УДК 539.3

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ РАЗНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ[1]

Бабешко В. А.[2], Евдокимова О. В.[3], Бабешко О. М.[4]

TOPOLOGICAL APPROACH IN BOUNDARY PROBLEMS FOR DIFFERENT DIMENSIONS

Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.

It is given on the basis of topological method the approach of studying the boundary problems for block structure having the different dimensions of the blocks. The block structure is shown to be the result of construction the factor – topology of the Descartes product of the topological spaces.

Keywords: block element method, boundary value problem, automorphism, pseudo differential equation, complicated domain

Возможности топологии находят применение в исследовании граничных задач для систем дифференциальных уравнений. Такую возможность открывает метод блочного элемента, в котором каждый блок представляет собой топологическое многообразие с краем [1–5]. Топологическая теория делает применение этого метода не только удобным, но и открывает перспективу его дальнейшего развития с привлечением глубоко разработанных топологических методов. В частности, обосновывается возможность широкого выбора форм носителей блочных элементов.

Полуаналитический метод блочного элемента, в отличие от чисто вычислительных, позволил вскрыть ряд ранее не известных свойств решений граничных задач в блочных структурах. Так, в [6, 7] обнаружено существование природных вирусов, в [8] выявлена возможность локализации энергии и других характеристик процессов, приводящих к их аномальному развитию. Примеры можно продолжить [9]. Ниже излагается применение топологических методов к исследованию блочных структур, состоящих как из блоков одной размерности, так и разноразмерных блоков, причем блоки меньшей размерности называются покрытиями.

1. Будем считать, что рассматривается линейная граничная задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных для блочной структуры, состоящей из блоков, занимающих трехмерные области Ω_b, $b = 1, 2, \ldots, B$, деформируемые материалы которых имеют разнотипные физико-механические свойства. Блоки могут быть ограниченными или неограниченными, занимать как односвязные, так и многосвязные области с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega_b$. Блоки контактируют между собой, часть их границ может быть свободной.

Введем несколько топологий. Первая связана с областями Ω_b, занятыми блоками, безотносительно к граничной задаче. Полагаем, что блочная структура, состоящая из контактирующих блоков, представляет единое це-

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (12-01-00330, 12-01-00332, 11-08-00381, р_юг_а (13-01-96502, 13-01-96505, 13-01-96508, 13-01-96509), грантов Президента РФ НШ-914.2012.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН, в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

[3]Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[4]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

лое и может быть многосвязной. Рассматривая области блоков Ω_b в метрическом пространстве, введем в каждой из них топологию, индуцированную открытыми окрестностями $\upsilon_{\nu b}$, $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_b$ [10, 11]. Окрестности блока могут измельчаться или укрупнятся. Самой крупной открытой окрестностью в блоке является $\upsilon_b = \bigcup\limits_{\nu} \upsilon_{\nu b}$ — объединение всех открытых окрестностей. Она представляет внутренность блока, а ее замыкание — $\bar{\upsilon}_b$ дает блок с границей. Построенные в каждом блоке топологические пространства являются подпространствами T_{1b} топологического пространства всей блочной структуры T_1. Осуществим компактификацию пространства T_1, присоединив окрестности бесконечно удаленной точки, если блочная структура ее содержит.

В каждой открытой окрестности $\upsilon_{\nu b}$ введем в рассмотрение функции из пространства $\mathbf{H}_s$ [2, 3]. Линейное нормированное пространство индуцирует топологию, база которой задается, например, открытыми шарами. Рассмотрим на каждой открытой окрестности $\upsilon_{\nu b}$ как на носителе множество функций из $\mathbf{H}_s$ и построим топологическую структуру, приняв в качестве открытых множеств открытые шары

$$\|\varphi\|_{\mathbf{H}_s} < \varepsilon.$$

Таким образом, на каждом открытом множестве $\upsilon_{\nu b}$ сформировано открытое множество функций $\Upsilon_{\nu b}$.Совокупность открытых окрестностей $\Upsilon_{\nu b}$ формирует в областях $\Omega_{\nu b}$ топологическую структуру топологического подпространства T_{2b}, входящего в топологическое пространство T_2, включающего открытые множества всех блоков. По построению окрестности пространств T_1 и T_2 изоморфны.

Поскольку топологическое пространство T_1 является нормальным по построению, оно и каждое его подпространство допускают разбиение единицы. Произведем разбиение единицы компактного топологического пространства T_1, следовательно, каждого подпространства T_{1b}, непересекающимися связными открытыми покрытиями, которые ради краткости будем обозначать по-прежнему $\upsilon_{\lambda b}$ $\quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \lambda_b)$. Отсюда следует, что в силу изоморфизма разбиение единицы пространства T_1 влечет за собой эквивалентное разбиение единицы пространства T_2.

В топологическом подпространстве T_{1b} построим топологическое многообразие M_{1b}, для чего введем в каждом покрытии $\upsilon_{\nu b}$ локальные системы координат, карты и атлас. Их объединение приводит к многообразию M_1. После введения локальной системы координат и касательного расслоения границы назовем открытые покрытия $\upsilon_{\lambda b}$ внутренностями многообразий M_{1b}, а их замыкания $\bar{\upsilon}_{\lambda b}$ — ориентируемыми многообразиями с краем M_{1b}. Таким образом, получим совокупность ориентированных бесконечно гладких многообразий M_{1b} с краем. В силу изоморфизма функции, формирующие T_2, также задают многообразия M_2 и M_{2b}. Их можно рассматривать и как объекты топологического пространства T_2, и как функции на многообразии $M_1 = \cup M_{1b}$. Обозначим через Θ дополнение области Ω до всего пространства R^3 $\left(\Theta = R^3 \backslash \Omega\right)$, не содержащее носителей блочной структуры. Осуществим покрытие области Θ открытыми областями $\theta_{\mu r}$, называемыми нулевыми, которые могут контактировать на свободных границах с некоторыми множествами $\upsilon_{\lambda b}$. В результате будет получено покрытие всего пространства R^3 открытыми непересекающимися множествами.

2. В области $\Omega = \bigcup\limits_{b} \Omega_b$, занятой блочной структурой, рассмотрим граничную задачу для системы P дифференциальных уравнений в частных производных

$$\mathbf{K}_b(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi_b =$$
$$= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A^b_{spmnk}\varphi_{b\,p,\overset{(m)}{x_1}\overset{(n)}{x_2}\overset{(k)}{x_3}} = \mathbf{g}_b(\mathbf{x}),$$
$$s = 1, 2, \ldots, P_b,$$
$$A^b_{sqmnk} = \mathrm{const}, \quad \varphi_b = \{\varphi_{b1}, \varphi_{b2}, \ldots, \varphi_{bP}\},$$
$$b = 1, 2, \ldots, B,$$
$$\varphi = \{\varphi_s\}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \qquad (1)$$
$$\mathbf{x} \in \Omega_b.$$

На общей, контактирующей, границе $\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d$ задаются следующие граничные условия сопряжения

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi_b + \mathbf{R}_d(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi_d =$$
$$= \sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{p=1}^{P}\left[B^b_{spmnk}\varphi_{bp,\overset{(m)}{x_1}\overset{(n)}{x_2}\overset{(k)}{x_3}} + \right.$$
$$\left. + B^d_{spmnk}\varphi_{dp,\overset{(m)}{x_1}\overset{(n)}{x_2}\overset{(k)}{x_3}}\right] = f_{bds}, \quad (2)$$
$$s = 1, 2, \ldots, s_{b0} < P, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d,$$
$$M_1 < M, \quad N_1, < N, \quad K_1 < K, b,\ d = 1, 2, \ldots, B.$$

В случае если область Ω_d нулевая, в формуле (2) под знаком суммы остается лишь член с индексом b, что соответствует свободной границе.

Граничная задача исследуется в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H_s}(\Omega)$, описанных в [1, 2].

Введем в рассмотрение декартово произведение топологических пространств $T_1 \times T_2$. Построим его отображение по следующему правилу: T_1 отображается тождественно на себя; отображение T_2 осуществляется формой $\mathbf{K}_b\,(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\,\varphi_b$, переводящей вектор φ_b из M_{2b} в заданный вектор $\mathbf{g}_b$ на M_{2b} при условии (2).

Для решения граничной задачи необходимо найти прообраз этого отображения.

2.1. Вначале рассмотрим случай, когда коэффициенты дифференциальной формы (1) являются постоянными в каждом блоке. Переходя в пространстве R^3 для функций из T_2, принадлежащих $\mathbf{H_s}(\Omega)$, к двойственному пространству Фурье-образов, получаем соотношения, называемые функциональными уравнениями вида [2],

$$\mathbf{K}_b\,(\alpha)\,\Phi_b = \iint\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b - \mathbf{G}_b\,(\alpha),$$

$$\mathbf{G}_b\,(\alpha) = \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{g}_b\,(\mathbf{x}) \exp i\,\langle\alpha, \mathbf{x}\rangle\, dx_1 x_2 x_3,$$

$$\mathbf{K}_b\,(\alpha) \equiv -\mathbf{K}_b\,(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \\ = \|k_{bnm}\,(\alpha)\|\,,$$

$$\langle\alpha, \mathbf{x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad b = 1, 2, \ldots, B,$$

где сохранены обозначения этой работы.

В процессе выполненных построений был использован интеграл Стокса на многообразиях с краем, что привело к появлению внешних форм ω_b. Из построенных функциональных уравнений находятся представления векторов φ_b, содержащих неизвестные значения на границах блоков. Для нахождения граничных значений решений φ_b на контактирующих или свободных границах областей блоков $\partial\Omega_b$ необходимо отождествить границы контактов либо соседних покрытий $\bar{\upsilon}_b$ и $\bar{\upsilon}_d$, либо соседних покрытий $\bar{\upsilon}_b$ и $\bar{\theta}_d$ если у блока граница свободная. С этой целью строится фактор-топология пространства $T_1 \times T_2$, осуществляющая склейку эквивалентных границ блоков или эквивалентных границ замкнутых топологических множеств, при условии (2). Заметим, что в этом случае в пространстве T_1 происходит укрупнение покрытий путем объединения их по границе, а в пространстве T_2 формируется псевдодифференциальное уравнение, реализующие объединение элементов покрытий этого топологического пространства. Это условие гораздо более сложное, чем традиционно излагаемые примеры фактор-пространств в литературе по топологии [11], но в рассматриваемом случае фактор-топология формируется только после его реализации. Соответствующий алгоритм по проведению этой процедуры описан в [2].

Допустим, два блока $\bar{\upsilon}_b$ и $\bar{\upsilon}_d$ находятся в контакте. Рассмотрим лишь часть границы их взаимодействия безотносительно к контактам с другими блоками. Тогда процедура, описывающая построение разрешающих соотношений для решения исходной граничной задачи, включают следующие действия:

– исследование многообразий с краем M_{2b} и M_{2d} в локальных системах координат [10];

– выбор наиболее оптимальных систем криволинейных координат для осуществления автоморфизма [12, 13];

– осуществление дифференциальной факторизации матриц- функции $\mathbf{K}_b\,(\alpha)$ и $\mathbf{K}_d\,(\alpha)$ [14];

– вычисление форм-вычетов Лере [2];

– построение псевдодифференциальных уравнений [2];

– извлечение из псевдодифференциальных уравнений требуемых условием (2) интегральных уравнений [2, 13, 14];

– решение интегральных уравнений;

– внесение найденных решений в интегральное представление решения граничной задачи

$$\varphi_b = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{K}_b^{-1}\,(\alpha)\left[\iint\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b - \mathbf{G}_b\,(\alpha)\right],$$

$\mathbf{F}^{-1}$ — оператор обращения Фурье.

В этом случае вслед за укрупнением многообразий M_{1d} и M_{1b} путем объединения в $M_{1b} \cup M_{1d}$ последует образование изоморфного ему многообразия $M_{2b} \cup M_{2d}$.

2.2. Случай переменных коэффициентов в дифференциальной форме (1) отличается от рассмотренного выше случая тем, что покрытие определяется свойствами ее коэффициентов. Оно должно быть настолько малых размеров, что рассматриваемую на нем дифференциальную форму (1) можно было бы отнести к категории имеющих постоянные коэффициенты. Тогда каждое такое покрытие становится блочным элементом, контактирующим с соседним блочным элементом, но имеющим уже другие коэффициенты. При этом на границах таких блоков должны быть сформулированы граничные условия сопряжения решений, подобные (2), диктуемые требованием обеспечения гладкости решений, возможно, их производных или градиентов и других форм на границе. После этого для поставленной граничной задачи в такой блочной структуре повторяются все действия, изложенные в предыдущих пунктах.

2.3. В случае нелинейной граничной задачи ее исследование и решение можно осуществлять с применением метода Ньютона – Канторовича [15], требующего для своей реализации на каждом этапе обращение некоторых линейных неоднородных граничных задач с переменными коэффициентами, что, как показано в предыдущих пунктах, для описанного метода выполнимо.

Таким образом, предложенным методом можно исследовать широкий круг граничных задач из различных областей. Следует отметить, что применение этого метода позволяет строить аналитическое представление решения граничной задачи, что чрезвычайно важно, например, для анализа волновых процессов, и выявления различных аномальных состояний в многопараметрических процессах.

Замечание 1. В 2.1 изложены упрощенные схемы построения многообразий в предположении, что блоки имеют одну карту. Без особого труда по этой же схеме исследование проводится и в тех случаях, когда карт оказывается несколько. В таких случаях необходимо «увеличить» количество блоков, отнеся на каждый одну карту. При этом нужно сформировать дополнительное условие типа (2), обеспечивающее продолжение решений из одного блока в другой с соблюдением диктуемых граничной задачей условий непрерывности.

Замечание 2. Применение топологического подхода в методе блочного элемента позволило установить важное свойство метода — возможность широкого выбора носителей блоков, которые могут быть совершенно произвольными открытыми множествами. Для всех возможных случаев имеется определенный алгоритм, обеспечивающий процесс решения граничной задачи.

Замечание 3. Совершенно ясно, что рассматриваемая блочная структура может содержать различного вида неоднородности типа трещин, включений, полостей. В этом случае блочные элементы структуры можно строить с применением условного (виртуального) их разделения, не пересекая границы неоднородностей. В случаях когда трехмерная блочная структура содержит деформируемые блоки меньшей размерности, например, пластины или оболочки, то сопряжение таких элементов имеет свою специфику и изложенный выше алгоритм непосредственно не применим.

3. Отдельно остановимся на топологическом подходе в теории блочных структур при наличии разноразмерных блочных элементов. В отличие от рассмотренных в работе [12] блочных структур с блоками одной размерности этот случай имеет свои особенности. Он может изучаться с помощью разных подходов. Как правило, такие случаи возникают, когда трехмерные деформируемые тела находятся в контакте с двумерными, например, с пластинами или оболочками. К числу таких контактов относятся покрытия трехмерных тел оболочками, наличие технологических включений из пластин в трехмерные тела и.т.д. При этом покрытие может быть многослойным. Часть покрытий может содержать трещины. Именно такая ситуация имеет место в литосферных плитах, содержащих разломы, как внутренние, так и выходящие на дневную поверхность. Треснувшие покрытия исследуются и в авиации, где определены уровни допустимых дефектов самолетов, позволяющих продолжение их безопасной эксплуатации. В материаловедении развита теории, объясняющие прочность качественно отшлифованных поверхностей металлов наличием поверхностного натяжения, моделируемого тонким покрытием. В теории нанопокрытий возникают проблемы изучения их прочности, в том числе при наличии в них трещин.

При топологическом исследовании блочной структуры, состоящей из описанных выше двумерных и трехмерных блоков, возможны два подхода. Первый включает первоочередное топологическое исследование в отдельности каждой блочной структуры — двумерной и трехмерной, методом, описанным в [12], с учетом наличия всех неоднородностей, трещин и разломов. Затем осуществляется операция, называемая построением фактортопологии, описанная выше и состоящая в отождествлении двумерной границы трехмерного блочного элемента со срединной поверхностью двумерного покрытия. Таким путем строятся псевдодифференциальные уравнения и интегральныее уравнения для построения всех граничных значений рассматриваемой граничной задачи.

Второй подход состоит в предварительном построении фактор-топологии двух блочных элементов – трехмерного и двумерного с последующим исследованием нового топологического объекта, содержащего разноразмерные составляющие и такие же разноразмерные границы.

Выбор второго пути исследования требует правильного учета всех особенностей такого топологического объекта, особенно при построении касательного расслоения границы, введении локальных систем координат, карт и атласа многообразия.

Литература

1. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427, №2. С. 183–186.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и нано структурах // ДАН. 2007. Т. 415, №5. С. 596–599.
3. *Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бабешко В.А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418, № 3. С. 321–323.
4. *Бабешко В.А,.Евдокимова О.В, Бабешко О.М.* О многогранных и выпуклых блочных элементах // ДАН. 2010. Т. 432, №5. С. 620–623.
5. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О блочном элементе в форме произвольной треугольной пирамиды ДАН. 2009. Т. 429, №6. С. 758–761.
6. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О «вирусной» теории некоторых аномальных природных явлений // ДАН. 2012. Т.447, №1. С. 33–37.
7. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* «Вирусная теория» некоторых природных аномалий // ДАН. 2012. Т. 447, №6. С. 624–628.
8. *Бабешко В.А., Ритцер Д., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О локализации энергии природных процессов и природные вирусы // ДАН. 2013. (в печати)
9. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О блочных элементах в приложениях // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15, №1. С. 95–103.
10. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 2. М.: МЦНМО, 2002. 788 с.
11. *Келли Д.* Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.
12. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы // ДАН. 2013. Т. 449, № 6. С. 624–628.
13. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Некоторые общие свойства блочных элементов // ДАН. 2012. Т. 442. № 1. С. 37–40.
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399, №1. С. 163–167.
15. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничная задача, автоморфизм, псевдодифференциальное уравнение, сложное покрытие

Статья поступила 19 июня 2013 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар