

УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОГО НАДРЕЗА ПРИ АНАЛИЗЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Ватульян А. О.¹, Осипов А. В.²

ABOUT THE DETERMINATION OF THE CHARACTERISTICS OF A THIN CUT IN THE ANALYSIS
OF FLEXURAL VIBRATIONS OF THE BEAM

Vatulyan A. O., Osipov A. V.

In this work the transverse vibrations of cantilever beams fixed with a thin cut, which is modeled as a local change in stiffness. The methods of reconstruction of parameters of a cut through what is known about the resonant frequencies notched beams or information about sampling analogue-end frequency response. The formulas for the solution of the reconstruction, a number of computational experiments that evaluate the accuracy of these approaches.

Keywords: beam, incision, vibrations, identification.

Введение

Задачи о колебаниях тел с дефектами различной природы (полости, трещины, надрезы) имеют большое значение для оценки их прочности, при этом диагностика характеристик дефектов по результатам динамического зондирования представляет собой важный этап прогноза. В настоящее время достаточно подробно изучены задачи о поперечных колебаниях балок с малыми полостями [1–3]. В [4] на основе асимптотического анализа удалось получить трансцендентные уравнения для координаты центра полости и далее восстановить ее характерный размер. Кроме того, отметим ряд работ по анализу колебаний балок с трещинами и надрезами [5–7]. Заметим, что авторам не удалось устойчиво восстанавливать характеристики надреза, поскольку, как правило, в основу идентификации положено частотное уравнение, а параметры подбираются на основе минимизации функционала невязки. В [8] представлен метод получения модифицированных условий сопряжения на концах тонкого надреза на основе асимптотического анализа.

В настоящей работе исследованы поперечные колебания консольно закрепленной

балки с тонким надрезом, который смоделирован как локальное изменение жесткости. Разработаны методы реконструкции параметров надреза. По известной информации о резонансных частотах балки с надрезом или об амплитудно-частотной характеристике можно восстановить ширину, глубину, объем и точку центра надреза. Получены формулы для решения задачи реконструкции. Проведен ряд вычислительных экспериментов для оценки точности полученных формул.

1. Постановка задачи, аналитическое решение для трехэлементной балки

Рассматриваются установившиеся колебания с частотой ω упругой балки длины L , ослабленной тонким симметричным двусторонним надрезом длины $2l$ с центром в точке s . Будем считать, что балка на конце $x_0 = 0$ жестко закреплена, а на конце $x_0 = L$ действует сосредоточенная сила. Уравнение колебаний неоднородной балки имеет вид [9]:

$$(EI(x_0)w''(x_0))'' - \rho\omega^2 F(x_0)w(x_0) = 0,$$

где E — модуль Юнга, I — момент инерции, ρ — плотность, F — площадь поперечного се-

¹Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

²Осипов Алексей Владимирович, аспирант кафедры «Прикладная математика» Донского государственного технического университета; e-mail: kukuvzz@yandex.ru.

чения. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$w(0) = w'(0) = 0; \quad EI(L) \cdot w''(L) = 0;$$

$$(EI(x_0)w''(x_0))'|_{x_0=L} = P.$$

Для анализа задачи рассмотрим модель трехэлементной балки, на каждом участке которой геометрические характеристики постоянны. Для простоты дальнейших рассуждений считаем, что поперечное сечение балки — прямоугольник шириной b и высотой H на неповрежденном участке и высотой h в ослабленном месте. Считая модуль Юнга и плотность постоянными по всей длине балки, будем искать решение задачи на каждом промежутке

$$\begin{cases} w_1^{IV} - \frac{\rho\omega^2 F_1}{EI_1} w_1 = 0, \\ w_*^{IV} - \frac{\rho\omega^2 F_*}{EI_*} w_* = 0, \\ w_2^{IV} - \frac{\rho\omega^2 F_2}{EI_2} w_2 = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$F_1 = F_2 = bH, \quad F_* = bh,$$

$$I_1 = I_2 = \frac{bH^3}{12}, \quad I_* = \frac{bh^3}{12},$$

b — ширина балки, w_* — решение задачи на среднем поврежденном участке.

Условия сопряжения и граничные условия для системы (1.1) имеют вид

$$w_1(0) = 0, \quad w_1'(0) = 0,$$

$$w_1(c-l) = w_*(c-l), \quad w_1'(c-l) = w_*'(c-l),$$

$$I_1 w_1^{(j)}(c-l) = I_* w_*^{(j)}(c-l), \quad j = 2, 3, \quad (1.2)$$

$$w_*(c+l) = w_2(c+l), \quad w_*'(c+l) = w_2'(c+l),$$

$$I_* w_*^{(j)}(c+l) = I_2 w_2^{(j)}(c+l), \quad j = 2, 3,$$

$$w_2''(L) = 0, \quad w_2'''(L) = \frac{P}{EI_2}.$$

Отметим, что задачу расчета амплитуд колебаний и резонансных частот можно упростить, сформулировав модифицированные граничные условия на тонком надрезе и решая задачу для двухэлементной балки, как это осуществлено в [8]. При этом резонансные характеристики балки с надрезом меняются в зависимости от характеристик надреза и его положения, что может служить информацией, по которой возможно определение характеристик надреза. Было проведено

численное исследование изменения резонансных частот балки в зависимости от параметров надреза.

На рис. 1–3 представлены значения резонансных частот в зависимости от выбора точки центра дефекта при следующих параметрах надреза: $\frac{h}{H} = 0,8$, $\frac{2l}{L} = 0,01$. Горизонтальными линиями обозначены значения резонансных частот для неповрежденной балки.

Отметим, что если первая частота монотонно растет в зависимости от параметра c , то аналогичные зависимости для второй и третьей частоты существенно немонотонны. Эти зависимости могут служить в качестве исходной информации для решения задачи о реконструкции параметров надреза.

2. Формула для поправки к резонансной частоте

Задача об идентификации параметров симметричного тонкого надреза в балке состоит в нахождении координаты центра надреза c_0 и его объема по известным значениям резонансных частот балки с тонким надрезом. Исследования такого типа были осуществлены ранее в случае идентификации внутренней полости [2, 4]. Обычно эта процедура сводится к исследованию некоторого трансцендентного уравнения, однако вычислительные процедуры при такой реализации являются весьма неустойчивыми. Настоящая работа посвящена получению аналитических формул для поправок к резонансным частотам, на основе которых можно было бы осуществить процедуру реконструкции дефекта по трем резонансным частотам. Для получения соотношения, связывающего параметры надреза и резонансные частоты, рассмотрим безразмерное дифференциальное уравнение для собственной формы неповрежденной балки и уравнение для собственной формы балки с тонким надрезом. Здесь введены безразмерные характеристики

$$x = \frac{x_0}{L}, \quad k_0^4 = \frac{\rho\omega^2 FL^4}{EI}, \quad c_0 = \frac{c}{L}, \quad l_0 = \frac{l}{L}.$$

$$1) \quad w_0^{IV}(x) - k_0^4 \cdot w_0(x) = 0 \quad (2.1)$$

— уравнение для собственной формы неповрежденной балки [9], граничные условия имеют вид $w_0(0) = w_0'(0) = 0$, $w_0''(1) = w_0'''(1) = 0$;

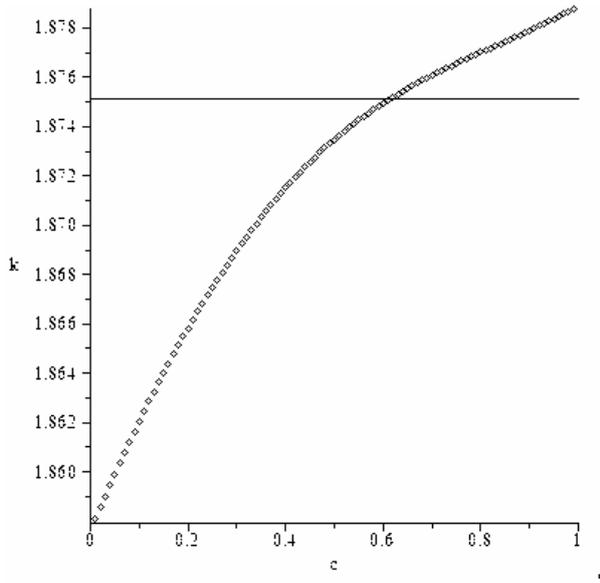


Рис. 1. Зависимость первой резонансной частоты от выбора точки центра надреза

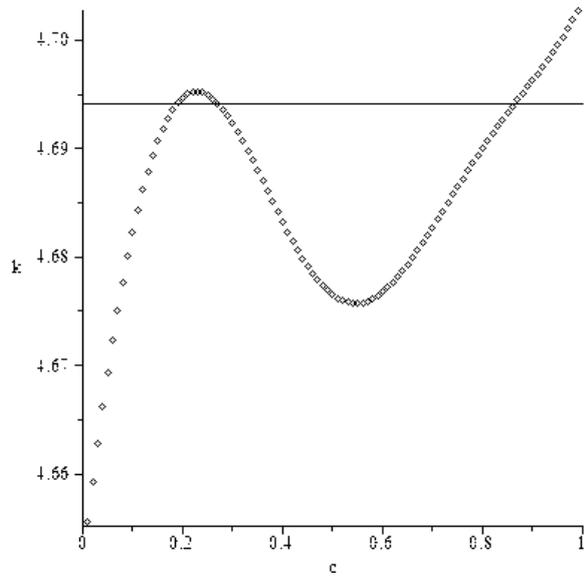


Рис. 2. Зависимость второй резонансной частоты от выбора точки центра надреза

$$2) (g(x)w''(x))'' - k^4 f(x)w(x) = 0 \quad (2.2)$$

— уравнение для собственной формы балки с тонким надрезом, где соответствующие безразмерные функции имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x - c_0| \geq l_0, \\ \frac{h}{H}, & |x - c_0| \leq l_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x - c_0| \geq l_0, \\ \frac{h^3}{H^3}, & |x - c_0| \leq l_0. \end{cases}$$

Граничные условия аналогичны и имеют вид $w(0) = w'(0) = 0, w''(1) = w'''(1) = 0$.

Домножим уравнение (2.1) на $w(x)$, а (2.2) — на $w_0(x)$, затем вычтем из первого соотношения второе и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$. Получим

$$\int_0^1 (w_0^{IV}(\xi)w(\xi) - (g(\xi)w''(\xi))''w_0(\xi) - k_0^4 w_0(\xi)w(\xi) + k^4 f(\xi)w(\xi)w_0(\xi))d\xi = 0. \quad (2.4)$$

Интегрируя первые два слагаемых в (2.4) по частям, получаем

$$(w_0'''(\xi)w(\xi) - w_0''(\xi)w'(\xi) - (g(\xi)w''(\xi))'w_0(\xi) + g(\xi)w''(\xi)w_0'(\xi))\Big|_0^1 + \int_0^1 ((1 - g(\xi))w_0''(\xi)w''(\xi) + w(\xi)w_0(\xi)(k^4 f(\xi) - k_0^4))d\xi = 0.$$

Учитывая граничные условия, окончательно имеем соотношение

$$\int_0^1 ((1 - g(\xi))w_0''(\xi)w''(\xi) + w(\xi)w_0(\xi)(k^4 f(\xi) - k_0^4))d\xi = 0, \quad (2.5)$$

откуда получаем точную формулу, связывающую резонансные частоты и параметры надреза

$$k^4 - k_0^4 = \frac{\psi_1}{\psi_2}, \quad (2.6)$$

$$\psi_1 = k^4 \int_{c_0-l_0}^{c_0+l_0} \left(1 - \frac{h}{H}\right) w_0(\xi)w(\xi)d\xi - \int_{c_0-l_0}^{c_0+l_0} \left(1 - \frac{h^3}{H^3}\right) w_0''(\xi)w''(\xi)d\xi,$$

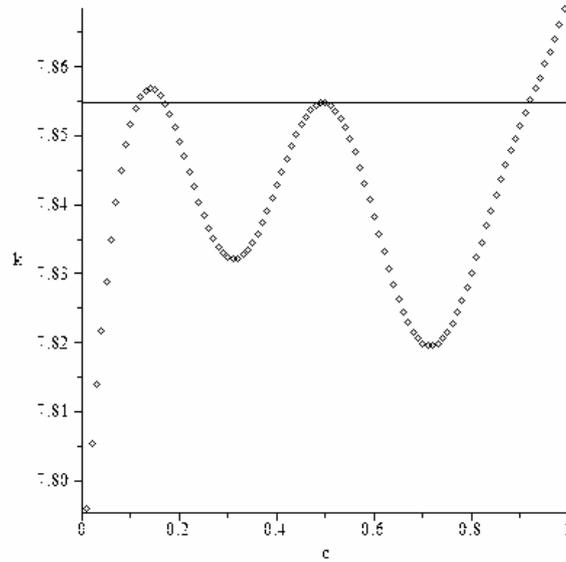


Рис. 3. Зависимость третьей резонансной частоты от выбора точки центра надреза

$$\psi_2 = \int_0^1 w(\xi)w_0(\xi)d\xi.$$

Упростим эту формулу, исключив неизвестную функцию $w(x)$ в предположении малости ширины надреза. Вводя параметр $\varepsilon = 1 - \frac{h}{H}$, представим $w(x)$ в виде разложения

$$w(x) = w_0(x) + \varepsilon w_1(x) + O(\varepsilon^2). \quad (2.7)$$

Полагая $w(x) \approx w_0(x)$ и учитывая условия сопряжения в месте надреза (1.2), имеем следующее приближенное соотношение для вторых производных в месте надреза: $I_1 w_0'' = I_* w'' \Rightarrow w'' = \frac{I_1}{I_*} w_0'' = \frac{1}{\gamma^3} w_0''$, где $\gamma = \frac{h}{H}$.

Таким образом, при малых l_0 справедливо следующая приближенная формула:

$$k^4 - k_0^4 = (1 - \gamma)2l_0 \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad (2.8)$$

$$\varphi_1 = k_0^4 w_0^2(c_0) - \frac{\gamma^2 + \gamma + 1}{\gamma^3} (w_0''(c_0))^2,$$

$$\varphi_2 = \int_0^1 w_0^2(\xi) d\xi.$$

По этой формуле можно подсчитать поправку к резонансной частоте, обусловленную наличием тонкого надреза. При этом поправка пропорциональна объему надреза.

На рис. 4 показана относительная погрешность нахождения резонансных частот по формуле (2.8) в сравнении с точными значениями резонансных частот, полученных при решении задачи о трехэлементной балке для параметров надреза $\frac{h}{H} = 0,8$, $2l_0 = 0,01$ и различных значений точки центра надреза. Точками на рисунке обозначена погрешность для первой резонансной частоты, звездочками — для второй, ромбиками — для третьей.

Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о достаточной точности приближенной формулы (2.8). Эта формула может быть положена в основу решения обратной задачи.

3. Обратная задача 1

Обратная задача 1 состоит в восстановлении центра, ширины и глубины надреза по известным значениям трех резонансных частот при использовании полученной формулы для поправки частот (2.8).

Введем следующие обозначения: $V = 2l_0(1 - \gamma)$ — объем дефекта,

$$r = \frac{1 + \gamma + \gamma^2}{\gamma^3}, \quad m_i = \int_0^1 w_0^2(k_{0i}, \xi) d\xi,$$

$$\delta_i = k_i - k_{0i}, \quad i = 1, \dots, 3,$$

где k_{0i} — резонансная частота неповрежденной балки, k_i — значение резонансной частоты балки с дефектом, полученное из задачи о

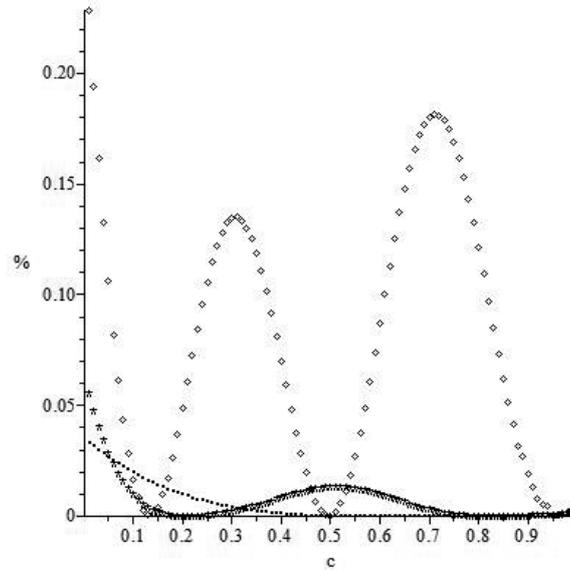


Рис. 4. Значения относительных погрешностей при вычислении резонансных частот по формуле (2.8)

трехэлементной балке. Таким образом, имеем нелинейную систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{V}{m_1}(k_{01}^4 w_0^2(k_{01}, c_0) - r(w_0''(k_{01}, c_0))^2); \\ \delta_2 = \frac{V}{m_2}(k_{02}^4 w_0^2(k_{02}, c_0) - r(w_0''(k_{02}, c_0))^2); \\ \delta_3 = \frac{V}{m_3}(k_{03}^4 w_0^2(k_{03}, c_0) - r(w_0''(k_{03}, c_0))^2), \end{cases} \quad (3.1)$$

Возможно упрощение этой системы с помощью исключения некоторых переменных. Исключая из системы (3.1) неизвестную r , получим

$$\begin{cases} \frac{\delta_1 m_1 - V k_{01}^4 w_0^2(k_{01}, c_0)}{\delta_2 m_2 - V k_{02}^4 w_0^2(k_{02}, c_0)} = \frac{w_0''(k_{01}, c_0)^2}{w_0''(k_{02}, c_0)^2}; \\ \frac{\delta_1 m_1 - V k_{01}^4 w_0^2(k_{01}, c_0)}{\delta_3 m_3 - V k_{03}^4 w_0^2(k_{03}, c_0)} = \frac{w_0''(k_{01}, c_0)^2}{w_0''(k_{03}, c_0)^2}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Далее в (3.2) избавимся от неизвестной величины V , разделив первое уравнение на вто-

рое. В итоге получена функция $P(c_0)$

$$\begin{aligned} P(c_0) = & (\delta_1 m_1 w_0''(k_{02}, c_0))^2 - \\ & - \delta_2 m_2 w_0''(k_{01}, c_0)^2 (k_{01}^4 w_0^2(k_{01}, c_0) w_0''(k_{03}, c_0))^2 - \\ & - k_{03}^4 w_0^2(k_{03}, c_0) w_0''(k_{01}, c_0)^2 - \\ & - (\delta_1 m_1 w_0''(k_{03}, c_0))^2 - \\ & - \delta_3 m_3 w_0''(k_{01}, c_0)^2 (k_{01}^4 w_0^2(k_{01}, c_0) w_0''(k_{02}, c_0))^2 - \\ & - (k_{02}^4 w_0^2(k_{02}, c_0) w_0''(k_{01}, c_0))^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для того чтобы найти центр надреза, нужно определить такие значения c_0 , при которых функция $P(c_0)$ равна нулю. Найдя значение координаты центра, можно затем вычислить значение объема, выразив из первого и второго уравнений в (3.1) величину V

$$V = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad (3.4)$$

$$\xi_1 = \delta_1 m_1 w_0''(k_{02}, c_0)^2 - \delta_2 m_2 w_0''(k_{01}, c_0)^2,$$

$$\xi_2 = k_{01}^4 w_0^2(k_{01}, c_0) w_0''(k_{02}, c_0)^2 - k_{02}^4 w_0^2(k_{02}, c_0) w_0''(k_{01}, c_0)^2.$$

Подставив полученное значение V в одно из уравнений, можно выразить r , затем получить значение глубины надреза γ , решив соответствующее кубическое уравнение, и по-

Таблица 1. Результаты восстановления параметров надреза по известным значениям резонансных частот балки с дефектом

c_0	Полученное c_0	Полученное $\frac{h}{H}$	Погрешность $\frac{h}{H}$, %	Полученное $2l_0$	Погрешность $2l_0$, %
0,1	0,1007	0,7113	11,09	0,0052	47,76
0,2	0,1995	0,8109	1,36	0,0107	6,53
0,3	0,3042	0,8597	7,47	0,0168	67,69
0,4	0,4007	0,8373	4,66	0,0136	35,96
0,5	0,4943	–	–	–	–
0,6	0,5991	0,8027	0,34	0,0099	0,31
0,7	0,6970	0,8165	2,06	0,0111	10,81
0,8	0,7983	0,8145	1,80	0,0109	8,93
0,9	0,9001	0,7958	0,52	0,0098	1,50

лучить значение ширины надреза l_0

$$r = \frac{k_{01}^4 w_0^2(k_{01}, c_0) - \frac{\delta_1 m_1}{V}}{(w_0''(k_{01}, c_0))^2}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\gamma^2 + \gamma + 1}{\gamma^3} = r, \quad l_0 = \frac{V}{2(1 - \gamma)}.$$

В табл. 1 приведены результаты восстановления параметров дефекта при значениях $\frac{h}{H} = 0,8$, $2l_0 = 0,01$ при различных значениях c_0 .

Заметим, что в точке $c_0 = 0,5$ удалось восстановить только значение координаты центра надреза. Это происходит в силу того, что некоторые из собственных форм или их вторые производные в этой точке обращаются в ноль.

4. Обратная задача 2

Обратная задача 2 состоит в восстановлении центра, ширины и глубины надреза по трем известным значениям амплитудно-частотной характеристики. Аналогично подходу, описанному в пункте 3, получим формулу для вычисления амплитудно-частотных характеристик. Рассмотрим уравнения колебаний неповрежденной балки и балки с тонким надрезом при одинаковых значениях безразмерной частоты колебаний k :

$$1) w_0^{IV}(x) - k^4 w_0(x) = 0 \quad (4.1)$$

— уравнение колебаний неповрежденной балки, граничные условия имеют вид $w_0(0) = w_0'(0) = 0$, $w_0''(1) = w_0'''(1) = p_0$;

$$2) (g(x)w''(x))'' - k^4 f(x)w(x) = 0 \quad (4.2)$$

— уравнение колебаний балки с тонким надрезом, граничные условия имеют вид $w_0(0) = w_0'(0) = 0$, $w_0''(1) = w_0'''(1) = p_0$, функции $g(x)$ и $f(x)$ аналогичны функциям, описанным в (2.3).

Рассмотрим амплитудно-частотные характеристики функций $w_0(x)$ и $w(x)$

$$F_0(k) = p_0 w_0(1, k), \quad F(k) = p_0 w(1, k). \quad (4.3)$$

Выполним преобразования, аналогичные описанным в (2.4)–(2.6). Домножим уравнение (4.1) на $w(x)$, а (4.2) — на $w_0(x)$, вычтем из первого соотношения второе и проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$,

$$\int_0^1 (w_0^{IV}(\xi)w(\xi) - (g(\xi)w''(\xi))''w_0(\xi) - k^4 w_0(\xi)w(\xi) + k^4 f(\xi)w(\xi)w_0(\xi))d\xi = 0. \quad (4.4)$$

Интегрируя первые два слагаемых в (4.4) по частям, получаем

$$(w_0'''(\xi)w(\xi) - w_0''(\xi)w'(\xi) - (g(\xi)w''(\xi))'w_0(\xi) + g(\xi)w''(\xi)w_0'(\xi))\Big|_0^1 + \int_0^1 ((1 - g(\xi))w_0''(\xi)w''(\xi) + w(\xi)w_0(\xi)(k^4 f(\xi) - k_0^4))d\xi = 0. \quad (4.5)$$

Используя граничные условия и учитывая обозначения (4.3), получим точную формулу, связывающую значения амплитудно-частотной характеристики неповрежденной

балки и балки с тонким надрезом

$$\begin{aligned} p_0^2(F_0(k) - F(k)) &= \\ &= -k^4 \int_{c_0-l_0}^{c_0+l_0} \left(1 - \frac{h}{H}\right) w_0(\xi)w(\xi)d\xi - \\ &\quad - \int_{c_0-l_0}^{c_0+l_0} \left(1 - \frac{h^3}{H^3}\right) w_0''(\xi)w''(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Полагая в (4.6)

$$w(x) \approx w_0(x), \quad w''(x) = \frac{1}{\gamma^3}w_0''(x),$$

при малых l_0 имеем приближенную формулу

$$\begin{aligned} p_0^2(F_0(k) - F(k)) &= 2l_0(1 - \gamma) \left(-k^4w_0^2(c_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \gamma + \gamma^2}{\gamma^3}(w_0''(c_0)^2) \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для реконструкции параметров надреза рассмотрим три уравнения, соответствующие различным значениям безразмерной частоты k :

$$\begin{cases} \delta_1 = V(-k_1^4w_1^2(c_0) + r(w_1''(c_0))^2), \\ \delta_2 = V(-k_2^4w_2^2(c_0) + r(w_2''(c_0))^2), \\ \delta_3 = V(-k_3^4w_3^2(c_0) + r(w_3''(c_0))^2), \end{cases} \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_i &= p_0^2(F_0(k_i) - F(k_i)), \quad w_i(x) = w_0(k_i, x), \\ &\quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Выполняя преобразования, аналогичные описанным при построении формул (3.1)–(3.3), получим уравнение для нахождения координаты центра надреза

$$\begin{aligned} P(c_0) &= (\delta_1w_2''(c_0))^2 - \\ &\quad - \delta_2w_1''(c_0)^2(k_3^4w_3^2(c_0)w_1''(c_0))^2 - \\ &\quad - k_1^4w_1^2(c_0)w_3''(c_0)^2 - (\delta_1w_3''(c_0))^2 - \\ &\quad - \delta_3w_1''(c_0)^2(k_2^4w_2^2(c_0)w_1''(c_0))^2 - \\ &\quad - k_1^4w_1^2(c_0)w_2''(c_0)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Найдя значение c_0 из (4.9), получим величины V и Vr . Для этого решим систему алгебраических линейных уравнений, составленную из первых двух уравнений (4.8), учитывая найденное значение c_0 . Наконец, получим значения глубины и ширины надреза в соответствии с (3.5).

Отметим, что для качественного восстановления характеристик надреза необходимо определенным образом выбирать значения безразмерной частоты. На основе ряда вычислительных экспериментов выяснено, что для получения наиболее точных результатов нужно выбирать значения k , лежащие в различных промежутках между резонансными частотами, причем нежелательно выбирать значения k меньше спектрального значения, соответствующего первой резонансной частоте.

В табл. 2 приведены результаты восстановления параметров дефекта при значениях $k_1 = 3$, $k_2 = 6$, $k_3 = 10$, $\frac{h}{H} = 0,8$, $2l_0 = 0,01$ при различных значениях c_0 .

Выводы

В настоящей работе исследованы поперечные колебания балок с дефектом в виде симметричного пропила. Предложен метод нахождения смещения балки с таким дефектом, исследованы резонансные частоты поврежденных балок. Предложены два метода определения характеристик надреза, получены соответствующие формулы, проведены вычислительные эксперименты, которые продемонстрировали достаточную точность данных формул. Результаты вычислительных экспериментов показали, хуже всего восстанавливаются параметры надреза, когда сам надрез находится близко к заделке.

Литература

1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
2. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. №9. С. 44–56.
3. Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 3. С. 37–42.
4. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 6. С. 1015–1020.
5. Ахтямов А.М., Каримов А.Р. Диагностирование местоположения трещины в стержне по собственным частотам продольных колебаний

Таблица 2. Результаты восстановления параметров надреза по известным значениям амплитудно-частотной характеристики балки с дефектом

c_0	Полученное c_0	Полученное $\frac{h}{H}$	Погрешность $\frac{h}{H}$, %	Полученное $2l_0$	Погрешность $2l_0$, %
0,1	0,1005	0,7879	1,51	0,0089	11,21
0,2	0,2001	0,8113	1,41	0,0107	7,02
0,3	0,2998	0,7549	5,64	0,0066	34,28
0,4	0,4004	0,8092	1,14	0,0104	4,39
0,5	0,5017	0,8093	1,16	0,0105	5,18
0,6	0,5991	0,8086	1,07	0,0102	2,15
0,7	0,6998	0,8015	0,19	0,0103	3,53
0,8	0,8026	0,8055	0,68	0,0101	0,84
0,9	0,9027	0,7919	1,01	0,0096	3,82

// Техническая акустика. 2010. Т. 10. № 3. [URL] <http://ejta.org>.

6. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83–89.
7. Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги. Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5. Уфа: Гилем, 2007, С. 201–211.
8. Осипов А.В. Об одной модели балки с тонким разрезом // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XV международной конференции. Т. 2 Издательство ЮФУ. 2011. С. 190–193.
9. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение. 1970. 736 с.

Ключевые слова: балка, надрез, колебания, идентификация.

Статья поступила 5 марта 2013 г.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону

© Ватульян А. О., Осипов А. В., 2013