

УДК 537.311.3+538.945

НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ ТОКОВОГО СОСТОЯНИЯ ОДНОМЕРНОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО КОЛЬЦА¹

Третьяк Д. Н.², Тумаев Е. Н.³

AMBIGUITY OF THE CURRENT STATE OF THE ONE-DIMENSION SUPERCONDUCTIVITY RING

Tretyak D. N., Tumayev E. N.

The theoretical investigation of the current states of the superconductive 1D-ring is carried. It is shown that this ring has a discrete set of current states. It is noticed that the situation characterized by the ambiguity of the superconductive current is possible. The deviation from the rule of the equidistant quantization of the flux of the magnetic field bound by ring is detected.

Keywords: superconducting ring, parameter of order, Ginzburg-Landau equation, magnetic field.

В последнее время, в связи с успехом нанотехнологий возрос интерес к низкоразмерным системам, которые реализуют уникальную возможность моделирования законов физики в одно- и двумерных пространствах. Такие системы, называемые мезоскопическими, обладают зачастую весьма необычными свойствами. Представителем таких систем являются квантовые кольца, результаты исследований которых приведены в обзоре [1].

Одним из способов реализации квантовых колец являются сверхпроводящие алюминиевые кольца на диэлектрической подложке, имеющие диаметр 2-4 мкм, толщину 40–70 нм и ширину 0,2–0,4 мкм. Такие кольца, будучи охлаждены до температуры порядка $0,95T_c$ (T_c — температура перехода в сверхпроводящее состояние), представляют собой уникальные сверхчувствительные приемники инфракрасного излучения. Результаты теоретических и экспериментальных исследований симметричных и асимметричных сверхпроводящих колец приведены в целой серии работ А.В. Никулова с сотрудниками ([2–6] и др.).

Целью настоящей работы является аналитическое исследование токовых состояний в одномерном сверхпроводящем кольце с по-

мощью уравнения Гинзбурга – Ландау [7, 8], дополненного уравнениями Максвелла.

Некоторые результаты, касающиеся токовых состояний в одномерном сверхпроводящем кольце получены в [9], однако в этой работе не отмечена возможная неоднозначность этих состояний, составляющая предмет исследования настоящей статьи.

Будем исходить из системы уравнений Гинзбурга – Ландау – Максвелла (ГЛМ) в безразмерной форме [7]

$$\left(-\frac{i}{\kappa}\nabla - \mathbf{A}\right)^2 \Psi - \Psi + \Psi^3 = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}]] &= \\ &= -\frac{i}{2\kappa} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - |\Psi|^2 \mathbf{A}, \quad (2) \end{aligned}$$

с граничным условием для $\Psi(\mathbf{r})$ следующего вида

$$\mathbf{n} \left(-\frac{i}{\kappa} \nabla - \mathbf{A} \right) \Psi \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где $\Psi(\mathbf{r})$ — параметр порядка Бозе-конденсата куперовских пар электронов в кольце, $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ — концентрация куперовских пар, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — векторный потенциал магнитного поля, порождаемого сверхпроводящим

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-02-99042-р_офи).

²Третьяк Дмитрий Николаевич, аспирант кафедры физики и информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: tretjak86@mail.ru.

³Тумаев Евгений Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физики и информационных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: tumayev@phys.kubs.ru.

током (вследствие отсутствия свободных зарядов в рассматриваемой системе скалярный потенциал и напряженность электрического поля отсутствуют), $\kappa = \frac{2^{3/2}eH_c\delta^2}{\hbar c}$ — параметр Гинзбурга–Ландау, e — заряд электрона, \hbar , c — постоянная Планка и скорость света, $\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{8\pi e^2\Psi_0^2}}$ — глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник, численное значение которой сопоставимо с толщиной кольца, вследствие чего кольцо может рассматриваться как двумерный объект, m — масса электрона, $\Psi_0 = \sqrt{\alpha|\tau|/b}$ — значение параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$ в отсутствие магнитного поля, $\tau = (T - T_c)/T_c$, T — температура сверхпроводника, $\alpha|\tau|$ и b — коэффициенты, входящие в разложение свободной энергии сверхпроводника по параметру порядка $\Psi(\mathbf{r})$ [7, 8], $H_c = 2\alpha\tau\sqrt{\pi/b}$ — критическое значение напряженности магнитного поля, при котором сверхпроводящее состояние исчезает, \mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе Γ сверхпроводящего образца. В уравнениях (1)–(2) и условии (3) параметр порядка отнесен к величине Ψ_0 , вектор-потенциал отнесен к величине $\sqrt{2}H_c\delta$, и радиус-вектор \mathbf{r} отнесен к глубине проникновения δ . Граничные условия для компонент вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ включают в себя регулярность всюду вне кольца и обращение в нуль на бесконечности. Уравнение (1) и граничное условие (3) имеют двумерный характер, уравнение (2) — трехмерный. В силу аксиальной симметрии системы для уравнения (2) удобно выбрать цилиндрические координаты (r, φ, z) , а для уравнения (1) и граничного условия (3) — полярные координаты (r, φ) в плоскости $z = 0$.

Введем амплитуду $f(\mathbf{r})$ и фазу $\theta(\mathbf{r})$ параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$

$$\Psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \exp[i\theta(\mathbf{r})].$$

Система уравнений ГЛМ запишется в виде

$$-\frac{1}{\kappa^2}\nabla^2 f + f\mathbf{p}^2 - f + f^3 = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\kappa}f\nabla^2\theta + 2\mathbf{p}\nabla f = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = -f^2\mathbf{p}, \quad (6)$$

где величина $\mathbf{p} = \kappa^{-1}\nabla\theta - \mathbf{A}$ является обобщенным импульсом, и правая часть уравнения (6) является плотностью сверхпроводящего тока $\mathbf{j} = -f^2\mathbf{p}$ [9]. Граничное условие

(3) запишется в виде

$$\mathbf{n} \left(-\frac{i}{\kappa}\nabla f + f\mathbf{p} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

В случае одномерного сверхпроводящего кольца радиуса R можно считать, что амплитуда f постоянна. Оператор ∇ на кольце равен $\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, где \mathbf{e}_φ — единичный вектор, касательный к кольцу, а вектор $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$, совпадает с единичным вектором \mathbf{e}_r , направленным вдоль \mathbf{r} . Тогда уравнение (4) упрощается

$$f^2 + p^2 = 1, \quad (8)$$

а уравнение (5) имеет решение $\theta = n\varphi$, где n — целое число, и константа интегрирования положена равной нулю. Тогда

$$\mathbf{p} = \frac{n}{\kappa R} \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{A}, \quad (9)$$

Граничное условие (7) превращается в условие $\mathbf{n}\mathbf{p} = 0$, откуда следует, что на одномерном кольце вектор-потенциал \mathbf{A} направлен вдоль \mathbf{e}_φ , т. е., имеет только компоненту $A_\varphi = A$. Из соображений симметрии и закона сохранения сверхпроводящего тока следует считать, что эта компонента будет постоянной вдоль кольца. С учетом сказанного, получаем вместо дифференциальных уравнений (4)–(6) более простую алгебраическую систему уравнений

$$\frac{A}{R^2} = f^2 \left(\frac{n}{\kappa R} - A \right), \quad (10)$$

$$\left(\frac{n}{\kappa R} - A \right)^2 = 1 - f^2. \quad (11)$$

Данная система уравнений после введения замены $f^2 = g$ сводится к кубическому уравнению для амплитуды параметра порядка

$$g^3 + \left(\frac{2}{R^2} - 1 \right) g^2 + \left(\frac{1}{R^4} - \frac{2}{R^2} \right) g + \frac{1}{R^4} \left[\left(\frac{n}{\kappa R} \right)^2 - 1 \right] = 0, \quad (12)$$

и уравнению для вектор-потенциала

$$A = \frac{nRg}{\kappa(1 + R^2g)}. \quad (13)$$

Для решения уравнения (12) используем метод Виета нахождения корней кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, при котором предварительно вычисляются величины

$$q = \frac{a^2 - 3b}{9}, \quad r = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54},$$

$$S = q^3 - r^2.$$

В нашем случае

$$q = \frac{(1 + R^2)^2}{9R^4}, \quad r = -\frac{2\kappa^2(1 + R^2)^3 - 27n^2}{54\kappa^2 R^6},$$

$$S = \frac{n^2 \left[4\kappa^2(1 + R^2)^3 - 27n^2 \right]}{\kappa^4 R^{12}}.$$

Дальнейшая процедура нахождения корней зависит от знака величины S .

Рассмотрим вначале случай $S > 0$, который реализуется при $n^2 < \frac{4}{27}\kappa^2(1 + R^2)^3$. Поскольку n — целое число, определяющее угловую зависимость Ψ , то каждому значению n отвечает токовое состояние сверхпроводящего кольца. Следовательно, в случае $S > 0$ имеется конечный набор токовых состояний. Этот вывод распространяется и на двумерные кольца, у которых ширина мала по сравнению с внешним и внутренним радиусами, что подтверждается численными расчетами [10].

Решения уравнения (16) при $S > 0$ имеют вид

$$g_1 = -2\sqrt{q} \cos \phi - a/3,$$

$$g_2 = -2\sqrt{q} \cos(\phi + 2\pi/3) - a/3,$$

$$g_3 = -2\sqrt{q} \cos(\phi - 2\pi/3) - a/3,$$

где $\varphi = \frac{1}{3} \arccos(r/\sqrt{q^3})$. Используя найденные выше значения q и r , запишем решения (12) в виде

$$g_k = 1 - \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{R^2} \right) \cos^2 \alpha_k,$$

$$k = 1, 2, 3, \quad \alpha_1 = \phi/2, \quad \alpha_2 = \phi/2 + \pi/3,$$

$$\alpha_3 = \phi/2 - \pi/3, \quad \varphi = \frac{1}{3} \arccos(2n^2/n_{\max}^2 - 1),$$

и через n_{\max}^2 обозначена величина $\frac{4}{27}\kappa^2(1 + R^2)^3$, принимающая в общем случае вещественные значения. Уравнение (8) показывает, что физически значимыми являются решения (12), для которых $0 < g < 1$. Случай $g = 0$ соответствует исчезновению параметра порядка, и случай $g = 1$ соответствует отсутствию сверхпроводящего тока, плотность j которого равна $f^2 p$. Поскольку $0 < n^2 < n_{\max}^2$, то $0 < \phi/2 < \pi/6$, следовательно, $3/4 < \cos^2 \alpha_1 < 1$, и $g_1 < 0$. Аналогично, $0 < \cos^2 \alpha_2 < 1/4$, откуда $1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{R^2} \right) < g_2 < 1$, поэтому величина g_2 может принимать как положительные,

так и отрицательные значения при изменении радиуса кольца R . Условие $g_2 > 0$ при любом $|n| < n_{\max}$ дает ограничение на радиус кольца, который должен быть больше, чем $R_c = \sqrt{1/2}$. В случае, когда $R < R_c$ g_2 принимает как положительные (при малых $|n|$), так и отрицательные (при больших $|n| < n_{\max}$) значения, что сужает диапазон изменения квантового числа n .

В случае $n_{\max} < 1$ целое число n может принимать только нулевое значение, что соответствует вещественности Ψ , и, как следствие — к пропорциональности сверхпроводящего тока вектор-потенциалу электромагнитного поля, порождаемого током. Неравенство $n_{\max} < 1$ равносильно неравенству $R^2 < 3/\sqrt[3]{2\kappa^2} - 1$, что при $\kappa = 0,026$ (эта величина параметра κ отвечает алюминиевым кольцам, использовавшимся в экспериментах [2–6]) дает оценку $R < 26,131$. Пропорциональность сверхпроводящего тока и вектор-потенциала имеет место в феноменологической электродинамике сверхпроводников [7]. Таким образом, настоящее исследование позволяет установить границы применимости описания токовых состояний в одномерных сверхпроводящих кольцах в рамках лондоновской электродинамики.

Проанализируем корень g_3 уравнения (12). Для него $1/4 < \cos^2 \alpha_3 < 3/4$, поэтому

$$1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{R^2} \right) < g_3 < 1 - \left(1 + \frac{1}{R^2} \right),$$

и величина g_3 также может принимать как положительные, так и отрицательные значения при изменении радиуса кольца R , при этом отрицательные значения g_3 являются нефизическими и должны быть отброшены. При $R < \sqrt{1/2}$ $g_3 < 0$ при любом n , и в этом случае исчезает неоднозначность сверхпроводящего тока в кольце, имеющая место при $R > R_c = \sqrt{1/2}$. Графики зависимостей g_1, g_2, g_3 при различных значениях отношения $z = n/n_{\max}$ при $\kappa = 0,026$ и $R = 1/\sqrt{2}$ и $R = \sqrt{2}$, приведены на рис. 1 и 2.

На рис. 2 видно, что для одного и того же числа квантования n существует два сверхпроводящих состояния, т. е., токовое состояние сверхпроводящего кольца становится неоднозначным. Существование двух токовых состояний в сверхпроводящем мезоскопическом кольце подтверждается экспериментально [6].

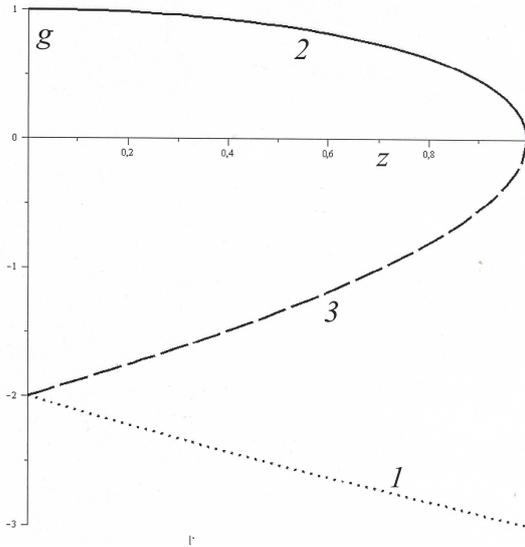


Рис. 1. График зависимости g_1 , g_2 и g_3 от величины $z = n/n_{\max}$ при $R_{\min} = \sqrt{1/2}$ (кривые 1, 2 и 3 соответственно)

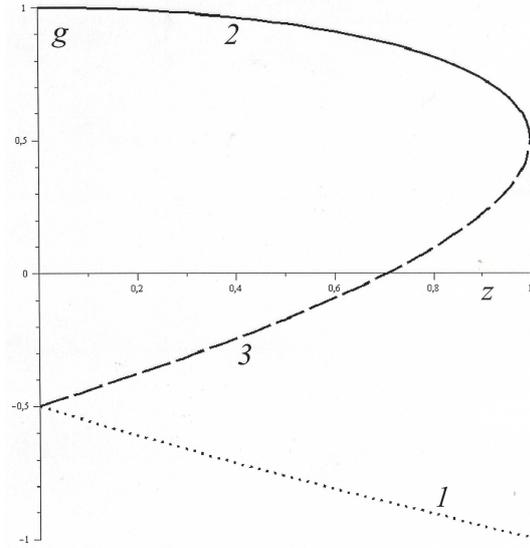


Рис. 2. График зависимости g_1 , g_2 и g_3 от величины $z = n/n_{\max}$ при $R = \sqrt{2}$ (обозначения те же, что и на рис. 1)

Проанализируем далее случай, когда величина

$$S = \frac{27n^2 (n_{\max}^2 - n^2)}{\kappa^4 R^{12}}$$

отрицательна, т.е. $n^2 > n_{\max}^2$, и уравнение (12) имеет один вещественный корень. В этом случае, поскольку величина

$$q = \frac{(1 + R^2)^2}{9R^4}$$

положительна, корень уравнения (12) вычисляется по формуле

$$g_1 = -2 \operatorname{sgn}(r) \sqrt{q} \cosh \phi - \frac{a}{3},$$

$$\varphi = \frac{1}{3} Ar \cosh(|r|/\sqrt{q^3}), \quad r = \frac{n_{\max}^2 - 2n^2}{4\kappa^2 R^2}.$$

Поскольку $\operatorname{sgn}(r) = -1$, и $a = 2/R^2 - 1$, то выражение для g_1 можно записать в виде

$$g_1 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{R^2}\right) \cosh \phi + \frac{1}{3} - \frac{2}{3R^2},$$

откуда в силу неравенства $\cosh \phi \geq 1$ следует неравенство $g_1 \geq 1$, противоречащее полученной выше оценке корней уравнения (12) $0 < g_k < 1$. Следовательно, случай $S < 0$ для тонкого сверхпроводящего кольца не реализуется.

Оставшийся случай $S = 0$, при котором из трех вещественных корней два совпадают,

является предельным для случая $S > 0$ и соответствует крайней правой точке графиков зависимости g_2 и g_3 от квантового числа n . Этот случай, вообще говоря, также не реализуется. Во-первых, для его реализации необходимо математическое требование, чтобы величина n_{\max} была целым числом, которое должно быть достигнуто подходящими значениями физических характеристик кольца κ и R , что невозможно. Во-вторых, совпадение n^2 и n_{\max}^2 , даже будучи достигнутым, нарушается квантовыми флуктуациями [11], которые в данном детерминированном подходе не учитываются, поскольку их учет не влияет на главный вывод данного исследования — наличие конечного числа дискретных токовых состояний сверхпроводящего кольца. Тем не менее, для полноты исследования проанализируем этот случай. При $S = 0$ корни кубического уравнения даются формулами

$$g_1 = -2 \operatorname{sgn}(r) \sqrt{q} - \frac{a}{3},$$

$$g_2 = g_3 = \operatorname{sgn}(r) \sqrt{q} - \frac{a}{3},$$

где величины a и q приведены выше,

$$r = \frac{1}{27} \left(1 + \frac{1}{R^2}\right)^6, \quad \operatorname{sgn}(r) = 1.$$

Тогда

$$g_1 = -\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{3} - \frac{2}{3R^2} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{R^2}\right),$$

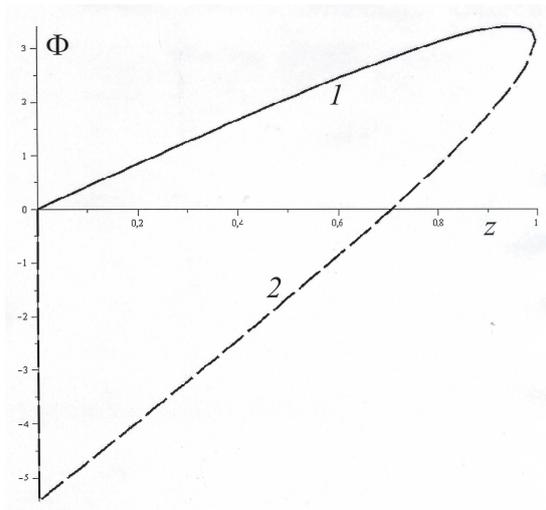


Рис. 3. График зависимости потока магнитного поля для токовых состояний кольца, описываемых решениями g_2 и g_3 , от величины $z = n/n_{\max}$ при $R = \sqrt{2}$ (кривые 1 и 2 соответственно)

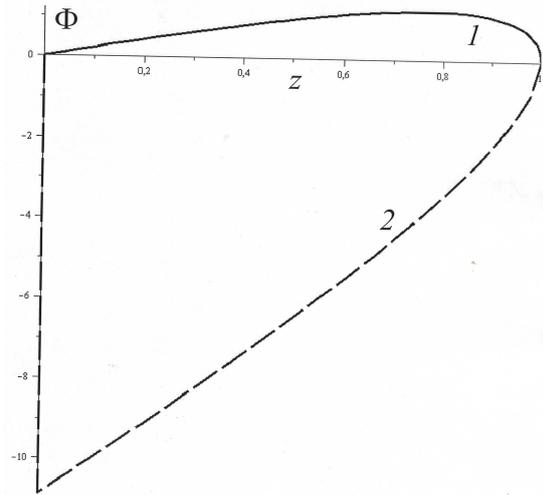


Рис. 4. График зависимости потока магнитного поля для токовых состояний, описываемых решениями g_2 и g_3 , от величины $z = n/n_{\max}$ при $R = \sqrt{1/2}$. Обозначения те же, что и на рис. 3

$$g_{2,3} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{R^2} \right) + \frac{1}{3} - \frac{2}{3R^2} = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{R^2} \right).$$

Корень $g_1 < 0$ не имеет физического смысла, и должен быть отброшен. Положительное значение двукратно вырожденного корня $g_{2,3}$ приводит к ограничению $R > 1/\sqrt{2}$, уже полученному выше.

Проведенный выше анализ токовых состояний позволяет рассчитать величину потока напряженности магнитного поля

$$\Phi = \int_S H_n dS$$

через поверхность, ограниченную кольцом (H_n — проекция напряженности магнитного поля $\mathbf{H} = [\nabla \times \mathbf{A}]$ на вектор нормали к поверхности). Результаты расчета зависимости Φ от величины $z = n/n_{\max}$ представлены на рис. 3 и 4. Согласно формуле Стокса

$$\int_S H_n dS = \oint_{\partial S} A_l dl = 2\pi R A_\varphi,$$

поэтому для численных расчетов величины потока Φ можно использовать формулу (13). При расчетах использовались значения $\kappa = 0,026$, $R = 1/\sqrt{2}$ и $R = \sqrt{2}$. Из этих графиков видно, что, во-первых, существует максимальная величина магнитного поля, больше которого захват магнитного потока не происходит, а во-вторых захваченный

магнитный поток не обязательно равен числу целых квантов, что, возможно, объясняет наблюдавшиеся в эксперименте отклонения от «классического» квантования магнитного потока $\Phi = n\Phi_0$, где $\Phi_0 = hc/e$ — квант магнитного потока (флюксон).

Рассмотрим далее, к каким следствиям приводит анализ свойств обобщенного импульса p , который для одномерного кольца также определяется кубическим уравнением, являющимся следствием уравнений движения (10)–(11). Эти уравнения, записанные через величину $p = n/\kappa R - A$, имеют вид

$$\frac{A}{R^2} = f^2 p, \quad f^2 = 1 - p^2.$$

Поскольку $A = n/\kappa R - p$, из этих уравнений получаем

$$p^3 - \left(1 + \frac{1}{R^2} \right) p + \frac{n}{\kappa R^3} = 0. \quad (14)$$

Для данного уравнения

$$a = 0, \quad b = - \left(1 + \frac{1}{R^2} \right), \quad c = \frac{n}{\kappa R^3},$$

тогда величины

$$q = \frac{a^2 - 3b}{9}, \quad r = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27},$$

$$S = q^3 - r^2$$

равны

$$q = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right), \quad r = \frac{n}{2\kappa R^3},$$

$$S = \frac{1}{27} \left(1 + \frac{1}{R^2} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{n}{\kappa R^3} \right)^2.$$

Как и выше, рассмотрим вначале случай $S > 0$, соответствующий неравенству

$$\frac{1}{27} \left(1 + \frac{1}{R^2} \right)^3 > \frac{1}{4} \left(\frac{n}{\kappa R^3} \right)^2,$$

которое можно записать в виде $|n| < n_{\max}$. Корни кубического уравнения (14) выражаются через величину $\varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(r / \sqrt{q^3} \right)$, и равны

$$p_k = -2 \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right)} \cos \alpha_k, \quad (15)$$

$$k = 1, 2, 3,$$

где

$$\phi = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{n}{2\kappa} \left(\frac{1 + R^{-2}}{3} \right)^{-3/2} \right],$$

$$\alpha_1 = \phi, \quad \alpha_2 = \phi + 2\pi/3, \quad \alpha_3 = \phi - 2\pi/3.$$

В отличие от проделанного выше анализа, величина p может принимать как положительные, так и отрицательные значения, по модулю не превышающие единицу. Разные знаки p соответствуют токам, текущим по кольцу в противоположных направлениях, каждый из которых характеризуется плотностью тока $j = f^2 p$, следовательно, каждому значению числа n отвечает своя величина сверхпроводящего тока. Таким образом, для одномерного кольца имеется конечный дискретный набор токовых состояний.

Проанализируем далее случай $S < 0$, реализующийся при $q^3 < r^2$. В этом случае единственный вещественный корень уравнения (14) вычисляется по формуле

$$\varphi = \frac{1}{3} \operatorname{Ar} \cosh \left[\left| \frac{n}{2\kappa R^3} \right| \left(\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{R^2} \right) \right)^{-3/2} \right],$$

$$p = -2 \operatorname{sgn}(n) \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{R^2} \right)} \cosh(\varphi).$$

В силу неравенства $\cosh(\varphi) \geq 1$ минимальное значение $|p|$, достигающееся при $R \rightarrow \infty$,

равно $2/\sqrt{3} > 1$, поэтому случай $S < 0$ невозможен.

Рассмотрим оставшийся случай $S = 0$, который реализуется при $|n| = 2\kappa [(1 + R^2)/3]^{3/2}$. В этом случае значения p_k равны

$$p_1 = -2 \operatorname{sgn}(n) \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right)},$$

$$p_{2,3} = \operatorname{sgn}(n) \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right)}.$$

Для всех значений R $|p_1| > 2/\sqrt{3} > 1$, это состояние также не реализуется. Ограничение на радиус кольца R , при котором для p_2 и p_3 имеет место неравенство $|p| < 1$, эквивалентное неравенству $\sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right)} < 1$, равно $R > 1/\sqrt{2}$. Таким образом, анализ обобщенного импульса p не добавляет новых результатов по сравнению с анализом величины g – квадрата амплитуды параметра порядка Ψ .

Выясним условия устойчивости рассмотренных выше токовых состояний, для чего рассмотрим функционал свободной энергии сверхпроводника, который в безразмерной форме имеет следующий вид [7]

$$F = \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \int \left(-|\Psi|^2 + \frac{1}{2} |\Psi|^4 + \left| \left(-\frac{i}{\kappa} \nabla - A \right) \Psi \right|^2 + H^2 \right) dV. \quad (16)$$

Введем полярные координаты в плоскости кольца, и положим $\Psi = f \exp(i\theta)$. Для одномерного кольца можно заменить интегрирование по объему сверхпроводника умножением на длину окружности кольца $2\pi R$, вследствие чего в качестве свободной энергии можно рассматривать следующее выражение

$$F = \frac{H_{cm}^2 R^2}{2} \left\{ -f^2 + \frac{1}{2} f^4 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \left[-\frac{i}{\kappa} \nabla f - f \left(\frac{1}{\kappa} \nabla \theta - \mathbf{A} \right) \right]^2 \right\}. \quad (17)$$

В силу отмеченной выше одномерности кольца амплитуда f будет постоянной вследствие непрерывности сверхпроводящего тока, а фаза $\theta(\phi)$ равна $n\phi$, где n – целое число,

вследствие однозначности параметра порядка $\Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi)$. Аналогично, вектор-потенциал A на кольце направлен вдоль единичного вектора полярной системы координат \mathbf{e}_ϕ и постоянен по величине, поэтому $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{A_\phi}{R} \mathbf{e}_\phi$. Несущественный для нахождения точек экстремума выражения (17) постоянный множитель $\frac{H_{cm}^2 R^2}{2}$ можно опустить, тогда (17) упрощается следующим образом

$$F = -f^2 + \frac{1}{2}f^4 + \frac{A^2}{R^2} + f^2 \left(\frac{n}{\kappa R} - A \right)^2. \quad (18)$$

Значения f и A , при которых достигается экстремум свободной энергии (18), находятся из уравнений $\frac{\partial F}{\partial f} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial A} = 0$, или

$$f \left[-1 + f^2 + \left(\frac{n}{\kappa R} - A \right)^2 \right] = 0, \quad (19)$$

$$\frac{A}{R^2} - f^2 \left(\frac{n}{\kappa R} - A \right) = 0. \quad (20)$$

Уравнение (19) имеет два решения: $f = 0$, которое отвечает отсутствию токовых состояний, и решение $f^2 = 1 - p^2$, где $p = n/\kappa R - A$, совпадающее с решением, полученным выше. Уравнение (20) совпадает с уравнением (11).

Для выяснения устойчивости найденных решений вычислим вторые производные свободной энергии (18)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial f^2} = -2 + 6f^2 + 2 \left(\frac{n}{\kappa R} - A \right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial A^2} = \frac{2}{R^2} + 2f^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial A} = -4f \left(\frac{n}{\kappa R} - A \right).$$

Вычисляя величину

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial f^2} \frac{\partial^2 F}{\partial A^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial f \partial A} \right)^2,$$

получаем

$$\Delta = 4 \left(-1 + 3f^2 + p^2 \right) \left(\frac{1}{R^2} + f^2 \right) - 16f^2 p^2. \quad (21)$$

При $f = 0$ находим, что $\Delta = \frac{p^2 - 1}{R^2}$, следовательно, при $p^2 < 1$, $\Delta < 0$, и решение $f = 0$ неустойчиво. Следовательно, возникновение сверхпроводящего тока в кольце обусловлено неустойчивостью состояния

без тока. В этом смысле механизм появления сверхпроводящего тока имеет ту же природу, что и спонтанное нарушение симметрии. При выполнении неравенства $p^2 > 1$, которое достигается при достаточно больших внешних магнитных полях (если учитывать только магнитное поле, порождаемое током, то, как показано выше, $p^2 < 1$), состояние кольца без тока становится устойчивым. Так как $p = n/\kappa R - A$, то такое состояние достигается при достаточно большом магнитном поле, величина которого определяется значением числа n_{\max} , определяемым неравенством $|n| < 2\kappa \left[(1 + R^2)/3 \right]^{3/2}$, найденным выше. Факт разрушения сверхпроводящего состояния достаточно большим магнитным полем хорошо известен, и обычно объясняется в рамках динамики куперовских пар электронов в конденсированной среде. Приведенные рассуждения показывают, что для объяснения разрушения сверхпроводимости магнитным полем нет необходимости привлекать подобные рассуждения.

В случае $f^2 = 1 - p^2$ из (21) находим

$$\Delta = 8(1 - p^2) \left(\frac{1}{R^2} + 1 - 3p^2 \right). \quad (22)$$

Выражение (22) положительно при $p^2 < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right)$, что согласуется с найденной выше оценкой для величины $g = f^2$.

Суммируя сказанное, можно сделать следующие заключения:

1) Одномерное сверхпроводящее кольцо имеет конечный дискретный набор токовых состояний, характеризующихся целым числом n , модуль которого не превышает n_{\max} . При $n > n_{\max}$ токовые состояния невозможны.

2) При $n < n_{\max}$ и $R > R_c = \sqrt{1/2}$ имеет место наличие двух токовых состояний, характеризующихся разными значениями обобщенного импульса p при одном и том же n .

3) Состояние сверхпроводящего кольца во внешнем магнитном поле в отсутствие тока является нестабильным при $|n/\kappa R - A| < 1$, и стабильным при выполнении неравенства $|n/\kappa R - A| > 1$. Из последнего неравенства следует существование критического значения магнитного поля, разрушающего сверхпроводимость, независимо от механизма спаривания электронов проводимости в сверхпроводнике.

4) Для тонкого кольца наблюдается отступление от известного правила эквиди-

стантного квантования потока магнитного поля, охватываемого кольцом со сверхпроводящим током $\Phi = n\Phi_0$, где $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока.

Литература

1. *Viefers S., Koskinen P., Singha Deo P., Manninen M.* Quantum rings for beginners: Energy spectra and persistent currents // *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2004. Vol. 21. P. 1–35.
2. *Гуртовой В. Л., Дубонос С. В., Никулов А. В. и др.* Зависимость величины и направления устойчивого тока от величины магнитного потока в сверхпроводящих кольцах // *ЖЭТФ*. 2007. Т. 132. Вып. 6(12). С. 1320–1339.
3. *Nikulov A. V.* Bohm's quantum potential and quantum force in superconductor // *AIP Conference Proceedings*. 2009. Vol. 1101. P. 134–143.
4. *Гуртовой В. Л., Дубонос С. В., Никулов А. В. и др.* Противоречие между результатами наблюдений квантовых осцилляций сопротивления и критического тока асимметричных сверхпроводящих колец // *ЖЭТФ*. 2007. Т. 132. Вып. 1(7). С. 297–303.
5. *Дубонос С. В., Кузнецов В. И., Жильев И. Н. и др.* Наблюдение постоянного напряжения, пропорционального устойчивому току в сверхпроводящих кольцах, индуцированного внешним переменным током // *Письма в ЖЭТФ*. 2003. Т. 77. Вып. 7. С. 439–444.
6. *Gurtovoi V. L., Dubonos S. V., Nikulov A. V., Tulin V. A.* Two permitted states of superconducting ring observed at measurements of its critical current // *arXiv: 1102.5681v1 [cond-mat.supr-con]* 25 Feb 2011. 3 p.
7. *Абрикосов А. А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.
8. *Tinkham M.* Introduction to Superconductivity. McGraw-Hill Inc., 1996. 290 p.
9. *Vodolazov D. Y., Baelus B. J., Peeters F. M.* Stationary-phase slip state in quasi-one-dimensional rings // *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 66. P. 054531-1–054531-6.
10. *Третьяк Д. Н., Тумаев Е. Н.* Аналитическое и численное исследование устойчивых токовых состояний в сверхпроводящем мезоскопическом кольце во внешнем магнитном поле // В сб. «Современные проблемы физики, биофизики и инфокоммуникационных технологий». Краснодар, 2012. С. 291–298.
11. *Варламов А. А., Ларкин А. И.* Теория флуктуаций в сверхпроводниках. М.: Добросвет, 2007. 557 с.

Ключевые слова: сверхпроводящее кольцо, параметр порядка, уравнение Гинзбурга-Ландау, магнитное поле.

Статья поступила 28 января 2013 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Третьяк Д. Н., Тумаев Е. Н., 2013