УДК 539.3

О ПОВЕДЕНИИ И РЕЗОНАНСАХ НЕКОТОРЫХ БЛОЧНЫХ СТРУКТУР СЕЙСМОЛОГИИ И МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЯ[1]

Бабешко В. А.[2], Кириллова Е. В.[3], Колесников М. Н.[4], Евдокимова О. В.[5], Бабешко О. М.[6], Телятников И. С.[7], Грищенко Д. В.[8], Лозовой В. В.[9], Плужник А. В.[10], Шишкин А. А.[11]

BEHAVIOR AND RESONANCES OF SOME BLOCK STRUCTURES OF SEISMOLOGY AND MATERIAL SCIENCES

Babeshko V. A., Kirillova E. V. Kolesnikov M. H., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Telyatnikov I. S., Grishenko D. V., Shishkin A. A., Lozovoi V. V., Pluzhnik A. V.

This work describes the usage of the block elements method's modification for solving the boundary value problem for the plates with cracks. It is showed that applying the block element method permit to solve the boundary value problem and to investigate the behavior and resonances of such structures.

Keywords: block element method, boundary value problem, automorphism, pseudo differential equation, complicated domain, crack, plate.

Излагаются теоретические основы исследования поведения многослойных пластин, имеющих трещины, имитирующие разломы или дефекты.

Задачи такого рода возникают в сейсмологии при моделировании разломов различных типов в слоистых геологических структурах, в машиностроении и авиастроении при изучении состояния покрытий материалов, а также при строительстве современных сооружений из композиционных тонкостенных конструкций.

Различные подходы к решению таких задач приводятся в ряде отечественных и зару-

---

[1]Работа выполнена в соответствии с Соглашением с Минобрнаукой РФ (14.B37.21.0869 от 6 сентября 2012 г.)

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

[3]Кириллова Евгения Витальевна, профессор Висбаденского университета, Германия; e-mail: kirillova@web.de.

[4]Колесников Максим Николаевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; kmm@fpm.kubsu.ru.

[5]Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[6]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[7]Телятников Илья Сергеевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

[8]Грищенко Дмитрий Вадимович, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

[9]Лозовой Виктор Викторович, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: niva_kgu@mail.ru.

[10]Плужник Андрей Валерьевич, научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[11]Шишкин Алексей Александрович, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

бежных работ [1–5], в частности, излагаются подходы, использующие метод блочного элемента [6–12]. Однако для ряда граничных задач теории трещин с простыми границами, несмотря на универсальность, метод блочного элемента оказывается технически сложным. Этот метод целесообразно использовать при решении граничных задач со сложными условиями сопряжения границ трещин и изменяющимися свойствами на их берегах, где возникает необходимость введения внешнего анализа, автоморфизма и построения псевдодифференциальных уравнений [6, 11, 12]. В более простых случаях для трещин с плоскими и прямолинейными границами целесообразно использовать упрощенный метод блочного элемента с применением элементов топологического подхода, изложенного в [12]. Такой подход демонстрируется в настоящей работе.

1. Рассмотрим покрытие, описываемое граничной задачей для двух пластин в контакте с трехмерной подложкой, в качестве простейшей модели разноразмерной блочной структуры. Примем нижнюю неограниченную пластину бездефектной, а верхнюю — состоящей из разнотипных контактирующих при некоторых граничных условиях фрагментов в виде полуплоскостей.

Две пластины Кирхгофа могут служить простейшей моделью литосферной плиты, состоящей из частей горизонтально ориентированных блоков-пластин и содержащей бесконечный разлом.

Сохраним традиционные в теории пластин обозначения перемещений $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ и механических параметров [4, 5, 12]. Ниже u_1, u_2 — перемещения точек пластин по горизонтальным направлениям срединной поверхности, u_3 — по нормали к ней. Тогда уравнения движения пластин в случае установившегося с частотой ω режима колебаний принимают вид

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1,\partial x_2\right)\mathbf{u}_b - \varepsilon_{5b}\mathbf{g}_b = \varepsilon_{5b}\mathbf{t}_b. \qquad (1)$$

Здесь [12]

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} \psi_{11}u_{1b} & \psi_{12}u_{2b} & 0 \\ \psi_{12}u_{1b} & \psi_{22}u_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33}u_{3b} \end{pmatrix},$$

$$\psi_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{4b}, \quad \psi_{12} = \varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\psi_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{4b},$$

$$\psi_{33} = \varepsilon_{3b}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right) + \varepsilon_{4b},$$

где

$$\varepsilon_{1b} = 0{,}5\left(1-\nu_b\right), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5\left(1+\nu_b\right),$$

$$\varepsilon_{3b} = \frac{h_b^2}{12}, \quad \varepsilon_{4b} = \omega^2\rho_b\frac{1-\nu_b^2}{E_b}, \quad \varepsilon_{5b} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b h_b},$$

$$g_{1b} = \mu_b\left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1}\right),$$

$$g_{2b} = \mu_b\left(\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2}\right),$$

$$g_{3b} = \lambda_b\left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2b}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_3}\right) + 2\mu_b\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_3},$$

$$x_3 = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{R}_b\left(-i\alpha_1, -i\alpha_2\right)\mathbf{U}_b = \\ = -\begin{pmatrix} \xi_{11}U_{1b} & \xi_{12}U_{2b} & 0 \\ \xi_{12}U_{1b} & \xi_{22}U_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{33}U_{3b} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F}_2\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F}_2\mathbf{g}_b, \quad b = 1,\ 2, \ldots,\ B,$$

$$\xi_{11} = \alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2 - \varepsilon_{4b}, \quad \xi_{12} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2,$$

$$\xi_{22} = \alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2 - \varepsilon_{4b}, \quad \xi_{33} = \varepsilon_{3b}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)^2 + \varepsilon_{4b}.$$

Выше для пластин приняты обозначения: λ,μ — параметры Ламе, ν —коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, h — толщина, ρ — плотность; $\mathbf{g}_b = \{g_{1b}, g_{2b}, g_{3b}\}$, $\mathbf{t}_b = \{t_{1b}, t_{2b}, t_{3b}\}$ — соответственно векторы контактных напряжений и внешних давлений, действующих вдоль оси x_3 в области Ω_b; $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ — двумерный оператор преобразования Фурье.

Разнообразные граничные условия диктуются типом частей границ каждого блока. Так, при принятых обозначениях граничные условия для случая шарнирного отпирания в зоне контакта, т.е. свободного вращения на границе вокруг оси x_1, имеют вид

$$M = -D\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) = 0, \\ D = \frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)}, \qquad (2)$$

где M — величина изгибающего момента, D — жесткость пластины.

Для случая, когда края пластины могут свободно смещаться вдоль оси x_3, граничное условие запишется

$$Q = -D\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) = 0, \quad (3)$$

где Q — величина поперечной силы.

В случае жесткого защемления необходимо потребовать, чтобы смещения в направлении осей были равны нулю

$$u_k = 0, \quad k = 1,\ 2,\ 3. \quad (4)$$

Для запрещения поворота срединной плоскости вокруг оси x_1 следует потребовать выполнения условия

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0. \quad (5)$$

Выражения для нормальной и касательной составляющих напряжений на границе даются соответственно соотношениями

$$N_{x_2} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right),$$

$$T_{x_1 x_2} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).$$

В качестве деформируемого основания — подложки, на которой находятся пластины–покрытия, описываемые системой (1), можно принимать различные модели. Это могут быть деформируемое полупространство, слой, многослойное полупространство, в том числе анизотропное, вязкоупругие среды. Также может быть использовано основание Винклера. Во всех перечисленных случаях соотношения между напряжениями g_{kb} и перемещениями u_{kb} $(k = 1,2,3)$ на поверхности среды имеют вид

$$\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2,x_3)\times$$
$$\times\,\mathbf{G}(\alpha_1,\alpha_2)\,e^{-i\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}\rangle}d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|_{m,n=1}^{3}, \quad \langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2,0) = O\left(A^{-1}\right),$$

$$A = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \to \infty, \quad K_{mn}(\alpha_1,\alpha_2,x_3)$$

— аналитические функции двух комплексных переменных α_k $(k = 1,2)$, в частности, мероморфные, их многочисленные примеры приведены в [13–15].

Соотношения (6) называются функциями влияния. В тех случаях, когда уравнения, описывающие поведение среды основания, известны, элементы матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2,0)$ удается вычислить. Когда таких уравнений нет — функции влияния могут быть получены экспериментально.

2. В качестве примера рассмотрим скалярный случай вертикальных колебаний пластин, покрывающих полупространство. Расположим систему координат $x_1 o x_2$ на плоскости пластины таким образом, чтобы ось ox_2 была перпендикулярна берегам прямолинейной трещины, ось ox_1 лежала вдоль трещины, ось ox_3 была бы перпендикулярна плоскости пластины. На берегах неограниченной трещины задаются некоторые граничные условия из числа перечисленных выше. Считаем, что в точке $\left(x_2^0,\ 0\right)$ правой полуплоскости задается вертикальное гармоническое воздействие сосредоточенной силой $A\delta\left(x_2 - x_2^0\right)e^{-i\omega t}$.

Обозначим вертикальные перемещения пластин через u_{3j} $(j = 1,\ 2,\ 3)$. Здесь вертикальные смещения правой и левой полуплоскостей верхней пластины соответственно имеют индексы $j = 1,\ 2$, индекс $j = 3$ соответствует вертикальному смещению нижней пластины.

Тогда граничная задача описывается следующей системой уравнений:

$$R_1 u_{31} - E_1 g_1 = b_1, \quad x_2 > 0, \quad (7)$$

$$R_2 u_{32} - E_2 g_2 = 0, \quad x_2 < 0, \quad (8)$$

$$R_3 u_{33} = b_3, \quad -\infty < x_2 < \infty, \quad (9)$$

$$u_{33} = u_{31}, \quad x_2 > 0,$$

$$u_{33} = u_{32}, \quad x_2 < 0,$$

$$b_3 = -E_3 g_1, \quad x_2 > 0,$$

$$b_3 = -E_3 g_2, \quad x_2 < 0.$$

Здесь всюду $-\infty < x_1 < \infty$.

Применив к уравнениям (7)–(9) и граничным условиям (2)–(5) преобразование Фурье по параметру x_1, приходим к одномерной граничной задаче по параметру x_2, и упростим дальше, положив $\alpha_0 = 0$.

В дальнейшем для упрощения формул у параметров x_2, α_2 индексы всюду опущены. В обозначениях вертикальных перемещений пластин u_{3j} $(j = 1,\ 2,\ 3)$ также опущен первый индекс.

Введем следующие обозначения

$$F^{-1}\left(G\left(\alpha\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\left(\alpha\right)e^{-i\alpha x}d\alpha=g\left(x\right),$$

$$F^{+}\left(g\left(x\right)\right)=\int\limits_{0}^{\infty}g\left(x\right)e^{i\alpha x}dx,$$

$$F^{-}\left(g\left(x\right)\right)=\int\limits_{-\infty}^{0}g\left(x\right)e^{i\alpha x}dx.$$

Рассмотрим уравнение (7), считая, что входящие в него функции являются преобразованием Фурье по параметру x_1. Имеем

$$\varepsilon_{1,3}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}-\varepsilon_{1,4}u_1-\varepsilon_{1,5}g_1=-\varepsilon_{1,5}A\delta\left(x-x^0\right), \quad x>0.$$

Его решение, включая общее решение однородного и частное неоднородного уравнений, для $x>0$ имеет вид

$$u_1=C_1e^{-q_1x}+C_2e^{iq_1x}+F^{-1}\left(R_1^{-1}B_1^{+}\right)+ \\ +F^{-1}\left(R_1^{-1}E_1G_1^{+}\right). \quad (10)$$

Или в преобразованиях Фурье

$$U_1^{+}=\tilde{C}_1\frac{1}{\alpha+iq_1}+\tilde{C}_2\frac{1}{\alpha+q_1}+ \\ +\left\{R_1^{-1}B_1^{+}\right\}^{+}+\left\{R_1^{-1}E_1G_1^{+}\right\}^{+},$$

где $R_1=\varepsilon_{1,3}\alpha^4-\varepsilon_{1,4}$, $B_1^{+}=-\varepsilon_{1,5}Ae^{i\alpha x^0}$, $E_1=\varepsilon_{1,5}$, $x^0>0$ — координата точечного источника, $A>0$ — мощность точечного источника, q_1 — положительный вещественный корень уравнения $R_1=0$, $\tilde{C}_j=-iC_j$ $(j=3,\,4)$

$$R_1^{-1}B_1^{+}=-\frac{\varepsilon_{1,5}Ae^{i\alpha x^0}}{\varepsilon_{1,3}\alpha^4-\varepsilon_{1,4}}= \\ =-\frac{\varepsilon_{1,5}Ae^{i\alpha x^0}}{\varepsilon_{1,3}\left(\alpha-q_1\right)\left(\alpha-iq_1\right)\left(\alpha+q_1\right)\left(\alpha+iq_1\right)},$$

$$\left\{R_1^{-1}B_1^{+}\right\}^{+}=R_1^{-1}B_1^{+}-\left\{R_1^{-1}B_1^{+}\right\}^{-},$$

$$\left\{R_1^{-1}B_1^{+}\right\}^{-}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma^{+}}\frac{R_1^{-1}B_1^{+}\left(\xi\right)}{\xi-\alpha}d\xi= \\ =-\frac{\varepsilon_{1,5}A}{4\varepsilon_{1,3}q_1^3}\left(\frac{e^{iq_1x^0}}{\alpha-q_1}+\frac{ie^{-q_1x^0}}{\alpha-iq_1}\right),$$

$$R_1^{-1}E_1G_1^{+}=\frac{\varepsilon_{1,5}G_1^{+}}{\varepsilon_{1,3}\alpha^4-\varepsilon_{1,4}}= \\ =\frac{\varepsilon_{1,5}G_1^{+}}{\varepsilon_{1,3}\left(\alpha-q_1\right)\left(\alpha-iq_1\right)\left(\alpha+q_1\right)\left(\alpha+iq_1\right)},$$

$$\left\{R_1^{-1}E_1G_1^{+}\right\}^{+}=R_1^{-1}E_1G_1^{+}-\left\{R_1^{-1}E_1G_1^{+}\right\}^{-},$$

$$\left\{R_1^{-1}E_1G_1^{+}\right\}^{-}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma^{+}}\frac{R_1^{-1}E_1G_1^{+}\left(\xi\right)}{\xi-\alpha}d\xi= \\ =\frac{\varepsilon_{1,5}}{4\varepsilon_{1,3}q_1^3}\left(\frac{G_1^{+}\left(q_1\right)}{\alpha-q_1}+\frac{iG_1^{+}\left(iq_1\right)}{\alpha-iq_1}\right).$$

Таким образом,

$$U_1^{+}=\tilde{C}_1\frac{1}{\alpha+iq_1}+\tilde{C}_2\frac{1}{\alpha+q_1}- \\ -\frac{\varepsilon_{1,5}Ae^{i\alpha x^0}}{\varepsilon_{1,3}\alpha^4-\varepsilon_{1,4}}+R_1^{-1}E_1G_1^{+}+ \\ +\frac{\varepsilon_{1,5}}{4\varepsilon_{1,3}q_1^3}\left(\frac{Ae^{iq_1x^0}-G_1^{+}\left(q_1\right)}{\alpha-q_1}+ \right. \\ \left. +i\frac{Ae^{-q_1x^0}-G_1^{+}\left(iq_1\right)}{\alpha-iq_1}\right).$$

Рассмотрим уравнение (8)

$$\varepsilon_{2,3}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4}-\varepsilon_{2,4}u_2-\varepsilon_{2,5}g_2=0, \quad x<0.$$

Его общее решение имеет вид

$$u_2=C_3e^{q_2x}+C_4e^{-iq_2x}+ \\ +F^{-1}\left(R_2^{-1}E_2G_2^{-}\right), \quad (11)$$

а в образах Фурье

$$U_2^{-}=\tilde{C}_3\frac{1}{\alpha-iq_2}+\tilde{C}_4\frac{1}{\alpha-q_2}+\left\{R_2^{-1}E_2G_2^{-}\right\}^{-},$$

где $R_2=\varepsilon_{2,3}\alpha^4-\varepsilon_{2,4}$, $E_2=\varepsilon_{2,5}$, q_2 – положительный вещественный корень уравнения $R_2=0$,

$$R_2^{-1}E_2G_2^{-}=\frac{\varepsilon_{2,5}G_2^{-}}{\varepsilon_{2,3}\alpha^4-\varepsilon_{2,4}}= \\ =\frac{\varepsilon_{2,5}G_2^{-}}{\varepsilon_{2,3}\left(\alpha-q_2\right)\left(\alpha-iq_2\right)\left(\alpha+q_2\right)\left(\alpha+iq_2\right)},$$

$$\left\{R_2^{-1}E_2G_2^{-}\right\}^{-}=R_2^{-1}E_2G_2^{-}-\left\{R_2^{-1}E_2G_2^{-}\right\}^{+},$$

$$\left\{R_2^{-1}E_2G_2^-\right\}^+ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma^-}\frac{R_2^{-1}E_2G_2^-(\xi)}{\xi-\alpha}d\xi =$$
$$= -\frac{\varepsilon_{2,5}}{4\varepsilon_{2,3}q_2^3}\left(\frac{G_2^-(-q_2)}{\alpha+q_2}+\frac{iG_2^-(-iq_2)}{\alpha+iq_2}\right).$$

Таким образом,

$$U_2^- = \tilde{C}_3\frac{1}{\alpha-iq_2}+\tilde{C}_4\frac{1}{\alpha-q_2}+R_2^{-1}E_2G_2^-+$$
$$+\frac{\varepsilon_{2,5}}{4\varepsilon_{2,3}q_2^3}\left(\frac{G_2^-(-q_2)}{\alpha+q_2}+\frac{iG_2^-(-iq_2)}{\alpha+iq_2}\right).$$

Рассмотри уравнение (9)

$$\varepsilon_{3,3}\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4}-\varepsilon_{3,4}u_3-\varepsilon_{3,5}g_3=b_3, \quad -\infty<x<\infty.$$

Применив преобразование Фурье, получим

$$\left(\varepsilon_{3,3}\alpha^4-\varepsilon_{3,4}\right)U_3-\varepsilon_{3,5}G_3=B_3.$$

Последнее уравнение с учетом условий сопряжения с деформируемой подложкой, например, основанием Винклера и верхними пластинами принимает вид

$$G_3=\frac{U_3}{k_3},$$

где k_3 — коэффициент постели,

$$U_3=U_1^++U_2^-,$$

$$B_3=-\varepsilon_{3,5}\left(G_1^++G_2^-\right).$$

Тогда

$$\left(\varepsilon_{3,3}\alpha^4-\varepsilon_{3,4}-\frac{\varepsilon_{3,5}}{k_3}\right)\left(U_1^++U_2^-\right)=$$
$$=-\varepsilon_{3,5}\left(G_1^++G_2^-\right).$$

Из последнего уравнения можно исключить либо $U^{\pm}(\alpha)$, либо $G^{\pm}(\alpha)$. Выберем первый вариант.

Таким образом, приходим к функциональному уравнению вида

$$\left(\tilde{C}_1\frac{1}{\alpha+iq_1}+\tilde{C}_2\frac{1}{\alpha+q_1}+\frac{\varepsilon_{1,5}}{4\varepsilon_{1,3}q_1^3}\times\right.$$
$$\times\left[\frac{Ae^{iq_1x^0}-G_1^+(q_1)}{\alpha-q_1}+i\frac{Ae^{-q_1x^0}-G_1^+(iq_1)}{\alpha-iq_1}\right]-$$
$$-\frac{\varepsilon_{1,5}\left(Ae^{i\alpha x^0}-G_1^+\right)}{\varepsilon_{1,3}\alpha^4-\varepsilon_{1,4}}+$$
$$+\tilde{C}_3\frac{1}{\alpha-iq_2}+\tilde{C}_4\frac{1}{\alpha-q_2}+\frac{\varepsilon_{2,5}G_2^-}{\varepsilon_{2,3}\alpha^4-\varepsilon_{2,4}}+$$
$$\left.+\frac{\varepsilon_{2,5}}{4\varepsilon_{2,3}q_2^3}\left[\frac{G_2^-(-q_2)}{\alpha+q_2}+\frac{iG_2^-(-iq_2)}{\alpha+iq_2}\right]\right)=$$
$$=\varepsilon_{3,5}\left(G_1^++G_2^-\right)M_3^{-1},$$

где $M_3=\left(\varepsilon_{3,3}\alpha^4-\varepsilon_{3,4}-\frac{\varepsilon_{3,5}}{k_3}\right)$.

Введя обозначения

$$M_1=\left(\frac{\varepsilon_{1,5}}{R_1}+\frac{\varepsilon_{3,5}}{M_3}\right), \quad M_2=\left(\frac{\varepsilon_{2,5}}{R_2}+\frac{\varepsilon_{3,5}}{M_3}\right),$$

$$R_j=\varepsilon_{j,3}\alpha^4-\varepsilon_{j,4} \quad (j=1,2),$$

получаем функциональное уравнение в форме

$$G_1^++MG_2^-=-M_1^{-1}\left(\tilde{C}_1\frac{1}{\alpha+iq_1}+\right.$$
$$+\tilde{C}_2\frac{1}{\alpha+q_1}+\tilde{C}_3\frac{1}{\alpha-iq_2}+\tilde{C}_4\frac{1}{\alpha-q_2}-$$
$$-\frac{\varepsilon_{1,5}Ae^{i\alpha x^0}}{R_1}+\frac{\varepsilon_{1,5}}{4\varepsilon_{1,3}q_1^3}\left[\frac{Ae^{iq_1x^0}-G_1^+(q_1)}{\alpha-q_1}+\right.$$
$$\left.+i\frac{Ae^{-q_1x^0}-G_1^+(iq_1)}{\alpha-iq_1}\right]+$$
$$\left.+\frac{\varepsilon_{2,5}}{4\varepsilon_{2,3}q_2^3}\left[\frac{G_2^-(-q_2)}{\alpha+q_2}+\frac{iG_2^-(-iq_2)}{\alpha+iq_2}\right]\right),$$

где $M=M_1^{-1}M_2$.

Полученное функциональное уравнение можно назвать нагруженным уравнением Винера–Хопфа в связи с наличием неизвестных функционалов $G_1^+(q_1)$, $G_1^+(iq_1)$, $G_2^-(-q_2)$, $G_2^-(-iq_2)$, нуждающихся в дополнительном определении.

Факторизуем M в виде произведения $M=M_+M_-$ и умножим последнее уравнение на M_+^{-1} [13–15], получим

$$M_+^{-1}G_1^+ + M_-G_2^- = -M_+^{-1}M_1^{-1}\left(\tilde{C}_1\frac{1}{\alpha+iq_1}+\right.$$
$$+\tilde{C}_2\frac{1}{\alpha+q_1}+\tilde{C}_3\frac{1}{\alpha-iq_2}+\tilde{C}_4\frac{1}{\alpha-q_2}-$$
$$-\frac{\varepsilon_{1,5}Ae^{i\alpha x^0}}{R_1}+\frac{\varepsilon_{1,5}}{4\varepsilon_{1,3}q_1^3}\left[\frac{Ae^{iq_1x^0}-G_1^+(q_1)}{\alpha-q_1}+\right.$$
$$\left.+i\frac{Ae^{-q_1x^0}-G_1^+(iq_1)}{\alpha-iq_1}\right]+$$
$$\left.+\frac{\varepsilon_{2,5}}{\varepsilon_{2,3}4q_2^3}\left[\frac{G_2^-(-q_2)}{\alpha+q_2}+\frac{iG_2^-(-iq_2)}{\alpha+iq_2}\right]\right).$$

Обозначив функции, стоящие перед постоянными коэффициентами и функционалами в правой части этого функционального уравнения, через $N_{mn}(\alpha)$, а функцию внешнего воздействия — через $B(\alpha)$, последнее уравнение можно переписать в виде

$$M_+^{-1}G_1^+ + M_-G_2^- =$$
$$=\sum_{r=1}^{4}N_{1r}(\alpha)\tilde{C}_r+N_{21}(\alpha)G_1^+(q_1)+$$
$$+N_{22}(\alpha)G_1^+(iq_1)+N_{23}(\alpha)G_2^-(-q_2)+$$
$$+N_{24}(\alpha)G_2^-(-iq_2)+B(\alpha).$$

Применив алгоритм решения уравнений Винера–Хопфа, факторизовав в виде суммы правую часть функционального уравнения, приходим к представлениям решений в форме

$$G_1^+(\alpha)=$$
$$=M_+(\alpha)\left[\sum_{r=1}^{4}\{N_{1r}\}^+\tilde{C}_r+\{N_{21}\}^+G_1^+(q_1)+\right.$$
$$+\{N_{22}\}^+G_1^+(iq_1)+\{N_{23}\}^+G_2^-(-q_2)+$$
$$\left.+\{N_{24}\}^+G_2^-(-iq_2)+\{B_1\}^+\right],\quad(12)$$

$$G_2^-(\alpha)=$$
$$=-M_-(\alpha)\left[\sum_{r=1}^{4}\{N_{1r}\}^-\tilde{C}_r+\{N_{21}\}^-G_1^+(q_1)+\right.$$
$$+\{N_{22}\}^-G_1^+(iq_1)+\{N_{23}\}^-G_2^-(-q_2)+$$
$$\left.+\{N_{24}\}^-G_2^-(-iq_2)+\{B_1\}^-\right].$$

Полагая последовательно в первом соотношении (12) $\alpha=q_1$ и $\alpha=iq_1$, а во втором — $\alpha=-q_2$ и $\alpha=-iq_2$, получим блочную систему алгебраических уравнений для определения функционалов $G_m^{\pm}$. Определив их из этой системы и внеся в правые части (12), получим соотношения вида

$$G_1^+(\alpha)=$$
$$=M_+(\alpha)\left[\sum_{r=1}^{4}P_{1r}^+(\alpha)\tilde{C}_r+B^+(\alpha)\right],\quad(13)$$

$$G_2^-(\alpha)=-M_-(\alpha)\left[\sum_{r=1}^{4}P_{1r}^-(\alpha)\tilde{C}_r+B^-(\alpha)\right].$$

Внеся функции (13) в правые части соотношений (10) и (11), применив обратное преобразование Фурье по параметру α, замененному на α_2, получим представление вида

$$u_1(x_2)=\sum_{r=1}^{4}n_r^+(x_2)\tilde{C}_r+b^+(x_2),\qquad(14)$$

$$u_2(x_2)=\sum_{r=1}^{4}n_r^-(x_2)\tilde{C}_r+b^-(x_2).$$

Участвующие в представлении (14) функции пока зависят от параметра преобразования Фурье α_1, как и соответствующие, преобразованные по параметру x_1, граничные условия. Полученные соотношения открывают возможность изучить влияние большого разнообразия граничных условий в области контакта полуплоскостей верхней пластины. Так, могут быть заданы бесконтактные условия, описываемые любыми двумя граничными условиями индивидуально для каждой пластины из числа (2)–(5). В этом случае колебания от одной верхней пластины к другой передаются через нижнюю пластину. Могут быть также заданы условия контакта, состоящие во взаимодействии берегов трещины в той или иной комбинации. В общем случае их будет четыре. Для всех этих случаев из приведенных систем находятся зависящие от параметра α_1 функции $\tilde{C}_r$ $\left(r=\overline{1,4}\right)$.

Резонансные свойства системы покрытие – подложка определяются путем исследования коэффициентов $\tilde{C}_r$ для различных типов граничных условий, различных значений параметров задачи и частоты.

Обращение Фурье по параметру α_1 от функций (14) дает решение первоначально поставленной граничной задачи.

Замечание. Построенное решение исходной граничной задачи позволяет проследить все этапы процесса разрушения трещины – от первоначально целой верхней пластины до последующего полного разъединения верхней пластины на две полуплоскости, т.е. ее разрушения.

Литература

1. *Саркисян В.С.* Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Ереван: Издательство ереванского университета, 1970. 443 с.
2. *Гузъ А.Н., Томашевский В.Т., Шульга Н.А., Яковлев В.С.* Технологические напряжения и деформации в композитных материалах. Киев: Выща школа, 1988. 272 с.
3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
4. *Бабешко В.А., Бабешко О.М, Евдокимова О.В.* К проблеме исследования материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 410, №1. С. 49–52.
5. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 409, №4. С.481–485.
6. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и нано структурах // ДАН. 2007. Т. 415, № 5. С. 596–599.
7. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Некоторые общие свойства блочных элементов // ДАН. 2012. Т. 442, № 1. С.37–40.
8. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О блочных элементы в теории плит сложной формы // МТТ. 2012. №5. С.92–97
9. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Горшкова Е.М., Иванов П.Б. Рядчиков И.В., Плужник А.В.* Блочные элементы в проблеме моделирования оползневых явлений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. №3. С. 7–15.
10. *Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бабешко В.А., Мухин А.С., Лозовой В.В., Кашков Е.В., Горшкова Е.М., Иванов П.Б.* Метод блочного элемента в проблеме шахт, подземных сооружений и теории сейсмических трасс // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. №4, С. 22–29.
11. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы // ДАН. 2013. Т. 449, № 6. С. 624–628.
12. *Бабешко В.А., Ритцер Д., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Федоренко А.Г.* К теории прогноза сейсмичности на основе механической концепции, топологический подход // ДАН. 2013. Т. 450, № 2. С.182–185.
13. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
14. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320с.
15. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничная задача, псевдодифференциальные уравнения, сложная область, трещина, пластина.

Статья поступила 31 января 2013 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар
Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону