УДК 517.928.7 + 517.957

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ[1]

Хатламаджиян Г. Л.[2]

AVERAGING METHOD JUSTIFICATION FOR A PARABOLIC EQUATIONS CLASS WITH LARGE HIGH-FREQUENCY ADDENDS

Khatlamajiyan G. L.

Averaging method is justified for the problem of periodical solutions of an abstract parabolic equation with high-frequency addends which amplitudes are proportional to the frequency. The equation under consideration is the generalization of parabolic problems and Navier-Stokes equations and contains addends polynomially (with any degree) depending on the unknown vector-function. The Lyapunov stability and instability of solutions is investigated.

Keywords: averaging method, abstract parabolic equations, large high-frequency addends, stability.

Работа посвящена обоснованию метода усреднения для задачи о периодических решениях абстрактного параболического уравнения, частными случаями которого являются параболические задачи и уравнения Навье—Стокса. Рассматривается уравнение вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega), \tag{1}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega) = \sum_{|k|\leqslant k_0} \sum_{1\leqslant s\leqslant n_k} \mathbf{D}^{(k,s)} \mathbf{g}_{k,s}(\mathbf{x}) e^{ik\omega t} + \\ + \omega \sum_{1\leqslant|k|\leqslant k_0} \boldsymbol{\varphi}_k e^{ik\omega t},$$

в комплексном банаховом пространстве. Предполагается, что оператор $\mathbf{A}$ порождает аналитическую полугруппу в этом пространстве, линейные операторы $\mathbf{D}^{(k,s)}$ и нелинейные операторы $\mathbf{g}_{k,s}$ в определенном смысле подчинены оператору $\mathbf{A}$, а $\boldsymbol{\varphi}_k$ — гладкие векторы. Строится усредненное уравнение и требуется, чтобы оно имело невырожденное стационарное решение $\mathbf{u}_0$. При этих и некоторых дополнительных предположениях возмущенное уравнение (1) имеет для больших ω относительно единственное $2\pi\omega^{-1}$-периодическое решение с главным членом асимптотики

$$\mathbf{u}_0 + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant k_0} (ik)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k e^{ik\omega t}.$$

Формулируются утверждения, связанные с устойчивостью и неустойчивостью решения по Ляпунову.

Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми исследовались во многих работах (см. [1–7] и библиографию в них). В [1,4,5] метод усреднения обоснован для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил, в [6] — для абстрактного параболического уравнения с большими быстро осциллирующими слагаемыми. В публикации [6] изучаются осцилляции с амплитудой, пропорциональной не ω, как здесь, а $\sqrt{\omega}$, и в ней, в отличие от данной работы, допускается зависимость больших слагаемых от неизвестной вектор-функции. Рассматриваемый здесь класс нелинейностей в отсутствие асимптотического параметра изучался В.И. Юдовичем в монографии [8].

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00287-а, 12-01-00402-а).

[2]Хатламаджиян Гаспар Лусегенович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: gaspard@yandex.ru.

Полученные результаты без труда переносятся на уравнение вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{0\leqslant|k|\leqslant k_0} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}, \omega t) + \\ + \omega \sum_{1\leqslant|k|\leqslant k_0} \boldsymbol{\varphi}_k(\omega t), \quad (2)$$

в котором периодические по $\tau = \omega t$ вектор-функции $\mathbf{g}_k$, $\boldsymbol{\varphi}_k$ представлены хорошо сходящимися рядами Фурье. Аналогично исследуется задача о почти периодических решениях уравнения вида (2) с почти периодическими по τ вектор-функциями $\mathbf{g}_k$, $\boldsymbol{\varphi}_k$. В этом случае спектр линеаризованного оператора не должен иметь точек на мнимой оси.

Детальное доказательство изложенных здесь результатов содержится в депонированной работе [9].

1. Формулировка результата

Пусть k_0 — натуральное число, ω — большой параметр. Рассмотрим уравнение (1) в банаховом пространстве X при следующих предположениях (буквой C обозначаются некоторые постоянные).

I. $\mathbf{A}$ — вообще говоря, неограниченный оператор, порождающий аналитическую полугруппу $e^{t\mathbf{A}}$, $t \geqslant 0$, в X [10], т.е. существуют $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$, такие что при всех $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1,\theta} \equiv \{\sigma \in \mathbb{C} : |\arg(\sigma - \sigma_1)| \leqslant \theta\}$ операторы $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ обратимы, причем выполняются оценки

$$\|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \frac{C}{1+|\lambda|}. \quad (1.3)$$

II. Пусть $Y_{k,s}$ — банаховы пространства, имеющие с пространством X общее плотное множество, а замкнутые линейные операторы $\mathbf{D}^{(k,s)} : Y_{k,s} \to X$ имеют дробную степень $\alpha \in [0, 1)$ относительно $-\mathbf{A}$ справа [8], т.е. для всех $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1,\theta}$ имеет место неравенство

$$\|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}^{(k,s)}\|_{Y\to X} \leqslant \frac{C}{(1+|\lambda|)^{1-\alpha}}.$$

III. Каждый нелинейный оператор $\mathbf{g}_{k,s}$ представляется в виде

$$\mathbf{g}_{k,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_0^{(k,s)}(\mathbf{B}_{k,s,1}\mathbf{x}_1, \mathbf{B}_{k,s,2}\mathbf{x}_2, \ldots, \\ \mathbf{B}_{k,s,m_{k,s}}\mathbf{x}_{m_{k,s}})|_{\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2=\ldots=\mathbf{x}_{m_{k,s}}=\mathbf{x}},$$

где $m_{k,s} \in \mathbb{Z}_+$; $\mathbf{B}_{k,s,j}$ ($|k| \leqslant k_0, 1 \leqslant s \leqslant n_k$, $1 \leqslant j \leqslant m_{k,s}$) — линейные операторы, действующие из X в банаховы пространства $Y_{k,s,j}$ и имеющие дробные степени $\beta_{k,s,j} \in [0, 1-\alpha)$ относительно оператора $-\mathbf{A}$ [8], т.е. для любого $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1,\theta}$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{B}_{k,s,j}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\|_{X\to Y_{k,s,j}} \leqslant \frac{C}{(1+|\lambda|)^{1-\beta_{k,s,j}}}.$$

Операторы

$$\mathbf{g}_0^{(k,s)} : Y_{k,s,1} \times Y_{k,s,2} \times \ldots \times Y_{k,s,m_{k,s}} \to Y_{k,s}$$

имеют производные Фреше $D_j\mathbf{g}_0^{(k,s)}$, $1 \leqslant j \leqslant m_{k,s}$ по j-му аргументу, и все $\mathbf{g}_0^{(k,s)}$, $D_j\mathbf{g}_0^{(k,s)}$ ограничены и равномерно непрерывны на любом ограниченном множестве.

IV. Существуют числа $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\varkappa \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям (здесь мы пользуемся терминологией [10])

$$\varkappa > \bar{\beta} \equiv \max_{|k|\leqslant k_0} \max_{1\leqslant s\leqslant n_k} \max_{1\leqslant j\leqslant m_{k,s}} \beta_{k,s,j},$$

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \sigma_1, \quad \boldsymbol{\varphi}_k \in D((\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A})^{\varkappa}).$$

V. При некотором $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ оператор $(\lambda_0\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ определен и компактен.

VI. Усредненная задача

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{H}(\mathbf{u}),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|\leqslant k_0} \sum_{1\leqslant s\leqslant n_k} \mathbf{D}^{(k,s)} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \mathbf{g}_{k,s}(\mathbf{u} + \mathbf{N}(\tau))e^{ik\tau}d\tau,$$

$$\mathbf{N}(\tau) = \sum_{1\leqslant|k|\leqslant k_0} (ik)^{-1}\boldsymbol{\varphi}_k e^{ik\tau},$$

имеет стационарное решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \in D(\mathbf{A})$.

VII. Нуль не принадлежит спектру оператора $\mathbf{L} \equiv -\mathbf{A} - \mathbf{A}_1$, где

$$\mathbf{A}_1 = D\mathbf{H}(\mathbf{u}_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|\leqslant k_0} \sum_{1\leqslant s\leqslant n_k} \mathbf{D}^{(k,s)} \times \\ \times \int_0^{2\pi} D\mathbf{g}_{k,s}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{N}(\tau))e^{ik\tau}d\tau,$$

$$Dg_{k,s}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^{m_{k,s}} D_j \mathbf{g}_0^{(k,s)}(\mathbf{B}_{k,s,1}\mathbf{x}, \mathbf{B}_{k,s,2}\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{B}_{k,s,m_{k,s}}\mathbf{x})\mathbf{B}_{k,s,j}.$$

VIII. Операторы $\mathbf{g}_0^{(k,s)}$ линейны по всем аргументам.

Пусть Ω — конечный отрезок, либо полуинтервал вида $[a,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, либо вся вещественная ось. Через $C^{\Omega}(\mathcal{B})$ и $C_{\mu}^{\Omega}(\mathcal{B})$, $\mu \in (0,1)$, обозначим пространство непрерывных вектор-функций $\mathbf{u} : \Omega \to \mathcal{B}$, с нормами

$$\|\mathbf{u}\|_{C^{\Omega}(\mathcal{B})} \equiv \|\mathbf{u}\|_{C_0^{\Omega}(\mathcal{B})} = \sup_{t\in\Omega} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{B}},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{C_{\mu}^{\Omega}(\mathcal{B})} = \|\mathbf{u}\|_{C^{\Omega}(\mathcal{B})} + \sup_{\substack{t_1,t_2\in\Omega\\ t_1<t_2}} \frac{\|\mathbf{u}(t_2)-\mathbf{u}(t_1)\|_{\mathcal{B}}}{(t_2-t_1)^{\mu}},$$

Если $\Omega = \mathbb{R}$, будем писать $C(\mathcal{B}) = C^{\mathbb{R}}(\mathcal{B})$, $C_{\mu}(\mathcal{B}) = C_{\mu}^{\mathbb{R}}(\mathcal{B})$, $\mu \in (0,1)$.

Для $\mu \in [0,1)$ введем банахово пространство $Z^{(1)} = Z_{\mu}^{(1)}$ непрерывных в X вектор-функций с помощью нормы

$$\|\mathbf{x}\|_{Z^{(1)}} \equiv \|\mathbf{x}\|_{C(X)} + \sum_{|k|\leqslant k_0} \sum_{1\leqslant s\leqslant n_k} \sum_{1\leqslant j\leqslant m_{k,s}} \|\mathbf{B}_{k,s,j}\mathbf{x}\|_{C_{\mu}(Y_{k,s,j})}.$$

Аналогично определим банахово пространство $Z^{(1)}(\Omega) = Z_{\mu}^{(1)}(\Omega)$, когда Ω является конечным отрезком либо полуинтервалом вида $[a,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

Определение. Пусть T — положительное число. Вектор-функцию $\mathbf{x} \in Z^{(1)}([0,T])$, будем называть обобщенным (об.) решением уравнения (1) на этом полуинтервале, если при всех $t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau),\tau,\omega)d\tau. \quad (1.4)$$

Интеграл в правой части (1.4) определен с помощью замыкания в пространстве $Z_0^{(1)}[0,T]$. Возможность замыкания вытекает из оценки [9]

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}}[\mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau),\tau,\omega) - \mathbf{g}(\mathbf{y}(\tau),\tau,\omega)]d\tau \right\|_{Z_0^{(1)}[0,T]} \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{Z_0^{(1)}[0,T]}.$$

Определение. Пусть T — положительное число. Вектор-функцию $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to X$ назовем об. T-периодическим решением уравнения (1), если она является T-периодическим продолжением некоторого об. решения задачи Коши для уравнения (1) на полуинтервале $[0,T)$.

Аналогично определяются об. периодические решения и об. решения задач Коши для других абстрактных параболических уравнений.

Определение. Непрерывную функцию $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to X$ назовем решением уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathbf{x}(t) \in D(\mathbf{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

2) $\mathbf{x}(t)$ непрерывно-дифференцируема на $\mathbb{R}$;

3) $\mathbf{x}$ в любой точке $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству (1).

Пусть числа $r_{k,s,j}$ ($|k| \leqslant k_0$, $1 \leqslant s \leqslant n_k$, $1 \leqslant j \leqslant m_{k,s}$) удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{p_{k,s}} \equiv \sum_{j=1}^{m_{k,s}} \frac{1}{r_{k,s,j}} \leqslant 1. \quad (1.5)$$

Введем банахово пространство $Z^{(2)}(R_1,R_2)$, $R_1 < R_2$, с помощью нормы

$$\|\mathbf{x}\|_{Z^{(2)}(R_1,R_2)} \equiv \|\mathbf{x}\|_{C^{[R_1,R_2]}(X)} + \sum_{|k|\leqslant k_0} \sum_{1\leqslant s\leqslant n_k} \sum_{1\leqslant j\leqslant m_{k,s}} \|\mathbf{B}_{k,s,j}\mathbf{x}\|_{L_{r_{k,s,j}}(R_1,R_2)},$$

$$\|\mathbf{B}_{k,s,j}\mathbf{x}\|_{L_{r_{k,s,j}}(R_1,R_2)} \equiv \left[\int_{R_1}^{R_2} \|\mathbf{B}_{k,s,j}\mathbf{x}(\tau)\|_{Y_{k,s,j}}^{r_{k,s,j}} d\tau \right]^{\frac{1}{r_{k,s,j}}}.$$

Как показано ниже, оператор $-\mathbf{L}$ порождает аналитическую полугруппу в X, и в некотором секторе $\Sigma_{\sigma_2,\theta}$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}$, выполняется оценка вида (1.3). Тогда оператор

$(\sigma_2\mathbf{I}+\mathbf{L})$ сильно позитивен и можно ввести его дробные степени. Определим банаховы пространства Υ^δ, $\delta \geqslant 0$, введя на линейном многообразии $D((\sigma_2\mathbf{I}+\mathbf{L})^\delta)$ норму $\|\mathbf{a}\|_{\Upsilon^\delta} = \|(\sigma_2\mathbf{I}+\mathbf{L})^\delta\mathbf{a}\|_X$.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема. Пусть выполнены условия I—VII, а

$$\mu \in \left(0, \min(\varkappa - \bar\beta, 1-(\alpha+\bar\beta)\right).$$

Тогда для любого $R > 0$ найдутся такие положительные числа ω_0 и r, что справедливы следующие утверждения.

1. При $\omega > \omega_0$ уравнение (1) имеет единственное в шаре

$$\left\|\mathbf{x} - \left(\mathbf{u}_0 + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant k_0}(ik)^{-1}\boldsymbol{\varphi}_k e^{ik\omega t}\right)\right\|_{Z_0^{(1)}} < r \quad (1.6)$$

об. $2\pi\omega^{-1}$-периодическое решение $\mathbf{x}_\omega(t)$, причем

$$\lim_{\omega\to\infty}\left\|\mathbf{x}_\omega - \left(\mathbf{u}_0 + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant k_0}(ik)^{-1}\boldsymbol{\varphi}_k e^{ik\omega t}\right)\right\|_{Z_\mu^{(1)}} = 0. \quad (1.7)$$

2. Если, к тому же, справедливо предположение VIII, то об. $2\pi\omega^{-1}$-периодическое решение $\mathbf{x}_\omega$ единственно в шаре

$$\left\|\mathbf{x} - \left(\mathbf{u}_0 + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant k_0}(ik)^{-1}\boldsymbol{\varphi}_k e^{ik\omega t}\right)\right\|_{Z^{(2)}(0,R)} < r. \quad (1.8)$$

3. Если спектр оператора $\mathbf{L}$ лежит в открытой правой полуплоскости, то решение $\mathbf{x}_\omega$ экспоненциально устойчиво в следующем смысле. Найдутся такие положительные числа δ, σ_0 и c, что при всех $\omega > \omega_0$, $s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0$ из шара $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\omega(s)\|_{\Upsilon^{\bar\beta}} \leqslant \delta$ существует решение $\mathbf{x}^0_\omega(t)$, $t \geqslant s$, уравнения (1) с начальным условием $\mathbf{x}^0_\omega(s) = \mathbf{x}_0$, и справедлива оценка

$$\left\|\mathbf{x}^0_\omega(t) - \mathbf{x}_\omega(t)\right\|_X + \sum_{k=-k_0}^{k_0}\sum_{1\leqslant s\leqslant n_k}\times \sum_{1\leqslant j\leqslant m_{k,s}}\left\|\mathbf{B}_{k,s,j}(\mathbf{x}^0_\omega(t) - \mathbf{x}_\omega(t))\right\|_{Y_{k,s,j}} \leqslant ce^{-\sigma_0(t-s)}\left\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\omega(s)\right\|_{\Upsilon^{\bar\beta}}.$$

4. Если спектр оператора $\mathbf{L}$ содержит хотя бы одну точку в открытой левой полуплоскости, то решение $\mathbf{x}_\omega$ неустойчиво: существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $\delta > 0$, $\omega > \omega_0$ найдется такое решение $\mathbf{x}^0_\omega(t)$ уравнения (1), определенное на некотором участке $[0, t^\star]$, что выполняются условия

$$\left\|\mathbf{x}^0_\omega(0) - \mathbf{x}_\omega(0)\right\|_{\Upsilon^{\bar\beta}} < \delta,$$

$$\left\|\mathbf{x}^0_\omega(t^\star) - \mathbf{x}_\omega(t^\star)\right\|_X + \sum_{|k|\leqslant k_0}\sum_{1\leqslant s\leqslant n_k}\sum_{1\leqslant j\leqslant m_{k,s}}\left\|\mathbf{B}_{k,s,j}(\mathbf{x}^0_\omega(t^\star) - \mathbf{x}_\omega(t^\star))\right\|_{Y_{k,s,j}} \geqslant \varepsilon.$$

Чтобы доказательство было менее громоздким, оно проводится для случая, когда при всех k $n_k = 1$ и $Y_{-k_0,1} = Y_{-(k_0-1),1} = \ldots = Y_{k_0,1} \equiv Y$. Случай произвольных n_k и различных $Y_{k,s}$ рассматривается совершенно аналогично. Ради краткости, будем опускать индексы, соответствующие $s = 1$: $\mathbf{D}^{(k)} \equiv \mathbf{D}^{(k,1)}$, $\mathbf{g}_k \equiv \mathbf{g}_{k,1}$, $\mathbf{B}_{k,j} \equiv \mathbf{B}_{k,1,j}$, $\beta_{k,j} \equiv \beta_{k,1,j}$ и т.д. При доказательстве существенно используются методы работ [1, 4–8, 10–12].

2. Схема доказательства результата

Для больших ω в уравнении (1) можно провести замену переменных

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0 + \mathbf{M}_\omega(\omega t),$$

$$\mathbf{M}_\omega(\tau) = \omega\sum_{1\leqslant|k|\leqslant k_0}(ik\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\varphi}_k e^{ik\tau}.$$

В результате получим уравнение

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{u}, \omega t, \omega), \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{h}(\mathbf{u},\tau,\omega) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}+\mathbf{u}_0,\tau) - \mathbf{H}(\mathbf{u}_0) - \mathbf{A}_1\mathbf{u} + \boldsymbol{\psi}_\omega(\mathbf{u}+\mathbf{u}_0,\tau),$$

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u},\tau) = \sum_{|k|\leqslant k_0}\mathbf{D}^{(k)}\mathbf{g}_k(\mathbf{u}+\mathbf{N}(\tau))e^{ik\tau},$$

$$\boldsymbol{\psi}_\omega(\mathbf{u},\tau) = \sum_{|k|\leqslant k_0}\mathbf{D}^{(k)}(\mathbf{g}_k(\mathbf{u}+\mathbf{N}(\tau)+ \mathbf{Q}_\omega(\tau)) - (\mathbf{g}_k(\mathbf{u}+\mathbf{N}(\tau))))e^{ik\tau},$$

$$\mathbf{Q}_\omega(\tau) = \mathbf{M}_\omega(\tau) - \mathbf{N}(\tau).$$

Операторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{A}_1$ определены в условиях VI и VII соответственно.

Можно доказать [9], что справедливо соотношение

$$\lim_{\omega\to\infty} \|\mathbf{Q}_\omega(\omega t)\|_{Z^{(1)}} = 0.$$

Поэтому вместо теоремы теперь достаточно доказать ее более простой аналог, в котором уравнение (1) заменено на (2.1), шары (1.6), (1.8) — соответственно на шары

$$\|\mathbf{u}\|_{Z_0^{(1)}} < \frac{r}{2}, \quad \|\mathbf{u}\|_{Z^{(2)}(0,R)} < \frac{r}{2},$$

а равенство (1.7) — на равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} \|\mathbf{u}_\omega\|_{Z^{(1)}} = 0. \qquad (2.2)$$

Пусть $\gamma \in (\bar\beta, 1-\alpha)$. Тогда для $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1,\theta}$ справедливо представление

$$\lambda\mathbf{I} + \mathbf{L} = \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{A}_1 = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{1-\gamma}\times \\ \times[\mathbf{I} + (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-(1-\gamma)}\mathbf{A}_1(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-\gamma}]\times \\ \times(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{\gamma}. \qquad (2.3)$$

Отсюда следует, что оператор $-\mathbf{L}$ порождает аналитическую полугруппу в пространстве X, операторы $\mathbf{D}^{(k)}$ имеют дробную степень α относительно $\mathbf{L}$ справа, а операторы $\mathbf{B}_{k,j}$ имеют степень $\beta_{k,j}$ относительно $\mathbf{L}$.

Из условия V и соотношения (2.3) вытекает [10, 13], что спектр $\sigma(\mathbf{L})$ оператора $\mathbf{L}$ дискретен. Поэтому, в силу условия VII и [14], спектр операторов $e^{-t\mathbf{L}}$, $t \geqslant 0$, состоит из точек вида $e^{-t\lambda}$, $\lambda \in \sigma(\mathbf{L})$, а также, быть может, нуля. Отсюда следует существование такого положительного числа t_0, что справедливо неравенство $e^{-\lambda t_0} \neq 1$, $\lambda \in \sigma(\mathbf{L})$. Пусть t_ω, $\omega > 1$, – наибольшее неотрицательное число, кратное $2\pi\omega$ и не превосходящее t_0. Тогда существует такое число $\omega_2 > 0$, что при $\omega > \omega_2$ выполняется соотношение $e^{-\lambda t_\omega} \neq 1$. Будем рассматривать лишь такие значения параметра ω, которые превосходят ω_2.

Аналогично случаю ограниченных операторов, доказывается, что задача об обобщенных t_ω-периодических решениях уравнения (2.1) при $t \geqslant 0$ эквивалентна для $\mathbf{u} \in D(\mathbf{L})$, $\omega > \omega_2$ интегральному уравнению

$$\mathbf{u}(t) - (\mathbf{P}_\omega\mathbf{u})(t) = \mathbf{u}(t) - e^{-t\mathbf{L}}[\mathbf{I} - e^{-t_\omega\mathbf{L}}]^{-1}\times \\ \times\int_0^{t_\omega} e^{-(t_\omega-\tau)\mathbf{L}}\mathbf{h}[\mathbf{u}(\tau),\omega\tau,\omega]d\tau - \\ -\int_0^t e^{-(t-\tau)\mathbf{L}}\mathbf{h}[\mathbf{u}(\tau),\omega\tau,\omega]d\tau = 0. \qquad (2.4)$$

Пусть

$$r_{k,j}^0 \equiv r_{k,j}, \quad \alpha_{k,j} = \alpha + \beta_{k,j},$$

$$p^1 \equiv p \equiv \min_{|k|\leqslant k_0} p_k,$$

$$\lambda \in (1 - (1-\beta)p^1, 1) \cap (0,1).$$

Для $-k_0 \leqslant k \leqslant k_0$, $1 \leqslant j \leqslant m_k$ введем величины

$$r_{k,j}^l \equiv \begin{cases} \lambda\dfrac{p^{l-1}}{1-(1-\alpha_{k,j})p^{l-1}}, \\ \qquad \text{если } p^{l-1} < \dfrac{1}{1-\alpha_{k,j}}; \\ \infty, \text{ если } p^{l-1} \geqslant \dfrac{1}{1-\alpha_{k,j}}, \end{cases}$$

$$\frac{1}{p_k^l} \equiv \sum_{1\leqslant j\leqslant m_k} \frac{1}{r_{k,j}^l}, \quad p^l \equiv \min_{|k|\leqslant k_0} p_k^l.$$

Индекс l пробегает значения от 1 до $\rho = \inf\{l \geqslant 0 \,|\, p^l > \frac{1}{1-(\beta+\mu)}\}$, а для $a \in \mathbb{R}$ полагаем: $\frac{\infty}{a} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$. Величина ρ конечна ввиду условий (1.5).

Введем банаховы пространства Z_l, $0 \leqslant l \leqslant \rho$ суммируемых вектор-функций $\mathbf{x} : (0,t_0) \to X$ с помощью нормы

$$\|\mathbf{x}\|_{Z_l} \equiv \|\mathbf{x}\|_{L^1_{(0,t_0)}(X)} + \\ + \sum_{k=-k_0}^{k_0}\sum_{j=1}^{m_k}\left[\int_0^{t_0} \|\mathbf{B}_{k,j}\mathbf{x}(\tau)\|_{Y_{k,j}}^{r_{k,j}^l} d\tau\right]^{\frac{1}{r_{k,j}^l}}.$$

В частности, $Z_0 \equiv Z^{(2)}([0,t_0])$.

Доказательство утверждений 1, 2 теоремы опирается на следующие три леммы, в которых r_0 — произвольное фиксированное число. Данные леммы доказаны в работе [9], при этом существенно применяются методы монографий [8, 11]. Отметим, что при доказательстве лемм 1 и 2 предположение VIII используется, а при доказательстве леммы 3 не используется.

Лемма 1. Существуют такие положительные числа C и ω_3, что при любых $r_1 \in (0, r_0]$, $\omega \in (\omega_3, \infty)$, $\nu \in [0, \rho - 1]$ для всех вектор-функций $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ из шара $\|\mathbf{u}\|_{Z_\rho} \leqslant r_1$ выполняется оценка $\|\mathbf{P}_\omega(\mathbf{u}_2) - \mathbf{P}_\omega(\mathbf{u}_1)\|_{Z_{\nu+1}} \leqslant C\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|_{Z_\nu}$. Число C не зависит от r_1.

Лемма 2. Существуют такие положительные числа C и ω_4, что при любых $r_1 \in (0, r_0]$, $\omega \in (\omega_4, \infty)$ для всех вектор-функций $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ из шара $\|\mathbf{u}\|_{Z_\rho} \leqslant r_1$ выполняется неравенство $\|\mathbf{P}_\omega(\mathbf{u}_2) - \mathbf{P}_\omega(\mathbf{u}_1)\|_{Z^{(3)}} \leqslant C\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|_{Z_\rho}$, где $Z^{(3)} \equiv Z_\mu^{(1)}([0, t_0])$. Число C не зависит от r_1.

Лемма 3. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ и $\omega_7 = \omega_7(\varepsilon) > 0$, что для всех $k \in [-k_0, k_0]$, $j \in [1, m_k]$, $\omega \in (\omega_7, \infty)$ и функций $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ из шара $\|\mathbf{u}\|_{Z^{(3)}} < \delta_2$ справедливо соотношение

$$\|\mathbf{P}_\omega(\mathbf{u}_2) - \mathbf{P}_\omega(\mathbf{u}_1)\|_{Z^{(3)}} < \varepsilon\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|_{Z^{(3)}}.$$

Также в работе [9] установлено, что при больших ω выполняется оценка $\|\mathbf{P}_\omega(\mathbf{0})\|_{Z^{(3)}} \leqslant \frac{1}{2}\delta_2(\frac{1}{2})$. Значит, при больших ω для любой вектор-функции $\mathbf{u}$, находящейся в шаре $\|\mathbf{u}\|_{Z^{(3)}} \leqslant \delta_2(\frac{1}{2})$, имеет место цепочка неравенств

$$\|\mathbf{P}_\omega(\mathbf{u})\|_{Z^{(3)}} \leqslant \|\mathbf{P}_\omega(\mathbf{0})\|_{Z^{(3)}} + \|\mathbf{P}_\omega(\mathbf{u}) - \mathbf{P}_\omega(\mathbf{0})\|_{Z^{(3)}} \leqslant \delta_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Отсюда следует, что шар $\|\mathbf{u}\|_{Z^{(3)}} < \delta_2(\frac{1}{2})$ является инвариантным относительно оператора $\mathbf{P}_\omega$. Поэтому, в силу принципа сжатых отображений, при больших ω интегральное уравнение (2.4) имеет единственное в шаре $\|\mathbf{u}\|_{Z^{(3)}} < r_0$ решение $\mathbf{u}_\omega$, и при этом справедливо соотношение $\lim\limits_{\omega\to\infty} \|\mathbf{u}_\omega\|_{Z^{(3)}} = 0$.

Ввиду 2π-периодичности функции $\mathbf{h}$ по второй переменной и относительной единственности решения $\mathbf{u}_\omega(t)$, это решение является $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическим. Продолжив функции $\mathbf{u}_\omega(t)$ $\frac{2\pi}{\omega}$-периодически на всю вещественную ось, сохранив за этим продолжением прежнее обозначение, получим единственное в шаре $\|\mathbf{u}\|_{Z_\mu^{(1)}} < r_0$ $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое решение, для которого выполняется соотношение (2.2). Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2, нетрудно найти такие $r > 0$, $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ всякое об. решение уравнения (2.1), находящееся в шаре (1.8), принадлежит и шару $\|\mathbf{u}\|_{Z_\mu^{(1)}} < r_0$. Утверждение 1 доказано.

Перейдем теперь к доказательству утверждения 2. Из лемм 1–3 вытекает, что при достаточно малых $r > 0$ и больших ω оператор $\mathbf{P}_\omega^{\rho+1}$, т.е. $(\rho + 1)$-я итерация оператора $\mathbf{P}_\omega$, является сжатием в шаре $\|\mathbf{u}\|_{Z_0} \leqslant \frac{r}{2}$, а относительно $\mathbf{P}_\omega^{\rho+2}$ этот шар инвариантен.

Отсюда следует существование такой функции $\mathbf{u}$ из указанного шара, что $\mathbf{P}_\omega^{\rho+1}\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Действуя оператором $\mathbf{P}_\omega$ на обе части последнего равенства [12], получим соотношение $\mathbf{P}_\omega^{\rho+1}(\mathbf{P}_\omega\mathbf{u}) = \mathbf{P}_\omega\mathbf{u}$. Таким образом, при достаточно больших ω элемент $\mathbf{P}_\omega\mathbf{u}$ также будет неподвижной точкой этого шара. Значит, $\mathbf{P}_\omega(u) = \mathbf{u}$, и $\mathbf{u}(t)$ — решение интегрального уравнения (2.4). Рассуждая так же, как и выше, получаем единственность $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_\omega(t)$ в некотором шаре пространства $Z_0 = Z^{(1)}(0, t_0)$. Так как период $2\pi\omega^{-1}$ мал при больших ω, для любого $R > 0$ найдутся такие положительные числа ω_0 и $r = r(r_1, R)$, что при $\omega > \omega_0$ единственность $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения будем иметь место и в шаре $\|\mathbf{u}_\omega\|_{Z^{(2)}(0,R)} < r$. Утверждение 2 доказано.

В процессе доказательства утверждений 3 и 4 применяются рассуждения, аналогичные работе [6]. Для получения соответствующих оценок используются те же идеи, что при доказательстве утверждения 1.

Автор выражает глубокую признательность В. Б. Левенштаму за постановку задачи и полезное обсуждение работы.

Литература

1. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений / /Мат. сб. 1972. Т. 87. №2. С. 236–253.
2. Юдович В.И. Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 5. С. 622–624.
3. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. №3. С. 26–158.
4. Левенштам В.Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях / /Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34. №2. С. 92–109.

5. Левенштам В.Б. Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, №5. С. 1103–1116.
6. Левенштам В.Б. Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. РАН. Сер. мат. 2006. Т. 70. № 2. С. 174–205.
7. Левенштам В.Б., Хатламаджиян Г.Л. Распространение теории усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. Задача о периодических решениях // Изв. вузов. Математика. 2006. №6. С. 35–47.
8. Юдович В.И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-н.Д.: Изд-во РГУ, 1984. 190 с.
9. Хатламаджиян Г.Л. Асимптотический анализ некоторых эволюционных задач с большими высокочастотными слагаемыми / Южный фед. университет. Ростов-н.Д., 2007. Деп. в ВИНИТИ 24.09.07, №889-В2007.
10. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966, 499 с.
11. Симоненко И.Б. Метод усреднения в теории линейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. Ростов-н.Д.: Изд-во РГУ, 1989. 112 с.
12. Далецкий Ю.А., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
14. Hille H., Phillips R.S. Functional analysis and semi-groups. Vol. 31. AMS Colloquium Publications, 1957. 808 p.

Ключевые слова: метод усреднения, абстрактные параболические уравнения, большие высокочастотные слагаемые, устойчивость.

Статья поступила 14 сентября 2012 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону