УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРАХ ВИНЕРА-ХОПФА И ТЕПЛИЦА С РАЗРЫВНЫМИ СИМВОЛАМИ

Пасенчук А.Э.[1]

SOME TWO-DIMENSIONAL WIENER-HOPF AND TOEPLITZ WITH DISCONTINUOUS SYMBOLS

Pasenchuk A.E.

We research the discrete Wiener-Hopf equation in a quadrant of countably normed space of the sequences that decrease faster than any power. A theory of character is costructing that specifies Noether conditions of some simple operators and their compositions. We also consider the dual for the Laurent Toeplitz operator in the space of smooth functions on the torus.

Keywords: operator, two-dimensional, Wiener-Hopf, Toeplitz, countably normed space, discontinuous, symbol, Noetherian.

1. Обозначения и определения

Будем использовать стандартные обозначения C, R, Z для множеств комплексных, вещественных, целых чисел соответственно. Нам понадобятся также следующие подмножества этих множеств:

$$\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\},$$

$$D^+ = \{\xi \in C : |\xi| < 1\},$$

$$D^- = \{\xi \in C : |\xi| > 1\},$$

$$Z_+ = \{k \in Z : k \geqslant 0\},$$

$$Z_- = \{k \in Z : k < 0\}.$$

Иногда мы будем пользоваться обозначениями $\tilde{D}^{\pm}$, где $\tilde{D}^+ = \overline{D^+}$, $\tilde{D}^- = D^-$ и $\tilde{Z}_{\pm}$, где $\tilde{Z}_+ = Z_+$, $\tilde{Z}_- = Z_- \cup \{0\}$.

Для фиксированного набора

$$m = (m_1, m_2) \in Z_+^2$$

выделим во множестве всевозможных двумерных последовательностей

$$S = \left\{\phi = \{\phi_{kj}\}_{(k,j)\in Z^2},\ \phi_{kj} \in C\right\}$$

подмножество

$$l\{m\} = \left\{\phi \in S : \sum_{(k,j)\in Z^2} (|k|+1)^{m_1}(|j|+1)^{m_2}|\phi_{kj}| < \infty\right\}.$$

Множество $l\{m\}$ относительно покоординатных линейных операций и нормы

$$\|\phi\|_{m,n} = \sum_{(k,j)\in Z^2} (|k|+1)^{m_1}(|j|+1)^{m_2}|\phi_{kj}|$$

является банаховым пространством. Положим

$$l\{\infty,\infty\} = \bigcap_{(m_1,m_2)\in Z_+^2} l\{m_1,m_2\}$$

и будем рассматривать $l\{\infty,\infty\}$ как счетно-нормированное пространство с топологией, порождаемой набором норм $\|\bullet\|_{m_1,m_2}$, $(m_1,m_2) \in Z_+^2$. В пространствах $l\{m\}$, $m = (m_1,m_2) \in Z_+^2 \cup \{(\infty,\infty)\}$ определим операторы проектирования $P_{\pm\mp}$ формулами

$$P_{\pm\mp}\left(\{\phi_{kj}\}_{(k,j)\in Z^2}\right) = \left\{\tilde{\phi}_{kj}\right\}_{(k,j)\in Z^2},$$

$$\tilde{\phi}_{kj} = \begin{cases} \phi_{kj}, & (k,j) \in Z_+ \times Z_- \\ 0, & (k,j) \notin Z_+ \times Z_- \end{cases}$$

Проекторы $P_{\pm\mp}$ порождают подпространства

$$l_{\pm\mp}\{m\} = P_{\pm\mp}(l\{m\}),$$

[1]Пасенчук Александр Эдуардович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры и дискретной математики факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: pasenchuk@mail.ru.

$$m=(m_1,m_2)\in Z_+^2\cup\{(\infty,\infty)\}\,.$$

Определим в пространствах $l\{m\}$,

$$m=(m_1,m_2)\in Z_+^2\cup\{(\infty,\infty)\}$$

операцию свертывания

$$(\phi*\psi)_{k,j}=\sum_{(l,s)\in Z^2}\phi_{k-l,j-s}\psi_{ls}.$$

Лемма 1. Пространства $l\{m\}$,

$$m=(m_1,m_2)\in Z_+^2\cup\{(\infty,\infty)\}$$

являются топологическими алгебрами с единицей $e=\{\delta_{k0}\delta_{j0}\}_{(k,j)\in Z^2}$, где δ_{kj} — символ Кронекера.

Элементу $\phi\in l\{m\}$ поставим в соответствие функцию

$$\Phi(\xi_1,\xi_2)=\sum_{(k,j)\in Z^2}\phi_{kj}\xi_1^k\xi_2^j,$$

определенную на торе Γ^2. Совокупность всех таких функций обозначим через $W_m\left(\Gamma^2\right)$:

$$W_m\left(\Gamma^2\right)=\Bigg\{\Phi(\xi_1,\xi_2)=\sum_{(k,j)\in Z^2}\phi_{kj}\xi_1^k\xi_2^j:$$
$$\sum_{(k,j)\in Z^2}(|k|+1)^{m_1}(|j|+1)^{m_2}|\phi_{kj}|<\infty\Bigg\}.$$

Вводя поточечные линейные операции, превращаем $W_m\left(\Gamma^2\right)$ в линейное пространство. В случае $m=(m_1,m_2)\in Z_+^2$ это пространство является банаховым относительно нормы

$$|\Phi(\xi_1,\xi_2)|_{m_1,m_2}=$$
$$=\sum_{(k,j)\in Z^2}(|k|+1)^{m_1}(|j|+1)^{m_2}|\phi_{kj}|\,.$$

Если $m=(\infty,\infty)$, то $W_m\left(\Gamma^2\right)$ есть счетно-нормированное пространство с топологией, порождаемой набором норм $|\bullet|_{m_1,m_2}$, $(m_1,m_2)\in Z_+^2$.

Лемма 2. Пространства

$$W_n\left(\Gamma^2\right),\ m=(m_1,m_2)\in Z_+^2\cup\{(\infty,\infty)\}$$

являются топологическими алгебрами с единицей.

Соответствие

$$\{\phi_{kj}\}_{(k,j)\in Z^2}\mapsto\sum_{(k,j)\in Z^2}\phi_{kj}\xi_1^k\xi_2^j$$

называют преобразованием Лорана и обозначают через L.

Лемма 3. Преобразование Лорана

$$L:l\{m\}\to W_m\left(\Gamma^2\right)$$

осуществляет топологический изоморфизм алгебр. При этом, в случае $m=(m_1,m_2)\in Z_+^2$, преобразование Лорана является изометрией.

Нетрудно убедиться в том, что образы подпространств $l_{\pm\mp}\{m\}$ при преобразовании Лорана $W_m^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right)$ есть подалгебры топологической алгебры

$$W_m\left(\Gamma^2\right),\ m=(m_1,m_2)\in Z_+^2\cup\{(\infty,\infty)\}\,.$$

Очевидно, что лишь в алгебре $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$ имеется единица. В связи с этим будем ниже рассматривать также подалгебры

$$\tilde W_m^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right)=L\left(\tilde l_{\pm\mp}\{m\}\right),$$

где

$$\tilde l_{\pm\mp}\{m\}=\Bigg\{\phi=\{\phi_{kj}\}\in l\{m\}:$$
$$\phi_{kj}=0,(k,j)\notin\tilde Z_\pm\times\tilde Z_\mp\Bigg\}.$$

По построению каждая из алгебр $\tilde W_m^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right)$ содержит единицу и имеет место вложение

$$W_m^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right)\subseteq\tilde W_m^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right).$$

2. Двумерные операторы Винера-Хопфа и Теплица. Ограниченность

Пусть $a=\{a_{kj}\}_{(k,j)\in Z^2}\in S$. В пространстве $l_{++}\{m\}$, $m=(\infty,\infty)$ будем рассматривать линейный оператор W_a, действующий по формуле

$$(W_a\phi)_{k,j}=\sum_{(l,s)\in Z_+^2}a_{k-l,j-s}\phi_{ls},\qquad(2.1)$$

$$(k,j)\in Z_+^2.$$

Оператор (2.1) называют двумерным дискретным оператором Винера-Хопфа.

Введем следующие операторы

$$\pi_{r,s}:l_{++}\{m\}\to C;$$

$$\pi_{r,s}\left(\{\phi_{kj}\}\right) = \phi_{rs}, (r,s) \in Z_+^2$$

и

$$\tilde{\pi}_{r,s} : C \to l_{++}\{m\};$$
$$\tilde{\pi}_{r,s}(\phi) = \{\phi_{kj}\},$$
$$\phi_{kj} = \begin{cases} \phi, & (k,j) = (r,s), \\ 0, & (k,j) \neq (r,s), \end{cases}$$
$$(r,s) \in Z_+^2.$$

Каждому оператору

$$A : l_{++}\{m\} \to l_{++}\{m\}, \quad m = (\infty, \infty)$$

поставим в соответствие «двумерную» матрицу

$$\tilde{A} = (a_{rs,ql}), \quad a_{rs,ql} = \pi_{rs} A \tilde{\pi}_{ql}.$$

Из определения $\tilde{A}$ вытекает, что оператор A действует по правилу

$$\left(A\left(\{\phi_{kj}\}\right)\right)_{r,q} = \sum_{(s,l)\in Z_+^2} a_{rs,ql}\phi_{sl}, \ (r,s) \in Z_+^2.$$

Отметим, что, в частности, для оператора (2.1) $a_{rs,ql} = a_{r-s,q-l}$.

Теорема 1. Оператор

$$A : l_{++}\{m\} \to l_{++}\{m\}, \quad m = (\infty, \infty)$$

ограничен тогда и только тогда, когда по любым $(m_1, m_2) \in Z_+^2$ найдутся $c_{m_1,m_2} > 0$, $k_{m_1,m_2} \in Z_+$, $l_{m_1,m_2} \in Z_+$ так, что элементы соответствующей ему матрицы $\tilde{A}$ удовлетворяют оценке

$$|a_{rs,ql}| \leqslant c_{m_1,m_2}(r+1)^{-m_1}(s+1)^{k_{m_1,m_2}} \times$$
$$\times (q+1)^{-m_2}(l+1)^{l_{m_1,m_2}}.$$

Следствие. Оператор Винера-Хопфа W_a ограничен в пространстве $l_{++}\{m\}$, $m = (\infty, \infty)$ тогда и только тогда, когда элементы определяющей этот оператор последовательности удовлетворяют условиям:

1) $\forall\ m, n \in Z_+ \exists\ c_{m,n} > 0:$
$$|a_{kj}| \leqslant c_{m,n}(k+1)^{-m}(j+1)^{-n},$$
$$(k,j) \in Z_+^2;$$

2) $\forall\ m \in Z_+ \exists\ c_m > 0 \exists n_0 \in Z_+:$
$$|a_{kj}| \leqslant c_m(k+1)^{-m}(|j|+1)^{n_0},$$
$$(k,j) \in Z_+ \times Z_-;$$

3) $\forall\ n \in Z_+ \exists\ \tilde{c}_n > 0 \exists\ m_0 \in Z_+:$
$$|a_{kj}| \leqslant \tilde{c}_n(|k|+1)^{m_0}(j+1)^{-n},$$
$$(k,j) \in Z_- \times Z_+;$$

4) $\exists\ m_0, n_0 \in Z_+ \exists\ c > 0:$
$$|a_{kj}| \leqslant c(|k|+1)^{m_0}(|j|+1)^{n_0},$$
$$(k,j) \in Z_-^2.$$

Пусть $a = \{a_{kj}\}_{(k,j)\in Z^2}$ — двумерная числовая последовательность, порождающая ограниченный в пространстве $l_{++}\{m\}$, $m = (\infty, \infty)$ оператор Винера-Хопфа.

В пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m = (\infty, \infty)$ определим оператор Теплица следующим равенством: $T_a = LW_aL^{-1}$, где L — двумерное преобразование Лорана. Ясно, что оператор $T_a : W_m^{++}\left(\Gamma^2\right) \to W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m = (\infty, \infty)$ ограничен тогда и только тогда, когда порождающая его последовательность $a = \{a_{kj}\}_{(k,j)\in Z^2}$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3), 4). Поставим в соответствие этому оператору (и оператору Винера-Хопфа) четверку функций двух комплексных переменных

$$A^{\pm\mp}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{(k,j)\in Z_\pm \times Z_\mp} \alpha_{kj}\xi_1^k\xi_2^j,$$

определенных на множествах $\tilde{D}^\pm \times \tilde{D}^\mp$ соответственно. Отметим, что для произвольного ограниченного оператора Теплица некоторые из этих функций не определены (и, вообще говоря, не могут быть доопределены) на торе Γ^2. В связи с этим символом оператора T_α (и оператора Винера-ХопфаW_a) будем называть набор из следующих четырех функций:

$$A(\xi) = \big(A^{--}(\xi_1, \xi_2), A^{-+}(\xi_1, \xi_2),$$
$$A^{+-}(\xi_1, \xi_2), A^{++}(\xi_1, \xi_2)\big).$$

Оператор Винера-Хопфа и подобный ему оператор Теплица изучались в стандартных банаховых пространствах достаточно подробно [1–6] М.Б.Городецким в пространстве $l_{++}\{m\}$, $m = (\infty, \infty)$ рассматривались некоторые частные операторы вида (2.1) с гладкими символами [7, 8]. Двумерные операторы Винера-Хопфа и Теплица с разрывными символами ранее не рассматривались, хотя потребности практики требуют их изучения. Отметим, что такие операторы возникают при обращении операторов Винера-Хопфа и Теплица с гладкими аннулирующимися символами. В этой работе изучены операторы Винера-Хопфа и Теплица W_a, T_a, обладающие символами

$$A(\xi) = \left(A^{--}(\xi_1,\xi_2), A^{-+}(\xi_1,\xi_2),\right.$$
$$\left. A^{+-}(\xi_1,\xi_2), A^{++}(\xi_1,\xi_2)\right),$$

где лишь одна из компонент отлична от нуля. Рассматриваются также операторы с простейшими однородными разрывными символами.

3. Нетеровость операторов Винера-Хопфа и Теплица с разрывными аналитическими символами

Поскольку операторы Винера-Хопфа и Теплица подобны, то будем говорить ниже лишь об операторе Теплица.

Обозначим через $\Pi^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right)$ линеалы функций двух комплексных переменных следующего вида:

$$\Pi^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right) = \left\{A^{\pm\mp}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{(k,j)\in\tilde{Z}_+^2} a_{kj}\xi_1^{\pm k}\xi_2^{\mp j},\right.$$
$$\left.(\xi_1,\xi_2)\in\tilde{D}^{\pm}\times\tilde{D}^{\pm}\right\},$$

предполагая, что коэффициенты $\{a_{kj}\}$ удовлетворяют условиям 1), 2), 3), 4) соответственно. Ясно, что имеют место вложения $\tilde{W}_m^{\mu}\left(\Gamma^2\right)\subseteq\Pi^{\mu}\left(\Gamma^2\right)$, $\mu\in\{--,+-,-+,++\}$. Это вложение превращается в равенство, если $\mu=(+,+)$. В остальных случаях вложения являются строгими. В каждом из множеств $\Pi^{\mu}\left(\Gamma^2\right)$ введем топологию, индуцированную сильной топологией пространства $EndW_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$.

Лемма 3. Каждое из топологических пространств $\Pi^{\mu}\left(\Gamma^2\right)$ является коммутативной топологической алгеброй с единицей относительно поточечных линейных операций и операции поточечного умножения, определенных в естественных областях определения.

$\rhd$. В самом деле, пусть, например,

$$A(\xi) = \sum_{(k,j)\in Z_+^2} b_{kj}\xi_1^k\xi_2^{-j}\in\Pi^{+-}\left(\Gamma^2\right) B(\xi) = \sum_{(k,j)\in Z_+^2} b_{kj}\xi_1^k\xi_2^{-j}\in\Pi^{+-}\left(\Gamma^2\right).$$

Тогда на множестве $\overline{D^+}\times D^-$ определены поточечные операции. В частности, определено поточечное произведение $A(\xi)\,B(\xi)$ и при этом

$$A(\xi)\,B(\xi) = \sum_{(k,j)\in Z_+^2} a_{kj}\xi_1^k\xi_2^{-j}\sum_{(l,s)\in Z_+^2} b_{ls}\xi_1^l\xi_2^{-s} = \sum_{(p,r)\in Z_+^2} c_{pr}\xi_1^p\xi_2^{-r},$$

где

$$c_{pr} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{r} a_{p-k,r-j}b_{kj}.$$

Отсюда следует, что

$$|c_{pr}| \leqslant \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{r}|a_{p-k,r-j}|\,|b_{kj}| \leqslant c_m\sum_{k=0}^{p}(p-k+1)^{-m}(k+1)^{-m}\times \sum_{j=0}^{r}(r-j+1)^{n_0}(j+1)^{n_0},$$
$$(r,p)\in Z_+^2.$$

Поскольку при $k\in[0,p]$ имеет место неравенство

$$(p-k+1)(k+1)\geqslant p+1,$$

а при $j\in[0,r]:(r-j+1)(j+1)\leqslant(r+1)^2$, то продолжая предыдущую оценку, получим

$$|c_{pr}| \leqslant c_m\sum_{k=0}^{p}(p+1)^{-m}\sum_{j=0}^{r}(r+1)^{2n_0} \leqslant c_m(p+1)^{-m+1}(r+1)^{2n_0+1},$$
$$(r,p)\in Z_+^2.$$

В силу произвольности $m\in Z_+$ это означает, что коэффициенты функции $A(\xi)\,B(\xi)$ удовлетворяют условию 2) и, следовательно,

$$A(\xi)\,B(\xi)\in\Pi^{+-}\left(\Gamma^2\right).$$

Таким образом, операция поточечного умножения является внутренней операцией в $\Pi^{+-}\left(\Gamma^2\right)$. Аксиомы алгебры проверяются элементарно. $\lhd$.

Следствие. Множество ограниченных в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$ операторов Теплица с символами вида

$$A(\xi)=\big(A^{--}(\xi_1,\xi_2), A^{-+}(\xi_1,\xi_2), A^{+-}(\xi_1,\xi_2), A^{++}(\xi_1,\xi_2)\big),$$

где лишь одна из функций отлична от тождественного нуля, образует коммутативную топологическую алгебру топологически изоморфную соответствующей алгебре $\Pi^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right)$.

Отметим, что, в частности, условиям 1), 2), 3), 4) удовлетворяет любая последовательность $a\in l\{m\}$, $m=(\infty,\infty)$. Нетрудно видеть, что в этом случае для оператора T_α традиционно определенный символ

$$A(\xi_1,\xi_2)=\sum_{(k,j)\in Z^2}\alpha_{kj}\xi_1^k\xi_2^j\in W_m\left(\Gamma^2\right),$$

$$m=(\infty,\infty)$$

однозначно задает оператор Теплица. При этом данное выше определение оператора Теплица можно заменить обычным

$$T_\alpha=P^{++}A(\xi_1,\xi_2)P^{++},$$

$$P^{++}=LP_{++}L^{-1}$$

и наряду с обозначением T_α пользоваться обозначением T_A, указывая на символ оператора. Однако ситуация меняется в том случае, когда символ оказывается разрывной функцией, что, как показывают приводимые ниже примеры, вполне возможно. Дело в том, что иногда функции с различными аналитическими особенностями суммируются к функциям, почти всюду совпадающим на торе Γ^2, но, разумеется, при этом порождают разные ограниченные в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$ операторы Теплица. Поясним это следующим примером.

Функции

$$A^{+-}(\xi_1,\xi_2)=\sum_{k\in Z_+}\left(\xi_1\xi_2^{-1}\right)^k=\left(1-\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1},$$

$$(\xi_1,\xi_2)\in\overline{D^+}\times D^-,$$

$$A^{-+}(\xi_1,\xi_2)= =-\sum_{k\in Z_+}\left(\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{k+1}=\left(1-\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1},$$

$$(\xi_1,\xi_2)\in D^-\times\overline{D^+},$$

разумеется, порождают различные ограниченные операторы Теплица, но, очевидно, их продолжения на Γ^2, почти всюду на торе совпадают. Отметим, что четверки функций, о которых речь шла выше, для этого примера имеют вид $(0,0,A^{+-},0)$ и $(0,A^{-+},$ 0,0) соответственно, и, конечно, являются разными. Из сказанного следует, что классические определение $T_A=P^{++}A(\xi_1,\xi_2)P^{++}$ и обозначение T_A, вообще говоря, некорректны в случае пространства $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$. Тем не менее, условимся для краткости пользоваться записью вида $T_{A,N}$, указывая на место в четверке для функции A в тех случаях, когда эта функция может быть аналитически продолжена в одну из областей $D^\pm\times D^\pm$. Например, запись $T_{A,2}$ будет означать, что речь идет об операторе Теплица с символом $(0,A,$ 0,0). Если же мы будем говорить о символе такого оператора, то условимся вместо четверки функций писать для краткости $(A)_\mu$,$\mu\in\{--,+-,-+,++\}$.

Теорема 2. Пусть $A(\xi)\in\Pi^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right)$. Тогда для оператора Теплица с символом $(A(\xi))_{\pm\mp}$ следующие условия эквивалентны:

1) оператор $T_{A,N}:W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)\to W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$ нетеров,

2) оператор $T_{A,N}:W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)\to W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$ обратим,

3) символ оператора $A(\xi)$ обратим в алгебре $\Pi^{\pm\mp}\left(\Gamma^2\right)$.

В нижеследующих примерах описывается поведение простейших операторов Теплица с разрывными символами.

Пример 1. Пусть

$$A(\xi)=\left(\left(1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1}\right)_{+-},\ t_0\in\Gamma.$$

Тогда оператор

$$T_{A,3}:W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)\to W_m^{++}\left(\Gamma^2\right),\ m=(\infty,\infty)$$

ограничен и обратим. При этом обратным к нему является оператор $T_{1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}}$.

В самом деле, поскольку

$$\left(\left(1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1}\right)_{+-}=\sum_{k\in Z_+}\left(t_0\xi_1\xi_2^{-1}\right)^k,$$

$$(\xi_1,\xi_2)\in\overline{D^+}\times D^-,$$

то последовательность $a=\{a_{kj}\}_{(k,j)\in Z^2}$, в данном случае имеет вид

$$a_{kj}=\begin{cases} t_0^k, & (k,j)\in\{j=-k,k\in Z_+\},\\ 0, & (k,j)\notin\{j=-k,k\in Z_+\},\end{cases}$$

Ясно, что эта последовательность удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, рассматриваемый оператор ограничен. С другой стороны, функция $\left(\left(1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1}\right)_{+-}$ обратима в алгебре $\Pi^{+-}\left(\Gamma^2\right)$ и обратной к ней является функция

$$1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}\in \tilde{W}_m^{+-}\left(\Gamma^2\right)\subset \Pi^{+-}\left(\Gamma^2\right).$$

Согласно теореме 2 оператор Теплица

$$T_{A,3}:W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)\to W_m^{++}\left(\Gamma^2\right),\ m=(\infty,\infty)$$

обратим и обратным к нему служит оператор

$$T_{1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}}:$$
$$T_{1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}}T_{A,3}=T_{A,3}T_{1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}}=$$
$$=T_{A\left(1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}\right)}=I.$$

Пример 2. Пусть

$$A(\xi)=\left(\left(1-t_0\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1}\right)_{-+},\ t_0\in\Gamma.$$

Тогда оператор

$$T_{A,2}:W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)\to W_m^{++}\left(\Gamma^2\right),\ m=(\infty,\infty)$$

обобщенно обратим и имеет бесконечномерные ядро и коядро.

Действительно, оператор $T_{A,2}$ можно представить в виде

$$T_{A,2}=T_{\tilde{A},2}T_{\xi_1^{-1}\xi_2},$$

$$\tilde{A}(\xi)=-t_0^{-1}\left(\left(1-t_0^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1}\right)_{-+},$$

причем операторы $T_{\tilde{A},2}$, $T_{\xi_1^{-1}\xi_2}$ коммутируют. Как и в примере 1, оператор $T_{\tilde{A},2}$ обратим, поэтому

$$\ker T_{A,2}=\ker T_{\xi_1^{-1}\xi_2},$$

$$\operatorname{coker} T_{A,2}=\operatorname{coker} T_{\xi_1^{-1}\xi_2}.$$

Пример 3. Пусть

$$A(\xi)=\left(\left(1-t_0\xi_1\xi_2\right)^{-1}\right)_{++},\ t_0\in\Gamma.$$

Тогда оператор

$$T_{A,4}:W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)\to W_m^{++}\left(\Gamma^2\right),\ m=(\infty,\infty)$$

неограничен.

В самом деле, нетрудно видеть, что последовательность $a=\{a_{kj}\}_{(k,j)\in Z^2}$, порождающая рассматриваемый оператор, имеет вид

$$a_{kj}=\begin{cases} t_0^k, & (k,j)\in\{j=k,k\in Z_+\},\\ 0, & (k,j)\notin\{j=k,k\in Z_+\},\end{cases}$$

Очевидно, эта последовательность не удовлетворяет условиям 1), 2), 3), 4).

Пример 4. Пусть

$$A(\xi)=\left(\left(1-t_0\xi_1\xi_2\right)^{-1}\right)_{--},\ t_0\in\Gamma.$$

Тогда оператор

$$T_{A,1}:W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)\to W_m^{++}\left(\Gamma^2\right),\ m=(\infty,\infty)$$

ограничен и обратим, при этом обратным к нему оператором является оператор $T_{1-t_0\xi_1^{-1}\xi_2^{-1}}$.

4. Об одном классе операторов Винера-Хопфа и Теплица

.

В этом параграфе в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$ мы рассматриваем всевозможные операторы Теплица (а, следовательно, и Винера-Хопфа), порождаемые однородной функцией

$$A(\xi)=\left(\alpha_{-1,1}\xi_1^{-1}\xi_2^{1}+\alpha_{00}+\alpha_{1,-1}\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1},$$
$$\alpha_{-1,1}\neq 0,\quad \alpha_{1,-1}\neq 0$$

двух комплексных переменных $(\xi_1,\xi_2)\in\Gamma^2$.

Вообще говоря, эта функция имеет разрывы на торе Γ^2, которые могут быть описаны следующим образом. Не ограничивая общности, всюду ниже будем считать, что $\alpha_{-1,1}=1$. Функции

$$(A(\xi))^{-1}=\xi_1^{-1}\xi_2^{1}+\alpha_{00}+\alpha_{1,-1}\xi_1\xi_2^{-1}$$

сопоставим тригонометрический полином $p(t)=t+\alpha_{00}+\alpha_{1,-1}t^{-1}$ и через t_1,t_2 обозначим корни этого полинома. Нетрудно видеть, что имеет место следующее представление

$$(A(\xi))^{-1}=\left(\xi_1\xi_2^{-1}-t_1\right)\left(1-\xi_1^{-1}\xi_2t_2\right).$$

Ясно, что, если хотя бы один из корней t_1,t_2 лежит на окружности Γ, то функция $A(\xi)$ имеет на торе Γ^2 разрывы и является поточечным произведением рассмотренных в примерах 1, 2 функций. В работе [9] показана, что в счетно-нормированных пространствах функций, гладких по одной из переменных, во множестве символов ограниченных операторов Теплица может быть введена структура топологической алгебры. При этом умножение $\circ$ обладает тем свойством, что совпадает с поточечным там, где последнее определено. Оказывается, что ситуация в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right),\ m=(\infty,\infty)$ отличается от описанной. Точнее говоря, поточечное произведение функций (если оно определено), порождающих ограниченные операторы Теплица, не обязательно порождает ограниченный оператор Теплица в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right),\ m=(\infty,\infty)$ (см. теорему 6).

Отметим, что если $t_j\notin\Gamma,\ j=1,2$, то оператор T_A определен в классическом смысле и имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Если $t_j\notin\Gamma,\ j=1,2$, то для оператора $T_A:W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)\to W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$ следующие утверждения равносильны:

1) оператор T_A нетеров,
2) оператор T_A фредгольмов,
3) оператор T_A обратим слева,
4) оператор T_A обратим справа,
5) оператор T_A обратим,
6) $t_1\in D^+,\ t_2\in D^-$ или $t_1\in D^-,\ t_2\in D^+$

$\triangleright$. Покажем, что если не выполняется 6), то $\dim\ker T_A=\dim\operatorname{coker}T_A=\infty$ и, следовательно, 6) вытекает из любого из условий 1)–5). Пусть, например, $t_1\in D^+,\ t_2\in D^+$. Предположим сначала, что $t_1\neq t_2$, тогда символ

$$A(\xi)=\left(\xi_1^{-1}\xi_2^{+}\alpha_{00}+\alpha_{1,-1}\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1}$$

допускает следующее представление

$$A(\xi)=(t_2-t_1)^{-1}\times \\ \times\left(\left(1-t_2\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1}-\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1}\right).$$

Но тогда, полагая $c=(t_2-t_1)^{-1}$, какова бы ни была функция $\phi^+(\xi_1)\in W_\infty^+(\Gamma)$ имеем

$$\left(T_A\phi^+\right)(\xi_1,\xi_2)= \\ =\mathrm{c}P^{++}\Bigg(\Big(\left(1-t_2\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1}- \\ -\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{-1}\Big)\phi^+(\xi_1)\Bigg)= \\ =\mathrm{c}\left(\phi^+(\xi_1)-\phi^+(\xi_1)\right)=0.$$

Это означает, что в рассматриваемом случае $\dim\ker T_A=\infty$. Если $t_1=t_2$, то, нетрудно видеть, что

$$A(\xi)=\sum_{j\in Z_+}\alpha_j\left(\xi_1\xi_2^{-1}\right)^{j+1}.$$

Поэтому

$$\left(T_A\phi^+\right)(\xi_1,\xi_2)=0$$

для любой функции

$$\phi^+(\xi_1)\in W_\infty^+(\Gamma),$$

т.е. и в этом случае

$$\dim\ker T_A=\infty.$$

Аналогичным образом, убеждаемся, что и

$$\dim\operatorname{coker}T_A=\infty.$$

Предположим теперь, что 6) выполнено и при этом, для определенности, будем считать, что $t_1\in D^+,\ t_2\in D^-$. Нетрудно проверить, что любую функцию $\phi^{++}(\xi_1,\xi_2)\in W_m^{++}\left(\Gamma^2\right),\ m=(\infty,\infty)$ можно единственным образом представить в следующем виде

$$\phi^{++}=\phi^{++}(0,0)+(\xi_1-t_1\xi_2)\,\phi_1^+(\xi_1)+ \\ +\left(\xi_2-t_2^{-1}\xi_1\right)\phi_2^+(\xi_2)+ \\ +(\xi_1-t_1\xi_2)\left(\xi_2-t_2^{-1}\xi_1\right)\psi^{++}(\xi_1,\xi_2),$$

где

$$\phi_1^+(\xi_1)\in W_\infty^+(\Gamma),\quad \phi_2^+(\xi_2)\in W_\infty^+(\Gamma),$$

$$\psi^{++}(\xi_1,\xi_2)\in W_m^{++}\left(\Gamma^2\right).$$

Подставляя это разложение в уравнение

$$\left(T_A\phi^{++}\right)(\xi_1,\xi_2)=f^{++}(\xi_1,\xi_2),$$

получим

$$\left(1-t_1t_2^{-1}\right)^{-1}\phi^{++}(0,0)+\xi_1\phi_1^+ \\ +(\xi_1)+\xi_2\phi_2^+(\xi_2)+\xi_1\xi_2\psi^{++}(\xi_1,\xi_2)= \\ =-t_2f^{++}(\xi_1,\xi_2).$$

Отсюда следует, что

$$\phi^{++}(0,0)=(t_1-t_2)\,f^{++}(0,0),$$

$$\phi_1^+(\xi_1)=-t_2\xi_1^{-1}\left(f^{++}(\xi_1,0)-f^{++}(0,0)\right),$$

$$\phi_2^+(\xi_2)=-t_2\xi_2^{-1}\left(f^{++}(0,\xi_2)-f^{++}(0,0)\right),$$

$$\psi^{++}(\xi_1,\xi_2)= \\ =-t_2\xi_1^{-1}\xi_2^{-1}\big(f^{++}(\xi_1,\xi_2)-f^{++}(\xi_1,0)- \\ -f^{++}(0,\xi_2)+f^{++}(0,0)\big).$$

Это означает, что при любой правой части уравнение

$$\left(T_A\phi^{++}\right)(\xi_1,\xi_2)=f^{++}(\xi_1,\xi_2)$$

имеет единственное решение в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$. Таким образом, из условия 6) вытекает 5), а, следовательно, и каждое из утверждений 1), 2), 3), 4). $\triangleleft$.

