УДК 517.442;517.956.2

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ЧЕРЕЗ ГАРМОНИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ И ИХ ОБРАЩЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ[1]

Гордеев Ю. Н.[2]*, Простокишин В. М.*[3]*, Сандаков Е. Б.*[4]

THE HELMHOLTZ EQUATION SOLUTION REPRESENTATIONS USING HARMONIC FUNCTION AND THEIR INVERTED TRANSFORMATIONS IN POLAR COORDINATES

Gordeev Yu. N., Prostokishin V. M., Sandakov E. B.

The boundary and mixed boundary value problems for the Helmholtz equation are considered. It is shown that the new integral representations of Helmholtz equation solutions allow us to reduce the problem to the corresponding boundary value problems for harmonic functions in polar coordinates.

Keywords: Helmholtz equation, boundary and mixed value problem, harmonic function, integral transforms.

Известно [1], что существует бесконечно много операторов, которые преобразуют аналитические функции в решения линейных уравнений в частных производных. В этой работе для решений линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка двух переменных был дан ряд представлений через гармоническую функцию. Однако,в целом они оказались достаточно сложными и трудно используемыми в приложениях. Тем не менее некоторые такие представления позволяют существенно упростить задачу. Более простой способ, использующий теорию функций Римана, получения таких представлений для эллиптических уравнений был дан в [2]. В частном случае — уравнения Гельмгольца, интегральная связь между его решением и гармонической функцией была найдена в [3] и затем в [4] применена в решении задачи механики жидкости. Близкие представления для уравнения Гельмгольца были получены в работах [5, 6]. Например, полученное Галиным представление [6] было использовано им в теории построения сверхзвукового крыла.

В данной работе найдены новые интегральные представления решения уравнений Гельмгольца через гармонические функции и показано, что полученные представления позволяют свести решения краевых и смешанных краевых задач для уравнения Гельмгольца к соответствующим краевым задачам для гармонических функций в полярных координатах.

Уравнение Гельмгольца в полярных координатах

$$r^{-1}\partial_r(r\partial_r u) + r^{-2}\partial^2_{\theta\theta}u = \pm\gamma^2 u \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$\left\{\begin{array}{rcll} u(r,\pm\theta_0) & = & f(r,\pm\theta_0), & r\in[0;b], \\ \partial_\theta u(r,\pm\theta_0) & = & 0, & r\in(b;\infty), \\ u(r,\theta) & \to & 0, & r\to\infty \end{array}\right. \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009–2013 гг. (г/к П1109).

[2]Гордеев Юрий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, професор кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт»; e-mail: YuGordeev@yandex.ru.

[3]Простокишин Валерий Михайлович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт»; e-mail: V.M.Prost@gmail.com.

[4]Сандаков Евгений Борисович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт»; e-mail: sandakovanton@mail.ru.

не сводится к аналогичной краевой задаче для гармонической функции. Однако, используя представления решения уравнения Гельмгольца через гармоническую функцию и его обращение можно найти соответствующие краевые условия для гармонической функции и, используя их, решить для гармонической функции краевую задачу с условиями

$$\begin{cases} \varphi(r,\pm\theta_0) &= f(r,\pm\theta_0), \quad r\in[0;b], \\ \partial_\theta\varphi(r,\pm\theta_0) &= 0, \qquad r\in(b;\infty), \\ \varphi(r,\theta) &\to 0, \qquad r\to\infty, \end{cases} \tag{3}$$

а затем по представлению найти решение исходной краевой задачи (1)–(2). Отметим, что эта краевая задача приводит к задаче на угле раствора $2\theta_0$.

Решение краевой задачи для гармонических функций с условиями (3) известно [7], а решение краевой задачи (1)-(2) может быть восстановлено по найденным ниже интегральным представлениям.

Уравнение (1) после замены переменной $r\to r|\gamma|^{-1}$ имеет вид

$$r^{-1}\partial_r(r\partial_r u)+r^{-2}\partial^2_{\theta\theta}u+\epsilon u=0. \tag{4}$$

Уравнения (4) при ϵ=1 встречаются в задачах распространения радио-волн или их дифракции, при $\epsilon=-1$ — при рассмотрении, например, течения жидкости в окрестности щели или угла в проницаемой среде [8].

Для удобства в дальнейшем введем обозначения

$$C_{+1}(z)=J_0(z),\quad C_{-1}(z)=I_0(z),$$

$$C'_{+1}(z)=-J_1(z),\quad C'_{-1}(z)=I_1(z),$$

где $J_0(z)$, $J_1(z)$, $I_0(z)$, $I_1(z)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка, действительного и мнимого аргументов, соответственно.

Применим теперь преобразование Лапласа–Карсона к уравнению (4) по вспомогательной переменной $y=r\theta$, и от функции $u(r,\theta)$ перейдём к функцииu $\tilde u(r,y)$, (однако знак тильды будем опускать) и в конце выкладок снова вернемся к исходной гармонической функции

$$\bar u(r,p)=p\int\limits_0^\infty e^{-pt}u(r,t)\,dt,$$

получим

$$r^{-1}\partial_r(r\partial_r\bar u)+(p^2+\epsilon)\bar u=0. \tag{5}$$

Для уравнения (5) найдем одно из частных решений

$$\bar u(r,p)=A(p)J_0(r\sqrt{p^2+\epsilon}). \tag{6}$$

Тогда решением уравнения (4) будет

$$u(r,w)= \\ =\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}e^{pw}\frac{A(p)J_0(r\sqrt{p^2+\epsilon})}{p}\,dp. \tag{7}$$

Используя теорему Эфроса, можно получить [9] представление

$$\psi(r,w)+\int\limits_0^r\psi(\sqrt{r^2-\tau^2},w)C'_\epsilon(\tau)\,d\tau\div \\ \div\frac{p}{\sqrt{p^2+\epsilon}}F(\sqrt{p^2+\epsilon},w) \tag{8}$$

или

$$\psi(r,w)+\int\limits_0^r\frac{\partial}{\partial\tau}C_\epsilon(\sqrt{r^2-\tau^2})\psi(\tau,w)\,d\tau\div \\ \div\frac{p}{\sqrt{p^2+\epsilon}}F(\sqrt{p^2+\epsilon},w), \tag{9}$$

где $\psi(r,w)\div F(p,w)$. Отметим, что в (9) под интегралом при $w=y$ стоит функция $\psi(\tau,\tau\varphi)$. Аналогично и далее в тексте.

Возьмем $\psi(r,w)=\psi(r)=J_0(sr)$, тогда

$$F(p)=\frac{p}{\sqrt{p^2+s^2}}. \tag{10}$$

Из (9) с учетом (10) следует

$$J_0(sr)+\int\limits_0^r\frac{\partial}{\partial\tau}C_\epsilon(\sqrt{r^2-\tau^2})J_0(s\tau)\,d\tau\div \\ \div\frac{p}{\sqrt{p^2+\epsilon}}F(\sqrt{p^2+\epsilon})=\frac{p}{\sqrt{p^2+(\sqrt{s^2+\epsilon})^2}},$$

т.е.

$$J_0(r\sqrt{s^2+\epsilon})=J_0(sr)+ \\ +\int\limits_0^r J_0(s\tau)\,\frac{\partial}{\partial\tau}C_\epsilon(\sqrt{r^2-\tau^2})\,d\tau. \tag{11}$$

Учитывая значение интеграла (11), из (7) получим

$$u(r,w)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{pw}\frac{A(p)J_0(pr)}{p}\,dp+$$
$$+\int\limits_0^r \frac{\partial}{\partial\tau}C_\epsilon(\sqrt{r^2-\tau^2})\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{pw}\frac{A(p)J_0(p\tau)}{p}\,dp\right)d\tau, \quad (12)$$

где

$$\varphi(r,w)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{pw}\frac{A(p)J_0(pr)}{p}\,dp$$

есть решение уравнения Лапласа, т.е. гармоническая функция.

Таким образом, возвращаясь к исходной гармонической функции $u(r,\theta)$ в случае $w=y=r\theta$, $\tilde{u}(r,y)=u(r,\theta)$, получим представление решений уравнений (12), (13) через гармоническую функцию.

$$u(r,\theta)=\varphi(r,\theta)+$$
$$+\int\limits_0^r C'_\epsilon(\tau)\varphi(\sqrt{r^2-\tau^2},\theta)\,d\tau \quad (13)$$

$$u(r,\theta)=\varphi(r,\theta)+\int\limits_0^r \frac{\partial}{\partial\tau}C_\epsilon(\sqrt{r^2-\tau^2})\varphi(\tau,\theta)\,d\tau,$$

$$u(r,\theta)=\varphi(r,\theta)-$$
$$-\int\limits_0^r \frac{\tau\partial}{r\partial r}C_\epsilon(\sqrt{r^2-\tau^2})\,\varphi(\tau,\theta)\,d\tau, \quad (14)$$

Пусть $w=\theta$, т.е. (13), (14) — представление решения уравнения (4). Перепишем выражение (14) при двух значениях $\theta=\pm 0$, тогда после их сложения и простых преобразований получим соотношение

$$u(r,\pi)+u(r,-\pi)=\varphi(r,\pi)+\varphi(r,-\pi)+$$
$$+\int\limits_0^r \frac{\partial}{\partial\tau}C_\epsilon(\sqrt{r^2-\tau^2})(\varphi(\tau,\pi)+\varphi(\tau,-\pi))\,d\tau,$$

Следовательно, функции, заданные при $\theta=\pm 0$, должны быть равны, т.е. они четные и, с учетом структуры второго слагаемого правой части (14), следует, что краевые условия (2) для уравнения (1) переходят в аналогичные краевые условия (3) для гармонической функции.

Найдем обращение уравнения (14).

Пусть $\varphi(r,\theta)r\div F(p,\theta)$, и $u(r,\theta)r\div F_1(p,\theta)$, тогда применяя к уравнению (14) интегральное преобразование Лапласа-Карсона [10], получим

$$\frac{F_1(p,\theta)}{p}=\frac{p}{p^2+\epsilon}\,F(\sqrt{p^2+\epsilon},\theta). \quad (15)$$

Из (15) найдем

$$F(t,\theta)=\frac{t^2}{t^2-\epsilon}\,F_1(\sqrt{t^2-\epsilon},\theta). \quad (16)$$

После обращения выражения (16) получаем [10]

$$\varphi(r,\theta)=u(r,\theta)+$$
$$+\int\limits_0^r \frac{\tau}{r}\frac{\partial}{\partial r}C_{-\epsilon}(\sqrt{r^2-\tau^2})\,u(\tau,\theta)\,d\tau,$$

или

$$\varphi(r,\theta)=u(r,\theta)-$$
$$-\epsilon\int\limits_0^r \frac{\partial}{\partial\tau}C_{-\epsilon}(\sqrt{r^2-\tau^2})\,u(\tau,\theta)\,d\tau. \quad (17)$$

Таким образом, в работе продемонстрировано сведение краевых и смешанно краевых задач для уравнений Гельмгольца к решению соответствующих задач для уравнения Лапласа, решения которых достаточно хорошо изучено. Затем по полученным формулам восстанавливаются решения исходной задачи. Возможно проведение и обратной операции.

Литература

1. *Бергман С.* Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. М.: Мир, 1964. 304 с.
2. *Векуа И.Н.* О комплексном представлении общего решения уравнений плоской задачи стационарного колебания теории упругости // Докл. АН СССР. 1937. Т. 16. С. 155–160.
3. *Carleman T.* Sur quelques problems dans la theorie mathematique de la diffraction des ondes electromagnetiques // Arkiv f. M.A.n.F. 22B. 1930. T. 10. P. 1–2.

4. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука. 1981. 148 с.
5. *Магнарадзе А. Г.* Об общем представлении регулярных решений некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных с мнимыми характеристиками // Сообщения АН ГССР. 1944. Т. 5. С. 368–372.
6. *Галин Л. А.* Крыло прямоугольной формы в плане в сверхзвуковом потоке // ПММ. Т. 11. 1947. С. 465–474.
7. *Александров А. Я., Соловьев Ю. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука. 1978. 464 с.
8. *Гордеев Ю. Н., Ентов В. М.* О распределении давления в окрестности растущей трещины // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 1060–1064.
9. *Эфрос А. М., Данилевский А. М.* Операционнное исчисление и контурные интегралы. Харьков: ОНТИ, 1937. 384 с.
10. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные представления, операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 544 с.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, краевая и смешанная задача, гармоническая функция, интегральные преобразования.

Статья поступила 4 декабря 2012 г.
Национальный исследовательский ядерный университет «Московский инженерно-физический институт», г. Москва
© Гордеев Ю. Н., Простокишин В. М., Сандаков Е. Б., 2013