

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЧИСТОГО ИЗГИБА УПРУГОЙ ПАНЕЛИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ¹

Карякин М. И.², Сухов Д. Ю.³, Шубчинская Н. Ю.⁴

THE SPECIFIC FEATURES OF THE PURE BENDING OF THE ELASTIC PANEL UNDERGOING LARGE STRAINS

Karyakin M. I., Sukhov D. Yu., Shubchinskaya N. Yu.

Within the framework of the semi-inverse method of three-dimensional nonlinear elasticity we consider the problem of the equilibrium and stability of a rectangular panel undergoing pure bending. By using two different models of compressible nonlinear elastic media — semi-linear material and Blatz & Ko material — the boundary value problems of the panel equilibrium were formulated and their numerical analysis was performed. For both models it was found that the loading diagram — the dependence of the bending moment on the angle of the bend — has a maximum point followed by a falling part. Using the bifurcation approach the problem on the stability of bent panel was studied. For this purpose the linearization of the equilibrium equations in the neighborhood of the constructed solution was performed and the possibility of the existence of nontrivial solutions of the resulting linear problem was investigated. An unusual feature of the panel instability under bending, discovered in this paper, is the existence of bifurcation points on the increasing section of the loading diagram. Analytical transformations associated with the derivation of nonlinear boundary value problems and the generation of equations of neutral equilibrium were performed using the automation system for semi-inverse method of nonlinear elasticity developed by the authors in the environment of computer algebra system Maple.

Keywords: bending, semi-inverse method, nonlinear elasticity, large strains, stability, bifurcation point.

Введение

Главной задачей настоящей работы является исследование устойчивости изгиба тонкой плиты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, в цилиндрическую панель. Актуальность исследования связана с тем, что деформация чистого изгиба (наряду с растяжением и кручением) является одной из базовых при экспериментальном определении и верификации параметров модели упругого, в частности, нелинейно-упругого, поведения материалов. В свою очередь определение характеристик этих моделей — функциональных зависимостей и их

параметров особенно актуально в связи с необходимостью разрабатывать адекватные модели механического поведения биоматериалов и их искусственных заменителей из высокоэластичных материалов. Другая причина, объясняющая интерес к классическим, на первый взгляд, задачам, связана с проблемой адекватного описания механических свойств композиционных материалов, представляющих собой матрицу с относительно жесткими волокнами. В этом случае, например, при расчетах на прочность, необходимо учитывать возможность разрушения композита вследствие потери устойчивости, в том числе и при изгибе, отдельными волокна-

¹Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг (Соглашение 14.А18.21.0389)

²Карякин Михаил Игоревич, канд. физ.-мат. наук, декан факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: karyakin@math.sfedu.ru.

³Сухов Дмитрий Юрьевич, ассистент кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: devitor@mail.ru.

⁴Шубчинская Наталия Юрьевна, аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: natalieshubchinskaya@gmail.com.

ми [1]. Задача о потере устойчивости при изгибе в рамках нелинейной теории упругости может представлять интерес и для тестирования различных теорий и численных схем исследования устойчивости упругих труб, основывающихся, как правило, на различных вариантах теории оболочек [2].

Второй целью работы является демонстрация возможностей системы автоматизации полубратного метода нелинейной теории упругости. Исследование задач о равновесии и устойчивости в рамках трехмерной нелинейной теории является достаточно трудоемким процессом даже для тел с простой геометрией. В то же время вывод краевых задач при использовании канонических координатных систем, а также их последующая линеаризация для решения задач устойчивости достаточно алгоритмичны, поэтому допускают автоматизацию с помощью современных средств компьютерной алгебры. Именно для такой автоматизации и предназначен пакет [3], разработанной авторами в среде компьютерной алгебры Maple. Аналитические преобразования, связанные с выводом нелинейных краевых задач и генерированием уравнений нейтрального равновесия, представленных в работе, выполнялись с его использованием.

1. Автоматизация полубратного метода нелинейной теории упругости

В настоящее время системы компьютерной алгебры, получившие большое распространение, быстро совершенствуются. Это происходит по нескольким причинам: возрастание производительности компьютеров, появление большого числа хорошо отлаженных алгоритмов, выход программного обеспечения под открытыми лицензиями, постоянная конкуренция и снижение стоимости коммерческих систем и т.д.

Существует много программ, реализующих принцип компьютерной алгебры. По функциональности они делятся на две основные категории: пакеты, предназначенные в основном для численных расчетов (например, MatLab) и системы компьютерной алгебры (Computer Algebra System), к которым относятся Mathematica, Maple и (отчасти) MathCAD — они также называются системами символьных или аналитических вычислений.

Начиная с версии Maple 8.0, у разработчиков появилась возможность добавления к своим программам на Maple классического оконного интерфейса, что значительно упрощает процесс работы конечного пользователя с программой и повышает его эффективность. Данная возможность предоставляется дополнительным пакетом Maplelets [4], реализованным на виртуальной машине Java. Использование оконного интерфейса в среде пошагового интерпретатора значительно расширяет возможности последнего, позволяя разработать код общего назначения, систематизировать его в виде библиотек функций и параметров и защитить от пользователя. Это позволяет разрабатывать полноценные клиентские приложения, избавляющие пользователя от правки исходного текста программы при необходимости изменить те или иные параметры задачи. Теперь с помощью обычного Windows-интерфейса можно организовать как получение от пользователя любой необходимой информации, так и вывод результатов работы на экранную форму в текстовом, графическом и даже анимационном виде.

Генерация и численное решение краевой задачи. С использованием пакета Maplelets разработана библиотека программ [3], позволяющая автоматизировать основные этапы полубратного метода нелинейной теории упругости для исследования ряда краевых задач о конечных деформациях тел канонической формы. Для выбранного типа деформации по заданной модели материала (функции удельной потенциальной энергии, задаваемой пользователем аналитически или выбираемой из списка встроенных) выводятся уравнения равновесия и граничные условия. Для получаемых в результате генерирования краевых задач для одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений система предоставляет несколько вариантов численного исследования. Результаты анализа, представляющие собой те или иные зависимости между различными параметрами задачи, определенными пользователем в соответствии с видом деформации, отображаются в виде графиков или числовых таблиц.

Во время работы программы у пользователя запрашивается следующая информация:

– комбинация отсчетной и текущей систем координат (каждая из них может быть

декартовой, цилиндрической или сферической);

– вид деформации, доступной для данной комбинации систем координат;

– вид упругого потенциала (функции удельной потенциальной энергии);

– доступные для изменения параметры, зависящие от конкретной задачи;

– параметры, необходимые во время численного счета.

Программа имеет модульную структуру:

– главный модуль программы управляет процессом работы программы на самом верхнем уровне, включает в себя определение содержимого оконного интерфейса;

– модуль `best.m` представляет собой генератор краевых задач верхнего уровня, последовательно вызывающий все процедуры генерации краевой задачи;

– модуль `coords.m` служит для определения комбинации отсчетной и текущей систем координат и соотношений между ними на уровне отдельных переменных;

– модуль `functions.m` содержит процедуры, необходимые для генерации краевой задачи (вывод уравнения равновесия и граничных условий);

– модуль `shooting.m` реализует несколько алгоритмов решения линейных и нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также содержит ряд вспомогательных процедур представления результатов расчетов в виде таблиц и графиков;

– модуль `dms.m` предназначен для ускорения решения сгенерированных краевых задач путем выноса основных численных расчетов из среды Maple во внешнюю программу на языке C. Maple-программа выполняет при этом управляющие функции по компиляции файлов, сгенерированных данным модулем, внешним C-компилятором, установленным в системе (в настоящей работе использовался freeware-компилятор Digital Mars [5]), запуску программы на выполнение, получению от нее данных и представлению их пользователю в рамках среды Maple.

Автоматизация анализа устойчивости. Для изучения устойчивости на основе бифуркационного подхода разработан самостоятельный блок Maple-кода [6], реализующий аналитически линеаризацию уравнений равновесия. Его работа существенно опирается на тот факт, что все математические операции, используемые в процессе

вывода уравнений нейтрального равновесия (дифференцирование, подстановки, упрощения и т.д.), являются строго алгоритмизуемыми. Разделение переменных, вывод системы обыкновенных дифференциальных уравнений и поиск точек потери устойчивости, т.е. тех значений параметра, при которых существуют нетривиальные решения этой системы, также реализован в среде Maple.

2. Изгиб панели в сектор цилиндра

Рассмотрим следующую деформацию сплошной среды

$$R = P(x), \quad \Phi = By, \quad Z = z. \quad (2.1)$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты в отсчетной конфигурации упругого тела; R, Φ, Z — цилиндрические координаты в его деформированной (текущей) конфигурации, B — положительная постоянная.

Преобразование (2.1) описывает деформацию изгиба панели прямоугольного поперечного сечения шириной h и толщиной a торцевыми моментами. Функция $P(x)$ в (2.1) представляет собой радиус точки панели в деформированном состоянии, а параметр $B = \gamma/h$ пропорционален углу раствора сектора, в который превратится сечение панели после деформации (рис. 1).

Геометрические характеристики деформации: градиент деформации \mathbf{C} , мера деформации Коши-Грина \mathbf{G} и ее главные инварианты I_k , левый тензор искажений \mathbf{U} , тензор поворота \mathbf{A} , соответствующие преобразованию (2.1), определяются следующими выражениями

$$\mathbf{C} = P' \mathbf{i}_x \mathbf{e}_R + B P \mathbf{i}_y \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{i}_z \mathbf{e}_Z, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{C} \mathbf{C}^T = P'^2 \mathbf{i}_x \mathbf{i}_x + B^2 P^2 \mathbf{i}_y \mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z \mathbf{i}_z, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}^{1/2} = P' \mathbf{i}_x \mathbf{i}_x + B P \mathbf{i}_y \mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z \mathbf{i}_z, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{i}_x \mathbf{e}_R + \mathbf{i}_y \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{i}_z \mathbf{e}_Z, \quad (2.5)$$

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{G} = P'^2 + B^2 P^2 + 1,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{G}^2 + \text{tr}^2 \mathbf{G}) = P'^2 B^2 P^2 P'^2 + B^2 P^2, \quad (2.6)$$

$$I_3 = \det \mathbf{G} = B^2 P'^2 P^2.$$

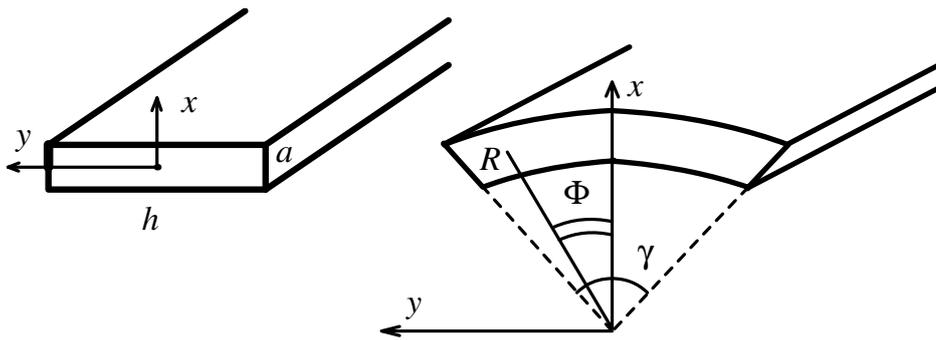


Рис. 1. Деформация панели

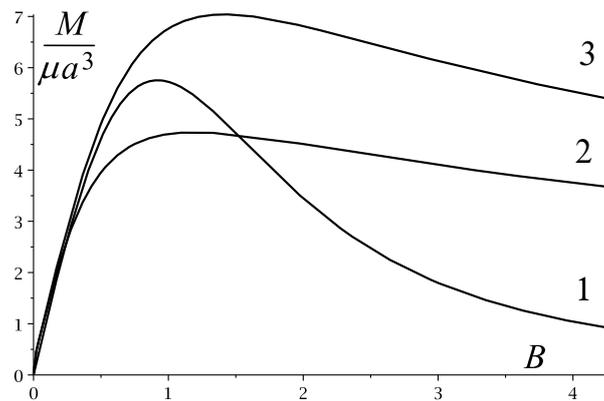


Рис. 2. Диаграммы изгиба

В (2.2)–(2.5) $\{\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z\}$ и $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$ — ортонормированные базисы декартовых координат отсчетной конфигурации и цилиндрических координат текущей конфигурации соответственно; штрихом обозначено дифференцирование по переменной x .

Определяющее соотношение для изотропного сжимаемого упругого материала имеет вид

$$\mathbf{D} = 2 \frac{dW}{d\mathbf{G}} \cdot \mathbf{C}, \quad (2.7)$$

где \mathbf{D} — тензор напряжений Пиола, $W(I_1, I_2, I_3)$ — функция удельной потенциальной энергии деформации.

Краевая задача изгиба панели, состоящая из уравнений равновесия и граничных условий, выражающих отсутствие напряжений на верхней и нижней гранях, имеет следующий вид

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \\ \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{D} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

С учетом (2.1)–(2.7) после конкретизации модели материала, т.е. после выбора функции удельной потенциальной энергии W , система (2.8) сводится к нелинейной краевой задаче

для дифференциального уравнения второго порядка для определения функции $P(x)$.

Следует отметить, что реальный процесс вывода этого дифференциального уравнения является весьма трудоемким, особенно для сложного многопараметрического выражения функции W . Быстрое и надежное решение задачи такого вывода может быть легко получено с помощью описанной выше автоматизированной системы.

Основной характеристикой данной задачи является диаграмма изгиба — график зависимости изгибающего момента от угла изгиба панели γ или, что эквивалентно, параметра B . Изгибающий момент вычислялся по формуле

$$M = \int_{R_0}^{R_1} \sigma_{\Phi\Phi} P dR, \quad (2.9)$$

в которой $\sigma_{\Phi\Phi} = \mathbf{e}_\Phi \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\Phi$ — диагональная компонента тензора напряжений Коши $\mathbf{T} = (\det \mathbf{C}) \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D}$.

Полулинейный материал. В качестве первого примера рассмотрим модель полулинейного материала [7], удельная потенциальная энергия деформации которого задается

соотношением

$$W = \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}^2 (\mathbf{U} - \mathbf{E}) + \mu \operatorname{tr} (\mathbf{U} - \mathbf{E})^2,$$

где \mathbf{E} — единичный тензор, λ, μ — материальные параметры. В этом случае краевая задача (2.8) для определения функции $P(x)$ является линейной, а ее решение имеет вид

$$P(x) = \frac{1}{B(1-\nu)} + \frac{2(1-\nu) \operatorname{sh} Bx - \nu \operatorname{ch} Bx}{B(1-\nu)(1+e^{-Ba/2})}. \quad (2.10)$$

Параметр $\nu = \lambda/2(\lambda+\mu)$ в (2.10) имеет смысл коэффициента Пуассона в случае малых деформаций. Заметим, что функция $P(x)$ может быть записана в виде

$$P(x) = \frac{1}{B} + f(x), \quad (2.11)$$

причем функция $f(x)$ не имеет особенности при $B \rightarrow 0$, т.е. при малых углах изгиба, и описывает изменение толщины изгибаемой панели [8].

Материал Блейтца и Ко. Данная модель описывается следующим трехпараметрическим выражением функции удельной потенциальной энергии [7]

$$W = \frac{1}{2}\mu(1-\beta) \left[I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha} (I_3^\alpha - 1) - 3 \right] + \frac{1}{2}\mu\beta \left[I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right]. \quad (2.12)$$

При малых деформациях параметр μ имеет смысл модуля сдвига, а параметр α связан с коэффициентом Пуассона выражением $\alpha = \nu/(1-2\nu)$. Материальный параметр $\beta \in [0, 1]$ является чисто нелинейным: он существенно влияет на жесткость материала при сверхбольших деформациях [9].

В качестве примера приведем краевую задачу для функции $P(x)$ в случае так называемого «гипотетического» [7] варианта материала Блейтца и Ко, соответствующего значению $\beta = 1$:

$$f'' = B \frac{\kappa(1+fB)^2 - 2f'^2(1+2\alpha)}{(1+fB)(1+2\alpha+\kappa)}, \quad (2.13)$$

$$\kappa|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 1,$$

где $\kappa = f'^{2\alpha+2}(1+fB)^{2\alpha}$. Краевая задача (2.13) не имеет аналитического решения и

была исследована численно, как и аналогичные (или еще более громоздкие) краевые задачи для других значений параметров материала Блейтца и Ко. Вывод краевых задач и численные расчеты проводились в рамках системы, описанной в разделе 1 настоящей работы. Реально в системе анализировались краевые задачи для функции $f(x)$ из представления (2.11), что позволило использовать решение линейной теории упругости в качестве начального приближения для процесса продолжения решения в существенно нелинейную область.

На рис. 2 приведены построенные с использованием (2.9) зависимости изгибающего момента от угла изгиба для панели с размерами $h/a = 2, 5$, $\nu = 0, 25$. Первый график соответствует модели полулинейного материала (2), зависимости 2–3 получены для модели Блейтца и Ко при $\beta = 0$ и $\beta = 1$ соответственно. На всех диаграммах отчетливо виден так называемый «падающий участок», связываемый обычно с потерей устойчивости процесса нагружения.

3. Устойчивость изгиба

Сообщим точкам упругого тела малое перемещение из известного положения равновесия путем изменения полуобратного представления (2.1) следующим образом:

$$\begin{cases} R = P(x) + \varepsilon U(x, y), \\ \Phi = By + \varepsilon V(x, y), \\ Z = z, \end{cases} \quad (3.1)$$

ε — малый параметр. Градиент деформации, соответствующий преобразованию (3.1), может быть записан в виде

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \varepsilon \dot{\mathbf{C}}, \quad (3.2)$$

где \mathbf{C}_0 — градиент деформации, соответствующий основному решению, устойчивость которого исследуется, а тензор $\dot{\mathbf{C}}$ линейно зависит от функций $U(x, y)$, $V(x, y)$. Аналогичным образом проводится линеаризация остальных геометрических характеристик деформации, общая формула этого процесса может быть представлена в виде

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{F}(\mathbf{C}_0 + \varepsilon \dot{\mathbf{C}})|_{\varepsilon=0}$$

Уравнения нейтрального равновесия — линеаризованные уравнения (2.8) — запишутся в общем виде

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = 0, \quad (3.3)$$

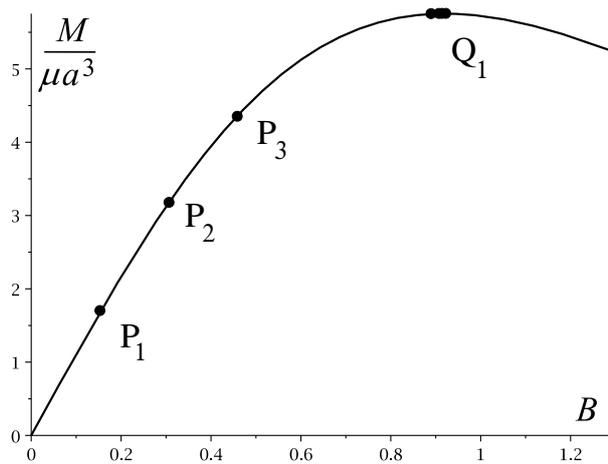


Рис. 3. Точки бифуркации на диаграмме нагружения

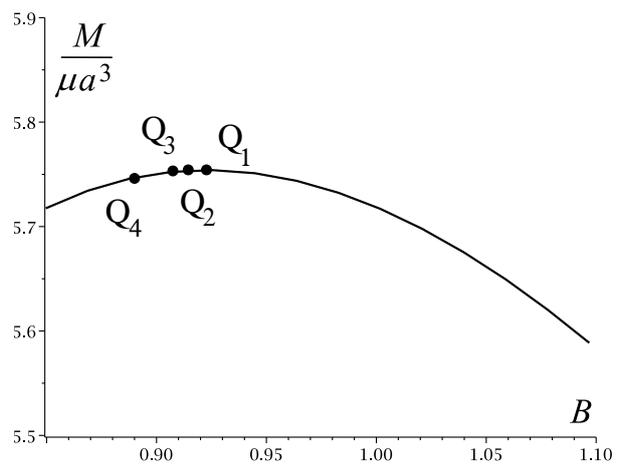


Рис. 4. Точки бифуркации в окрестности максимума диаграммы

где $\dot{\mathbf{D}}$ — линейризованный тензор напряжений Пиола. Граничные условия для них будут иметь следующее представление:

$$\dot{D}_{xR} \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) = 0, \quad \dot{D}_{x\Phi} \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) = 0, \quad (3.4)$$

$$\dot{D}_{yR} \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad V \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Соотношения (3.5) означают скользящую заделку на торцах панели.

Система (3.3) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $U(x, y)$ и $V(x, y)$. Заменой

$$\begin{aligned} V(x, y) &= v(x) \sin(\alpha_n y), \\ U(x, y) &= u(x) \cos(\alpha_n y), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\alpha_n = \frac{\pi n}{2h}$, $n \in \mathbf{Z}$, она может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, причем благодаря (3.6) краевые условия (3.5) выполняются автоматически.

Изучение возможности существования нетривиальных решений системы вида (3.3)–(3.5) проводилось по следующей схеме. Общее решение разыскивалось в виде

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2, \quad v = C_1 v_1 + C_2 v_2, \quad (3.7)$$

где (u_k, v_k) , $k = 1, 2$ — линейно-независимые наборы функций, представляющие собой решения задач Коши для (3.3), у которых первая пара начальных условий имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(-a/2) &= 1, \quad v_1(-a/2) = 0, \\ u_2(-a/2) &= 0, \quad v_2(-a/2) = 1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

а вторая — для производных $u'_k(-a/2)$, $v'_k(-a/2)$ — получается выражением последних из равенств (3.4) в точке $x = -a/2$ с учетом (3.8). Удовлетворение краевым условиям (3.4) в точке $x = a/2$ приводит к линейной системе уравнений для определения C_1 и C_2 . Критические значения параметра B находились из характеристического уравнения.

Для всех рассмотренных моделей материалов, размеров поперечного сечения и мод потери устойчивости (значений параметра n , больших нуля) на диаграмме изгиба были обнаружены точки бифуркации. Типичная картина их распределения, общая для обеих моделей нелинейно-упругого поведения материала, в случае тонкой панели приведена на рис. 3 и рис. 4. Первая точка бифуркации P_1 — первый (кратный) корень характеристического уравнения для первой моды — расположена существенно левее точки максимума на диаграмме изгиба. Вторая точка бифуркации Q_1 по первой моде расположена очень близко к точке максимума. Пары первых точек бифуркации по остальным модам (P_k, Q_k) расположены внутри отрезка $P_1 Q_1$.

Авторы выражают признательность Л. М. Зубову за обсуждение работы и ценные замечания

Литература

1. Levy A. J., Shukla A., Xie M. Bending and buckling of a class of nonlinear fiber composite rods // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. № 54. Pp. 1064–1092.

2. *Karamanos S. A.* Bending instabilities of elastic tubes // *International Journal of Solids and Structures*. 2002. № 32. Pp.2059–2085.
3. *Gavrilyachenko T. M., Karyakin M. I., Sukhov D. Yu.* Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple // *Proceedings of the International Conference on Computational Sciences and its Applications*. Los Alamitos-Washington-Tokyo: ICCSA, 2008. P. 284–291.
4. *Курсанов М. Н.* Maple и MapleT. Решение задач механики. С-Пб.: Лань, 2012. 512 с.
5. Digital Mars. High performance compilers for the C, C++ and D programming languages. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.digitalmars.com> (дата обращения: 20.09.2012)
6. *Гавриляченко Т. В., Карякин М. И.* Об автоматизации анализа устойчивости равновесия скручиваемого вала // *Современные проблемы механики сплошной среды*. Труды 5-й Международной конференции. Ростов-на-Дону: Изд-во Северо-Кавказ. научн. центра высш. школы, 2000. С. 79–83.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Калашиников В. В., Карякин М. И.* Использование модели материала Мурнагана в задаче плоского изгиба упругого стержня // *Труды Ростовского гос. ун-та путей сообщения*. 2006. № 2(3). С. 56–65.
9. *Карякин М. И.* Об особенностях растяжения нелинейно-упругих образцов // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2007. № 4. С. 43–48.

Ключевые слова: изгиб, полуобратный метод, нелинейная упругость, большие деформации, устойчивость, точка бифуркации.

Статья поступила 20 сентября 2012 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
© Карякин М. И., Сухов Д. Ю., Шубчинская Н. Ю., 2012