Замечание. Утверждения теоремы, разумеется, остаются справедливым и в пространствах $L_p^{++}\left(\Gamma^2\right)$,$1<p<\infty$, но в этом случае они являются следствиями одного утверждения Л.И. Сазонова [10]. Однако теорема 3 переносится и на случай символов вида $A(\xi)=\left(p\left(\xi_1\xi_2^{-1}\right)\right)^{-1}$, где $p(t)$ — произвольный тригонометрический полином и в таком виде уже не вытекает из [10]. Отметим, что приведенные в теореме построения при решении уравнения

$$\left(T_A\phi^{++}\right)(\xi_1,\xi_2)=f^{++}(\xi_1,\xi_2)$$

позволяют получить конструкцию обратного оператора.

Разумеется, для произвольных символов ограниченных операторов Теплица

$$A(\xi)=\big(A^{--}(\xi_1,\xi_2),A^{-+}(\xi_1,\xi_2),\\ A^{+-}(\xi_1,\xi_2),A^{++}(\xi_1,\xi_2)\big)$$

операция умножения неопределена. Тем не менее, для некоторых пар символов операция умножения $\circ$ может быть введена. Опишем один из возможных способов определения умножения $\circ$.

Пусть $a=\{a_{kj}\}_{(k,j)\in Z_+^2}$ — двумерная последовательность. Положим

$$a(n)=\{a_{kj}(n)\}_{(k,j)\in Z_+^2},$$

$$a_{kj}(n)=\begin{cases} a_{kj}, & (k,j)\in[-n,n]\times[-n,n],\\ 0, & (k,j)\notin[-n,n]\times[-n,n].\end{cases}$$

Символ оператора Теплица, порожденного последовательностью $\alpha(n)$ обозначим через $A_n(\xi)$. Ясно, что $A_n(\xi)\in W_m\left(\Gamma^2\right)$ для всех $n\in Z_+$.

Предположим, что последовательности

$$\alpha=\{\alpha_{kj}\}_{(k,j)\in Z_+^2} \text{ и } \beta=\{\beta_{kj}\}_{(k,j)\in Z_+^2}$$

порождают ограниченные операторы Теплица, а $A_n(\xi)$, $B_n(\xi)$ последовательности тригонометрических полиномов, построенные выше.

Положим по определению

$$A_n(\xi)\circ B_n(\xi)=A_n(\xi)\,B_n(\xi).$$

Если последовательность $T_{\alpha(n)*\beta(n)}$ сходится в смысле топологии $EndW_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$ к оператору Теплица T_γ, то положим

$$A(\xi)\circ B(\xi)=C(\xi),$$

где $C(\xi)$ — символ оператора T_γ. При выполнении описанных условий будем также пользоваться записью

$$A(\xi)\circ B(\xi)=\lim_{n\to\infty}A_n(\xi)\circ B_n(\xi).$$

Теорема 4. Пусть

$$(A(\xi))^{-1}=\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right),$$

где $t_1\in\Gamma$, а $t_2\in D^+$. Тогда определено каждое из произведений

$$\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{+-}^{-1}\circ\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1},$$

$$\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{-+}^{-1}\circ\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1},$$

совпадающие на торе Γ^2 с поточечным произведением. Оператор Теплица с символом

$$\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{+-}^{-1}\circ\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1}$$

ограничен и обратим в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$, а оператор Теплица с символом

$$\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{-+}^{-1}\circ\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1}$$

ограничен в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m=(\infty,\infty)$, является обобщенно обратимым и имеет бесконечномерные дефектные подпространства.

$\triangleright$. Проверка того, что каждое из указанных в формулировке теоремы произведений определено элементарна. Утверждение об операторе Теплица с символом

$$\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{+-}^{-1}\circ\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1}$$

доказывается так же, как и аналогичное утверждение в теореме 3. Символ

$$\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{-+}^{-1}\circ\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1}$$

допускает следующее представление

$$\left(1-t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{-+}^{-1}\circ\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1}=\\ =-t_1\xi_1^{-1}\xi_2\sum_{k\in Z_+}t_1^{-k}\left(\xi_1^{-1}\xi_2\right)^k\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1},$$

$$(\xi_1;\xi_2)\in D^-\times\overline{D^+}.$$

Тогда имеет место равенство

$$T_A = T_{\tilde{A}} T_{\xi_1^{-1}\xi_2},$$

где $T_{\tilde{A}}$ оператор Теплица с символом

$$-t_1 \sum_{k\in Z_+} t_1^{-k} \left(\xi_1^{-1}\xi_2\right)^k \left(1 - t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1}.$$

Этот оператор обратим в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m = (\infty,\infty)$ и коммутирует с оператором $T_{\xi_1^{-1}\xi_2}$, при этом

$$T_{\tilde{A}}^{-1} = -t_1^{-1} T_{\left(1-t_1\xi_1^{-1}\xi_2\right)} T_{\left(1-t_2\xi_1^{-1}\xi_2\right)},$$

поэтому обобщенным обратным к оператору $T_A = T_{\tilde{A}} T_{\xi_1^{-1}\xi_2}$ является оператор

$$T_A^{-1} = \left(T_{\tilde{A}}\right)^{-1} T_{\xi_1\xi_2^{-1}}. \triangleleft$$

Теорема 5. Пусть

$$(A(\xi))^{-1} = \left(1 - t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)\left(1 - t_2^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right),$$

где $t_1 \in \Gamma$, а $t_2 \in D^-$. Тогда определено каждое из произведений

$$\left(1 - t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{+-}^{-1} \circ \left(1 - t_2^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1},$$

$$\left(1 - t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{-+}^{-1} \circ \left(1 - t_2^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1},$$

совпадающие на торе Γ^2 с поточечным произведением. Оператор Теплица с символом

$$\left(1 - t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{+-}^{-1} \circ \left(1 - t_2^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1}$$

ограничен и обратим в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m = (\infty,\infty)$, а оператор Теплица с символом

$$\left(1 - t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{-+}^{-1} \circ \left(1 - t_2^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right)^{-1}$$

ограничен в пространстве $W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$, $m = (\infty,\infty)$ является обобщенно обратимым и имеет бесконечномерные дефектные подпространства.

$\triangleright$. Теорема доказывается так же, как и предыдущая теорема. $\triangleleft$.

Теорема 6. Пусть

$$(A(\xi))^{-1} = \left(1 - t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)\left(1 - t_2^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right),$$

где $t_1, t_2 \in \Gamma$. Тогда произведение

$$\left(1 - t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{+-}^{-1} \circ \left(1 - t_2^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right)_{-+}^{-1}$$

неопределено.

$\triangleright$. Предположим сначала, что $t_1 \neq t_2^{-1}$. Если допустить, что произведение

$$\left(1 - t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{+-}^{-1} \circ \left(1 - t_2^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right)_{-+}^{-1}$$

определено, то существует

$$\lim_{n\to\infty} T_{\alpha(n)*\beta(n)}\phi^{++}$$

для любой функции $\phi^{++} \in W_m^{++}\left(\Gamma^2\right)$. Но тогда существует и

$$\pi_{00}\left(\lim_{n\to\infty} T_{\alpha(n)*\beta(n)}\phi^{++}\right) = \\ = \lim_{n\to\infty} \pi_{00}\left(T_{\alpha(n)*\beta(n)}\phi^{++}\right)$$

для функции $\phi^{++}(\xi_1,\xi_2) = 1$. Поскольку в рассматриваемом случае

$$A(\xi) = \left(1 - t_1\xi_1\xi_2^{-1}\right)_{+-}^{-1} = \sum_{k\in Z_+} t_1^k\xi_1^k\xi_2^{-k},$$

$$B(\xi) = \left(1 - t_2^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2\right)_{-+}^{-1} = \sum_{j\in Z_+} t_2^{-j}\xi_1^{-j}\xi_2^{j},$$

то

$$A_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} t_1^k\xi_1^k\xi_2^{-k}, \quad B_n(\xi) = \sum_{j=0}^{n} t_2^{-j}\xi_1^{-j}\xi_2^{j}.$$

Поэтому

$$\pi_{00}\left(T_{\alpha(n)*\beta(n)}\phi^{++}\right) = \\ = \pi_{00}\left(\sum_{k=0}^{n} t_1^k\xi_1^k\xi_2^{-k} \sum_{j=0}^{n} t_2^{-j}\xi_1^{-j}\xi_2^{j}\right) = \\ = \frac{1 - \left(t_1t_2^{-1}\right)^{n+1}}{1 - t_1t_2^{-1}}.$$

Ясно, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(t_1t_2^{-1}\right)^{n+1}}{1 - t_1t_2^{-1}}$$

не существует. Аналогичное вычисление в случае $t_1 = t_2^{-1}$ приводят к тому, что для

$$\phi^{++}(\xi_1,\xi_2) = 1 \quad \pi_{00}\left(T_{\alpha(n)*\beta(n)}\phi^{++}\right) = \\ = \pi_{00}\left(\sum_{k=0}^{n} t_1^k\xi_1^k\xi_2^{-k} \sum_{j=0}^{n} t_1^{-j}\xi_1^{-j}\xi_2^{j}\right) = n.$$

$\triangleleft$.

Литература

1. *Симоненко И. Б.* О многомерных дискретных свертках. В сб. "Матем. исследования". Кишинев, Штиинца, 1968, 3, В. I. С. 298–313.
2. *Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах. Матем. сб., 1967, 74. В. 2. С. 108–122.
3. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979. 493 с.
4. *Пресдорф З.* Линейные интегральные уравнения. В кн. «Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». 1988. Т. 27. С. 5–130.
5. *Малышев В. А.* Уравнения Винера-Хопфа и их применение в теории вероятностей. М.: ВИНИТИ, Итого науки и техники. Сер. мат. статистика, теор. кибернетика. Т. 14. С. 5–35.
6. *Пасенчук А. Э.* Абстрактные сингулярные операторы. Новочеркасск: Изд. НПИ, 1993. 215 с.
7. *Городецкий М. Б.* Об одном теплицевом операторе в пространстве бесконечно дифференцируемых функций двух переменных // Изв. СКНЦ ВШ. 1979. №3. С. 3–5.
8. *Городецкий М. Б.* Двумерные операторы Теплица с аналитическими символами и некоторые их приложения. Дисс. .... канд. физ.-мат. наук, Ростов-на-Дону, 1980. 127 с.
9. *Пасенчук А. Э.* Априорные оценки решений некоторых уравнений типа свертки в пространствах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности. Исследования по математическому анализу / Юж. математ. ин-т ВНЦ РАН и РСО-А. Владикавказ, 2009. С. 165–189. (Итоги науки. ЮФО. Сер. Математический форум. Т. 3).
10. *Сазонов Л. И.* О решении задачи линейного сопряжения функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. 1973. Т. 209, №4. С. 1288–1291.

Ключевые слова: оператор, двумерный, Винера-Хопфа, Теплица, счетно-нормированное, пространство, разрывный, символ, нетеровость.

Статья поступила 27 апреля 2011 г.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону