limits_{S_0+\Sigma}\left(u_i^{(0)}-u_i^{(1)}\right)\delta_{ij}n_jds + \right. \\ \left. + \iint\limits_{\Sigma}u_i^{(0)}\delta_{ij}n_jds\right) - \gamma\Sigma.$$

С учетом граничных условий (1.7), соответствующих модели (В),

$$W = U - \gamma\Sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(1)}n_jds + \\ + \alpha_0T_0K_0\iint\limits_{\Sigma}u_i^{(1)}\delta_{ij}n_jds - \gamma\Sigma. \qquad (1.17)$$

Подставляя выражения (1.17) в условия (1.3), будем иметь

$$\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)}u_i^{(1)}n_jds + \right. \\ \left. + \alpha_0T_0K_0\iint\limits_{\Sigma}u_i^{(1)}\delta_{ij}n_jds\right) - \\ - \frac{d\left(\gamma\Sigma\right)}{da} = 0. \qquad (1.18)$$

Следовательно, модель образования дефекта (В) приводит к условию (1.18), в котором приращение энтропийной составляющей внутренней энергии в общем случае не обращается в нуль, что является существенным отличием предлагаемого условия (1.18) от известного условия Гриффитса (1.15).

2. Модельная задача

Полученное условие используем для определения критических размеров дефекта сферической формы радиуса a при растяжении (сжатии) сферы радиуса b под действием всесторонней равномерно распределенной нагрузки P. При отсутствии массовых сил ($x_i = 0$) уравнения равновесия в перемещениях принимают вид

$$\mu\Delta u_i + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,3. \quad (2.1)$$

Поскольку деформация сферы со сферическим дефектом в ее центре симметрична относительно центра сферы, в котором примем начало координат x_i, решение уравнения (2.1) ищем в форме

$$u_i = \varphi(r)x_i, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (2.2)$$

Подставляя решение (2.2) в уравнение (2.1), находим, что функция $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{4}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

общий интеграл которого будет

$$\varphi(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^3}, \quad (2.3)$$

причем, имеет место соотношение

$$\theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij} = 3\varphi + r\frac{d\varphi}{dr} = 3C_1. \quad (2.4)$$

Обозначая через $p(r)$ величину нормального напряжения на площадке, перпендикулярной к радиусу r, с учетом граничных условий (1.5), (1.6) и (1.7) находим

$$p(r) = \lambda\theta + 2\mu\frac{d}{dr}\left(\frac{u_i x_i}{r}\right) = (3\lambda+2\mu)C_1 - \frac{4\mu}{r^3}C_2. \quad (2.5)$$

Для задачи об образовании дефекта в соответствие с моделью (B), используя решение (2.2) и выражение (2.5), приходим к следующим значениям напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} u_i^{(0)} &= P(1-2\nu)x_i/E, \\ \sigma_{11}^{(0)} &= \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = P, \\ \sigma_{12}^{(0)} &= \sigma_{13}^{(0)} = \sigma_{23}^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$u_i^{(1)} = \varphi(r)x_i, \quad \varphi(r) = C_1(B) + \frac{C_2(B)}{r^3}, \quad (2.7)$$

$$C_1(B) = \frac{2P(1-2\nu)}{E[2+(1+\nu)a^3/((1-2\nu)b^3)]}, \quad (2.8)$$

$$C_2(B) = \frac{Pa^3}{E[2/(1+\nu)+a^3/((1-2\nu)b^3)]},$$

где a — радиус дефекта, b — радиус сферы. Постоянные $C_1(B)$ и $C_2(B)$ определены из граничных условий, соответствующих модели образования дефекта (B): при $r = b$, $u_i^{(1)} = u_i^{(0)}$ и при $r = a$, $p(a) = 0$, где из (2.5)

$$p(r) = \frac{E}{1-2\nu}C_1(B) - \frac{2E}{(1+\nu)r^3}C_2(B).$$

Подставляя решения (2.6), (2.7) с учетом (2.8) в выражение (1.17) при $n_i = x_i/r$,

$$ds = a^2\sin\theta d\theta d\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$\Sigma = 4\pi a^2, \quad \gamma = \text{const}$$

после интегрирования получаем

$$W = \frac{3\pi a^3(1-2\nu)}{E\left[1+\frac{a^3(1+\nu)}{3b^3(1-2\nu)}\right]}(P^2 + 2\alpha_0 T_0 K_0 P) - 4\gamma\pi a^2. \quad (2.9)$$

Используя выражение (2.9) и энергетическое условие (1.18) получим уравнение

$$P^2 + 2\alpha_0 T_0 K_0 P - \frac{8\gamma E}{9a(1-2\nu)}\left(1+\frac{a^3(1+\nu)}{3b^3(1-2\nu)}\right)^2 = 0,$$

откуда находим критические напряжения при растяжении P^+ и сжатии P^-

$$P^{\pm} = -\alpha_0 T_0 K_0 \pm \sqrt{\mu}, \quad (2.10)$$

$$\mu = (\alpha_0 T_0 K_0)^2 + \frac{8\gamma E}{9a(1-2\nu)}\left(1+\frac{a^3(1+\nu)}{3b^3(1-2\nu)}\right)^2.$$

При этом

$$P^+ + P^- = -2\alpha_0 T_0 K_0, \quad (2.11)$$

$$P^+P^- = -\frac{8\gamma E}{9a(1-2\nu)}\left(1+\frac{a^3(1+\nu)}{3b^3(1-2\nu)}\right)^2.$$

При $b \to \infty$ выражения (2.9)–(2.11) существенно упрощаются

$$W = \frac{3\pi a^3(1-2\nu)}{E}(P^2 + 2\alpha_0 T_0 K_0 P) - 4\gamma\pi a^2,$$

$$P^{\pm} = -\alpha_0 T_0 K_0 \pm \sqrt{(\alpha_0 T_0 K_0)^2 + \frac{8\gamma E}{9a(1-2\nu)}},$$
$$P^+ + P^- = -2\alpha_0 T_0 K_0,$$
$$P^+ P^- = -\frac{8\gamma E}{9a(1-2\nu)}.$$

Заметим, что, например, при $a/b < 0,2$, полученные формулы дают погрешность менее чем 0,5% в сравнении с формулами (2.9)–(2.11).

Вычислим, используя решение (2.2) и выражения (2.4), (2.5), приращения энтропийной составляющей внутренней энергии (1.8) при образовании дефекта в соответствии с моделью (A)

$$T_0(S^{(0)} - S^{(1)}) =$$
$$= \alpha_0 T_0 K_0 \left(\int\limits_{V_0} \varepsilon_{ij}^{(0)} \delta_{ij} d\text{v} - \int\limits_{V_1} \varepsilon_{ij}^{(1)} \delta_{ij} d\text{v} \right) =$$
$$= 3\alpha_0 T_0 K_0 \left(\int\limits_{V_0} C_1^{(0)}(A) d\text{v} - \int\limits_{V_1} C_1^{(1)}(A) d\text{v} \right),$$

где

$$C_1^{(0)}(A) = \frac{P}{K_0}, \quad C_1^{(1)}(A) = \frac{Pb^3}{K_0(b^3 - a^3)}$$

определены из граничных условий задачи, соответствующих модели (A): $p^{(1)}(a) = 0$ при $r = a$ и $p^{(1)}(a) = p^{(0)}(b) = P$ при $r = b$. Тогда после элементарных вычислений получим

$$T_0(S^{(0)} - S^{(1)}) = 0.$$

Следовательно, при образовании дефекта в соответствии с моделью (A) энтропия тела с дефектом равна энтропии тела без дефекта и не зависит от характерного размера дефекта a, что в общем случае было показано выше. Поэтому высвобождающаяся энтропия тела при образовании в нем дефекта (для модели (A)) равна нулю.

Для модели дефекта (B) энтропийная составляющая внутренней энергии отлична от нуля, вследствие чего, формулы (2.10) дают качественно правильные значения критических напряжений при растяжении P^+ и сжатии P^- в зависимости от физико-механических постоянных материала, линейного коэффициента теплового расширения α_0, температуры T_0 и размера дефекта a.

Литература

1. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Об энергетическом условии разрушения твердых тел // ДАН. 2000. Т. 372. №1. С. 43–45.
2. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Энергетическое условие разрушения твердых тел // Механика твердого тела. М.: 2003. №6. С. 69–81.
3. *Гудьер Дж.* Математическая теория равновесных трещин // Разрушение. М.: Мир. Т. 2. 1975. С. 13–82.
4. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир. Т. 2. 1975. С. 83–203.
5. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Из-во МГУ, 1990. 310 с.
6. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, энергетические условия, модели дефекта.

Статья поступила 31 августа 2012 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар