УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ ЧЛЕНАМИ И СТАРШИМ МАТРИЧНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ — ЖОРДАНОВОЙ КЛЕТКОЙ[1]

***Крутенко Е. В.*[2], *Левенштам В. Б.*[3]**

THE ASYMPTOTIC INTEGRATION OF SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HIGH-FREQUENCY MEMBERS AND SENIOR MATRIX COEFFICIENT – JORDAN BOX

Krutenko E. V., Levenshtam V. B.

Ideas of N. N. Moiseev in interpretation of R. L. Evelson, related to the systems with smooth indexes, were used for asymptotic integration, considered in the process of normal system of linear differential equations containing high-frequency summands. The asymptotic decomposition of fundamental matrix of solutions of the studied system is constructed and justified.

Keywords: differential equation, fold elementary divisor, the high-frequency oscillations, asymptotic form.

Методы построения асимптотических разложений решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром, положительные степени которого служат сомножителями в коэффициентах, восходят к работам Лиувилля 30-х годов прошлого века. К основоположным исследованиям по этой тематике относятся так же известные работы Шлезингера, Биркгофа, Тамаркина и некоторых других авторов. В настоящее время список работ, посвящённых асимптотическому интегрированию линейных дифференциальных уравнений с большим параметром, очень обширен. Однако работ такого типа, в которых наряду с большими плавными присутствуют и быстро осциллирующие по времени коэффициенты, очень мало. К ним относятся: работа [1] (она изложена также в монографии [2]), где рассматриваются дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, а также наши работы [3, 4] для обыкновенных дифференциальных уравнений.Отметим попутно ещё работы [5–11] об асимптотическом интегрировании нелинейных дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими (но не плавными) слагаемыми.

Данная статья примыкает к работам [1–4]. В ней построена и обоснована полная асимптотика фундаментальной матрицы решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с высокочастотными коэффициентами, старший матричный коэффициент которой является жордановой клеткой. При построении формальной асимптотики использовался метод асимптотического интегрирования Н. Н. Моисеева [12–14] в обработке Р. Л. Евельсона [14] для аналогичной задачи без высокочастотных членов. Обоснование асимптотик в [12–14] практически отсутствует. В работе обоснование следует [4], где, в свою очередь, существенно используется методика Э. А. Коддингтона – Н. Левинсона [15].

1. Построение формальной асимптотики

Пусть m — натуральное, T — положительное число. На участке $t \in [0, T]$ рассмот-

[1]Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашения 14.A18.21.0356 и 8210) и РФФИ (проект № 12-01-00402-а).

[2]Крутенко Елена Владимировна, преподаватель математики Ростовского-на-Дону автодорожного колледжа; e-mail: vvanele@mail.ru.

[3]Левенштам Валерий Борисович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета; главный научный сотрудник Южного математического института ВНЦ РАН и РСО-А; e-mail: vleven@math.rsu.ru.

рим нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \omega\left[\mu(t)\mathbf{E} + \mathbf{J}_1\right]\mathbf{x} + \\ + \omega^{\frac{1}{2}}\left[\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t, \omega t)\right]\mathbf{x}, \omega \gg 1. \quad (1.1)$$

Здесь $\mu(t), t \in [0, T]$ — непрерывная комплекснозначная функция, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — квадратные матрицы порядка m с комплексными, вообще говоря, коэффициентами, $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $\mathbf{J}_1$ — первый единичный косой ряд (так что матрица в скобках при ω в (1.1) — верхняя жорданова клетка порядка m с характеристическим числом $\mu(t)$). Элементы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определены и непрерывны на множествах $t \in [0, T]$ и $(t, \tau) \in [0, T] \times [0, \infty)$ соответственно. Матрица $\mathbf{B}(t, \tau)$ является 2π-периодической по τ с нулевым средним

$$\langle \mathbf{B}(t, \tau) \rangle := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathbf{B}(t, \tau) d\tau = 0.$$

По аналогии с [12–14] фундаментальную матрицу решений системы (1.1) будем искать в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Lambda}(\omega)\left(\mathbf{U}(\omega, t) + \omega^{-\beta}\mathbf{V}(\omega, t, \omega t)\right) \times \\ \times e^{\int\limits_0^t (\omega\mu(s)\mathbf{E} + \omega^{\alpha}\mathbf{\Phi})ds}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Phi}$ — искомые матрицы, причём $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Phi}$ — диагональные, а элементами матрицы $\mathbf{V}$ являются 2π-периодические по последнему аргументу $\tau = \omega t$ функции с нулевыми средними, α и β — искомые положительные числа.

В дальнейшем точкой обозначается производная по t, а штрихом — производная по τ.

Подставим (1.2) в (1.1) и сократим полученное равенство на экспоненту

$$\mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{U}} + \omega^{-\beta}\mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{V}} + \omega^{-\beta+1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}' + \\ + \omega^{\alpha}\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{U} + \omega^{-\beta}\mathbf{V}\right)\mathbf{\Phi} = \omega\mathbf{J}_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{U} + \\ + \omega^{-\beta+1}\mathbf{J}_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{V} + \omega^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U} + \omega^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U} + \\ + \omega^{-\beta+\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V} + \omega^{-\beta+\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}. \quad (1.3)$$

Следуя [12–14], учтём равенства $\mathbf{J}_1\mathbf{\Lambda} = \delta\mathbf{\Lambda}\mathbf{J}_1$, где $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}[1, \delta, \ldots, \delta^{m-1}]$ и положим $\delta = \omega^{\alpha-1}$. Тогда, после умножения (1.3) слева на $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ получим уравнение

$$\dot{\mathbf{U}} + \omega^{-\beta}\dot{\mathbf{V}} + \omega^{-\beta+1}\mathbf{V}' + \omega^{\alpha}\mathbf{U}\mathbf{\Phi} + \\ + \omega^{-\beta+\alpha}\mathbf{V}\mathbf{\Phi} = \omega^{\alpha}\mathbf{J}_1\mathbf{U} + \omega^{-\beta+\alpha}\mathbf{J}_1\mathbf{V} + \\ + \omega^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U} + \omega^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U} + \\ + \omega^{-\beta+\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V} + \omega^{-\beta+\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}. \quad (1.4)$$

В дальнейшем для любой матрицы порядка m положим [14]

$$\mathbf{C} = \sum_{j=1-m}^{m-1} \mathbf{C}_{(j)},$$

где $\mathbf{C}_{(j)}$ — матрица порядка m, у которой j-ая диагональ совпадает с j-ой диагональю матрицы $\mathbf{C}$, а все остальные элементы равны нулю.

Воспользуемся разложениями

$$\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda} = \left(\left(\delta^{k-i}a_{i,k}\right)\right) = \sum_{j=p}^{m-1} \delta^j \mathbf{A}_{(j)}, \\ \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{\Lambda} = \left(\left(\delta^{k-i}b_{i,k}\right)\right) = \sum_{j=q}^{m-1} \delta^j \mathbf{B}_{(j)}, \quad (1.5)$$

$$1 - m \leqslant p, q \leqslant m - 1.$$

Будем рассматривать невырожденный случай [12–14]: $p = 1 - m$.

Применяя к (1.4) операцию усреднения по τ и учитывая (1.5), получим

$$\dot{\mathbf{U}} + \omega^{\alpha}\mathbf{U}\mathbf{\Phi} = \omega^{\alpha}\mathbf{J}_1\mathbf{U} + \\ + \sum_{j=1-m}^{m-1} \omega^{\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}\mathbf{A}_{(j)}\mathbf{U} + \\ + \sum_{j=1-m}^{m-1} \omega^{-\beta+\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}\left\langle \mathbf{B}_{(j)}\mathbf{V}\right\rangle. \quad (1.6)$$

Здесь $\mathbf{B}_{(j)} = 0$ при $j \leqslant q$.

Число α найдём из условия

$$\omega^{\alpha} = \omega^{\frac{1}{2}+(1-m)(\alpha-1)},$$

так что $\alpha = \frac{2m-1}{2m}$.

Вычитая из (1.4) (1.6), придём к равенству

$$\omega^{-\beta}\dot{\mathbf{V}} + \omega^{-\beta+1}\mathbf{V}' + \omega^{-\beta+\alpha}\mathbf{V}\mathbf{\Phi} = \\ = \omega^{-\beta+\alpha}\mathbf{J}_1\mathbf{V} + \sum_{j=1-m}^{m-1}\omega^{\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}\mathbf{B}_{(j)}\mathbf{U} + \\ + \sum_{j=1-m}^{m-1}\omega^{-\beta+\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}\mathbf{A}_{(j)}\mathbf{V} + \\ + \sum_{j=1-m}^{m-1}\omega^{-\beta+\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}\left\{\mathbf{B}_{(j)}\mathbf{V}\right\}.$$

Здесь и далее для 2π-периодических матриц $\mathbf{P}(\tau)$ используется обозначение

$$\left\{\mathbf{P}(\tau)\right\}_\tau = \mathbf{P}(\tau) - \left\langle\mathbf{P}(\tau)\right\rangle.$$

Требуя выполнение равенства

$$\omega^{-\beta+1} = \omega^{\frac{1}{2}+(1-m)(\alpha-1)},$$

найдём $\beta = \frac{1}{2m}$.

Таким образом, если обозначить $2m = k$, фундаментальная матрица (1.2) примет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Lambda}(\omega)\left(\mathbf{U}(\omega,t) + \omega^{-\frac{1}{k}}\mathbf{V}(\omega,t,\omega t)\right) \times \\ \times e^{\int\limits_0^t\left(\omega\mu(s)\mathbf{E}+\omega^{\frac{k-1}{k}}\mathbf{\Phi}(\omega,s)\right)ds}, \quad (1.7)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}[1,\omega^{-\frac{1}{k}},\ldots,\omega^{-\frac{m-1}{k}}]$. Положим далее

$$\mathbf{U}(\omega,t) = \sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\mathbf{U}_j(t),$$

$$\mathbf{V}(\omega,t,\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\mathbf{V}_j(t,\tau),$$

$$\mathbf{\Phi}(\omega,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\omega^{-\frac{l}{k}}\mathbf{\Phi}_l(t).$$

Уравнение (1.4) с учётом (1.7) и последних разложений примет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\dot{\mathbf{U}}_j + \omega^{-\frac{1}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\dot{\mathbf{V}}_j + \\ +\omega^{\frac{k-1}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\mathbf{V}_j' + \omega^{\frac{k-1}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\mathbf{U}_j\sum_{l=0}^{\infty}\omega^{-\frac{l}{k}}\mathbf{\Phi}_l + \\ + \omega^{\frac{k-2}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\mathbf{V}_j\sum_{l=0}^{\infty}\omega^{-\frac{l}{k}}\mathbf{\Phi}_l = \\ = \omega^{\frac{k-1}{k}}\mathbf{J}_1\left(\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\mathbf{U}_j + \omega^{-\frac{1}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\mathbf{V}_j\right) + \\ + \left(\sum_{d=1}^{k-1}\omega^{\frac{k-d}{k}}\mathbf{A}_{(d-m)} + \right. \\ \left. + \sum_{d=1}^{k-1}\omega^{\frac{k-d}{k}}\mathbf{B}_{(d-m)}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\mathbf{U}_j + \\ + \left(\sum_{d=1}^{k-1}\omega^{\frac{k-d-1}{k}}\mathbf{A}_{(d-m)} + \right. \\ \left. + \sum_{d=1}^{k-1}\omega^{\frac{k-d-1}{k}}\mathbf{B}_{(d-m)}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\mathbf{V}_j. \quad (1.8)$$

Здесь $\mathbf{B}_{(j)} = 0$ при $j \leqslant q$.

Приравняем в (1.8) коэффициенты при одинаковых степенях ω. Получим цепочку уравнений, первое из которых (при $\omega^{\frac{k-1}{k}}$) имеет вид

$$\mathbf{V}_0' + \mathbf{U}_0\mathbf{\Phi}_0 = \\ = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_0 + \mathbf{A}_{(1-m)}\mathbf{U}_0 + \mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{U}_0. \quad (1.9)$$

Применяя к (1.9) операцию усреднения по τ, получим

$$\mathbf{U}_0\mathbf{\Phi}_0 = \left(\mathbf{J}_1 + \mathbf{A}_{(1-m)}\right)\mathbf{U}_0. \quad (1.10)$$

Так как матрица $\left(\mathbf{J}_1 + \mathbf{A}_{(1-m)}\right)$ имеет различные характеристические числа [9], то найдётся матрица $\mathbf{T}$, такая что

$$\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{J}_1 + \mathbf{A}_{(1-m)}\right)\mathbf{T} = \\ = \operatorname{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m] = S_0,$$

где λ_i — характеристические числа матрицы $\left(\mathbf{J}_1 + \mathbf{A}_{(1-m)}\right)$. Тогда, умножая (1.10) слева на $\mathbf{T}^{-1}$ и обозначив

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}_j, \quad (1.11)$$

получим уравнение

$$\mathbf{F}_0\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{S}_0\mathbf{F}_0,$$

которому удовлетворяют

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{S}_0,$$

а значит $\mathbf{U}_0 = \mathbf{T}$.

Вычитая из (1.9) (1.10), придём к уравнению

$$\mathbf{V}_0' = \mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{U}_0 = \mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{T},$$

которое имеет решение

$$\mathbf{V}_0(t,\tau) = \left\{ \int\limits_0^\tau \mathbf{B}_{(1-m)}(t,s)ds \right\}_\tau \mathbf{T}(t).$$

Следующее равенство при $\omega^{\frac{k-2}{k}}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1' + \mathbf{U}_1\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{U}_0\mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{V}_0\Phi_0 = \\ = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_1 + \mathbf{J}_1\mathbf{V}_0 + \mathbf{A}_{(1-m)}\mathbf{U}_1 + \\ + \mathbf{A}_{(2-m)}\mathbf{U}_0 + \mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{U}_1 + \\ + \mathbf{B}_{(2-m)}\mathbf{U}_0 + \mathbf{A}_{(1-m)}\mathbf{V}_0 + \\ + \mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{V}_0. \quad (1.12)\end{aligned}$$

Для определённости мы здесь считаем, что $m \geqslant 2$. Применяя к (1.12) операцию $\langle\cdots\rangle$, найдём

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_1\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{U}_0\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_1 + \\ + \mathbf{A}_{(1-m)}\mathbf{U}_1 + \mathbf{A}_{(2-m)}\mathbf{U}_0 + \left\langle \mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{V}_0 \right\rangle.\end{aligned}$$

Умножая последнее выражение слева на $\mathbf{T}^{-1}$ и учитывая обозначение (1.11), придём к равенству

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_0\mathbf{F}_1 = \mathbf{T}^{-1}\left\langle \mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{V}_0 \right\rangle + \\ + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{(2-m)}\mathbf{T} - \mathbf{\Phi}_1. \quad (1.13)\end{aligned}$$

Далее будем использовать представление

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{F}} + \widetilde{\mathbf{F}},$$

где $\widehat{\mathbf{F}}$ — диагональная матрица, диагональные элементы которой совпадают с соответствующими элементами матрицы $\mathbf{F}$, лежащими на главной диагонали. Из формулы (1.13) следует, что элементы матрицы $\widetilde{\mathbf{F}}_1 = \left(f_{ij}^{(1)}\right)$ находятся из соотношений

$$f_{i,j}^{(1)} = \frac{k_{i,j}^{(1)}}{\lambda_j - \lambda_i}, i \neq j,$$

где $k_{i,j}^{(1)}$ — элементы известной матрицы $\mathbf{K}_1 = \mathbf{T}^{-1}\left\langle \mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{V}_0 \right\rangle + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{(2-m)}\mathbf{T}$. Положим $\widehat{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{0}$, а $\mathbf{\Phi}_1 = \widehat{\mathbf{K}}_1$. Зная $\mathbf{F}_1$, найдём и $\mathbf{U}_1$.

Применяя к (1.12) операцию $\{\cdots\}_\tau$ получим

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1' = \mathbf{J}_1\mathbf{V}_0 + \mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{U}_1 + \mathbf{B}_{(2-m)}\mathbf{U}_0 + \\ + \mathbf{A}_{(1-m)}\mathbf{V}_0 + \left\{\mathbf{B}_{(1-m)}\mathbf{V}_0\right\}_\tau - \mathbf{V}_0\mathbf{\Phi}_0,\end{aligned}$$

Откуда найдём $\mathbf{V}_1$.

Легко видеть, что описанным способом можно найти $\mathbf{U}_j$, $\mathbf{V}_j$ и $\mathbf{\Phi}_l$ с любым номером j.

2. Обоснование

В этом пункте для соответствующих решений системы (1.1) будет обоснована полная асимптотика.

Введём следующие обозначения:

$$\mathbf{U}^l(t,\omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}}\mathbf{U}_j(t),$$

$$\mathbf{V}^l(t,\tau,\omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}}\mathbf{V}_j(t,\tau),$$

$$\mathbf{\Phi}^l(t,\tau,\omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}}\mathbf{\Phi}_j(t,\tau),$$

где $l \in N$ или $l = \infty$, $\mathbf{U}^\infty \equiv \mathbf{U}$, $\mathbf{V}^\infty \equiv \mathbf{V}$; $\mathbf{u}_l^k$ и $\mathbf{v}_l^k$ — k-тые столбцы матриц $\mathbf{U}^l$ и $\mathbf{V}^l$ соответственно,

$$q_k = \int\limits_0^t \left(\omega\mu(s) + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\lambda_k\right) ds,$$

$$\boldsymbol{\phi}_l^k = \mathbf{u}_l^k + \omega^{-1/2m}\mathbf{v}_l^k.$$

Теорема. Существует $\omega_0 > 0$, такое что при $\omega > \omega_0$ для каждого $k = \overline{1,m}$ найдётся решение $\boldsymbol{\phi}^k$ системы уравнений (1.1), для которого при всех целых неотрицательных l выполняется оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} |\boldsymbol{\phi}^k(t)e^{-q_k} - \boldsymbol{\phi}_l^k(t)| \leqslant \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2m}}},$$

где $c = c(l)$ — не зависящая от ω константа.

Доказательство. Так как

$$\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{U} + \omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}\right) e^{\int\limits_0^t \left(\omega\mu(s)\mathbf{E} + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{\Phi}\right)ds}$$

— формальное асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений (1.1), то справедливо формальное равенство

$$\mathbf{\Lambda}\left(\dot{\mathbf{U}}+\omega^{-\frac{1}{2m}}\dot{\mathbf{V}}+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{V}'\right)+$$
$$+\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{U}+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}\right)\left(\omega\mu(t)\mathbf{E}+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{\Phi}\right)=$$
$$=\omega\left(\mu\mathbf{E}+\mathbf{J}_1\right)\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{U}+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}\right)+$$
$$+\omega^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{U}+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}\right). \quad (2.1)$$

Умножая (2.1) слева на $\mathbf{\Lambda}^{-1}$, получим

$$\dot{\mathbf{U}}+\omega^{-\frac{1}{2m}}\dot{\mathbf{V}}+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{V}'+$$
$$+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\mathbf{U}+\omega^{\frac{-1}{2m}}\mathbf{V}\right)\mathbf{\Phi}=$$
$$=\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\overline{\mathbf{A}}(\omega,t)+\overline{\mathbf{B}}(\omega,\tau,t)\right)\left(\mathbf{U}+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}\right),$$

где

$$\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{J}_1+\omega^{\frac{1-m}{2m}}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}+\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{\Lambda}\right).$$

Для каждого натурального l найдём матрицу $\mathbf{C}_l(\omega)\equiv\mathbf{C}_l$, при которой имеет место соотношение

$$\dot{\mathbf{U}}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\dot{\mathbf{V}}^l+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\mathbf{V}^l\right)'+$$
$$+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{U}^l\mathbf{\Phi}^l+\omega^{\frac{2m-2}{2m}}\mathbf{V}^l\mathbf{\Phi}^l=$$
$$=\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{C}_l\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right).$$

Вычитая последнее равенство из очевидного соотношения

$$\dot{\mathbf{U}}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\dot{\mathbf{V}}^l+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\mathbf{V}^l\right)'+$$
$$+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{U}^l\mathbf{\Phi}^l+\omega^{\frac{2m-2}{2m}}\mathbf{V}^l\mathbf{\Phi}^l=$$
$$=\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\overline{\mathbf{A}}(\omega,t)+\overline{\mathbf{B}}(\omega,\tau,t)\right)\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right)+$$
$$+\mathbf{R}_1(\omega),$$

где

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{R}_1(\omega)\|=O\left(\omega^{\frac{4m-l}{2m}}\right),\quad \omega\to\infty,$$

получим

$$\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_l\right)\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right)=-\mathbf{R}_1(\omega).$$

Таким образом,

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_l\right\|\leqslant c_1\omega^{-\frac{2m-l+1}{2m}}.$$

Расмотрим уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}-\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{C}_l\mathbf{x}=\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_l\right)\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Будем учитывать тот факт, что матрица-функция

$$\mathbf{W}^l=\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right)e^{\int\limits_0^t\left(\omega\mu(s)\mathbf{E}+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{\Phi}^l\right)ds}\equiv$$
$$\equiv\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right)e^{\mathbf{Q}^l(t,\omega)},$$

$$\mathbf{Q}^l(t,\omega)\equiv\operatorname{diag}[q_{1l},q_{2l},\ldots,q_{ml}],$$

является фундаментальной матрицей решений системы

$$\dot{\mathbf{x}}-\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{C}_l\mathbf{x}=0.$$

Для любого k, $k=\overline{1,m}$, положим

$$\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l=\mathbf{H}_{1,k}+\mathbf{H}_{2,k},$$

где j-ый столбец матрицы $\mathbf{H}_{1,k}$ совпадает с j-ым столбцом матрицы $\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right)$, если $\lambda_j-\lambda_k<0$, $0\leqslant t\leqslant T$, а остальные столбцы $\mathbf{H}_{1,k}$ нулевые.

Как известно, некоторое решение (2.2) представимо в виде

$$\boldsymbol{\phi}^k(t)=\left(\mathbf{u}_l^k+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{v}_l^k\right)e^{q_k(t,\omega)}+$$
$$+\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{H}_{1,k}\int\limits_0^t e^{\mathbf{Q}^l(t,\omega)-\mathbf{Q}^l(s,\omega)}\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_l\right)\boldsymbol{\phi}^k(s)ds-$$
$$-\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\mathbf{H}_{2,k}\int\limits_t^T e^{\mathbf{Q}^l(t,\omega)-\mathbf{Q}^l(s,\omega)}\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_l\right)\boldsymbol{\phi}^k(s)ds\equiv\left[\mathbf{T}_\omega(\boldsymbol{\phi}^k)\right](t). \quad (2.3)$$

Пусть

$$\mathbf{K}_1=\mathbf{H}_{1,k}e^{\mathbf{Q}^l(t,\omega)-\mathbf{Q}^l(s,\omega)}\times$$
$$\times\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right)^{-1}\left(\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_l\right),$$

$$\mathbf{K}_2=\mathbf{H}_{2,k}e^{\mathbf{Q}^l(t,\omega)-\mathbf{Q}^l(s,\omega)}\times$$
$$\times\left(\mathbf{U}^l+\omega^{-\frac{1}{2m}}\mathbf{V}^l\right)^{-1}\left(\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_l\right).$$

При $\omega \gg 1$ и $0 \leqslant \tau \leqslant t$ имеет место неравенство

$$\omega^{\frac{l}{2m}} \left\| \mathbf{K}_1 e^{q_k(\tau,\omega)-q_k(t,\omega)} \right\| \leqslant c_2,$$

а при $t \leqslant \tau \leqslant T$ — неравенство

$$\omega^{\frac{l}{2m}} \left\| \mathbf{K}_2 e^{q_k(\tau,\omega)-q_k(t,\omega)} \right\| \leqslant c_3,$$

где c_2 и c_3 — некоторые не зависящие от t, τ и ω постоянные.

Покажем, применяя метод последовательных приближений, что интегральное уравнение (2.3) имеет решение. Рассмотрим итерации, определяемые соотношениями

$$\boldsymbol{\phi}_{s+1}^k = \mathbf{T}_\omega(\boldsymbol{\phi}_s^k), \quad s = 0, 1,$$

$$\boldsymbol{\phi}_0^k = 0.$$

Уравнение (2.3) в результате замены переменных

$$\boldsymbol{\psi}_s^k(t) = \boldsymbol{\phi}_s^k e^{-q_{kl}(t)},$$

перепишем в виде

$$\boldsymbol{\psi}_{s+1}^k = \left(\mathbf{u}_s^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_s^k\right) + \\ + \omega^{\frac{2m-1}{2m}} \int\limits_0^t \mathbf{K}_1 e^{q_{kl}(\tau)-q_{kl}(t)} \boldsymbol{\psi}_s^k(\tau) ds - \\ - \omega^{\frac{2m-1}{2m}} \int\limits_t^T \mathbf{K}_2 e^{q_{kl}(\tau)-q_{kl}(t)} \boldsymbol{\psi}_s^k(\tau) ds. \quad (2.4)$$

Для больших ω, очевидно, имеем

$$\left| \boldsymbol{\psi}_{s+1}^k(t) - \boldsymbol{\psi}_s^k(t) \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{T(c_2 + c_3)}{\omega^{\frac{l-1-2m}{2m}}} \max_{t \in [0,T]} \left| \boldsymbol{\psi}_s^k(t) - \boldsymbol{\psi}_{s-1}^k(t) \right|.$$

Если при $t \in [0, T]$ выполняется оценка

$$\left| \mathbf{u}_l^k(t) - \omega^{-\frac{1}{2m}} \mathbf{v}_l^k(t) \right| \leqslant c_0$$

и ω_0 настолько велико, что при $\omega > \omega_0$ имеет место неравенство

$$T(c_2 + c_3) \leqslant \frac{1}{2} \omega^{\frac{2m-l-1}{2m}},$$

то

$$\left\| \boldsymbol{\psi}_{s+1}^k(t) - \boldsymbol{\psi}_s^k(t) \right\| \leqslant \frac{c_0}{2^s}.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $\boldsymbol{\phi}_s^k$ к пределу $\boldsymbol{\phi}^k$, который является решением интегрального уравнения (2.3).

Переходя в (2.4) к пределу при $s \to \infty$, находим оценку

$$\left\| \boldsymbol{\psi}^k - \left(\mathbf{u}_l^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} \mathbf{v}_l^k\right) \right\| \leqslant \frac{2cT}{\omega^{\frac{l+1-2m}{2m}}},$$

$$c = \max(c_2, c_3).$$

В силу неравенства треугольника и оценок, находим

$$\left\| \boldsymbol{\psi}^k - \left(\mathbf{u}_l^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} \mathbf{v}_l^k\right) \right\| \leqslant \\ \leqslant \left\| \boldsymbol{\psi}^k - \left(\mathbf{u}_{l+2m}^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_{l+2m}^k\right) \right\| + \\ + \left\| \left(\mathbf{u}_{l+2m}^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_{l+2m}^k\right) - \left(\mathbf{u}_l^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} \mathbf{v}_l^k\right) \right\| \leqslant \\ \leqslant c\omega^{-\frac{l+1}{2m}}.$$

□

Литература

1. *Далецкий Ю. Л.* Асимптотические методы для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 5. С. 1026–1029.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
3. *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б.* Асимптотика решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с большими слагаемыми //Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51. №1. С. 74–89.
4. *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б.*Асимптотический анализ некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с большим параметром // Ж-л вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 12. С. 1–13.
5. *Юдович В. И.*Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 3. С. 26–158.
6. *Левенштам В. Б.* Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 1. С. 52–68.
7. *Левенштам В. Б., Хатламаджиян Г. Л.* Распространение теории усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. Задача о периодических решениях // Известия высших учебных заведений. 2006. № 6. С. 35–47.

8. *Басистая Д. А., Левенштам В. Б.* Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. Спецвыпуск Математика и механика сплошной среды. 2004. С. 46–48.
9. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // ДАН. 2005. Т. 405. №2. С. 169–172.
10. *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотной вибрации // Сибирский математический журнал. 1993. №2. С. 92–109.
11. *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2006. Т. 70. №2. С. 25–56.
12. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
13. *Моисеев Н. Н.* Асчимтотические представления решений линейных дифференциальных уравнений в случае кратных элементарных делителей характеристических уравнений // ДАН СССР. 1966. Т. 170. №4. С. 780–782.
14. *Евельсон Р. Л.* Матричный метод асимптотического интегрирования системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с одним элементарным делителем произвольной кратности // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 5. С. 621–627.
15. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература, 1958. 474 с.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, кратный элементарный делитель, высокочастотные осцилляции, асимптотики.

Статья поступила 30 сентября 2012 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, г. Владикавказ
Ростовский-на-Дону автодорожный колледж, г. Ростов-на-Дону