УДК 519.22:336.144.36

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ КРИЗИСОВ С ПОМОЩЬЮ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ[1]

Кармазин В. Н.[2]***, Кириллов К. В.***[3]

FORECASTING OF FINANCIAL CRISES WITH THE HELP OF TIME SERIES

Karmazin V.N., Kirillov K.V.

The authors analyze the results of the time series models application based on the distributions with "heavy tails" for forecasting financial crises in the market. It was shown by means of the actual data of stock exchange quotations that the use of such models leads to the improved evaluation of the fund market risk during financial crises as compared to the commonly used models. The disadvantages of classic time series models are discussed in this article on the basis of the numerical results obtained.

Keywords: ARMA-GARCH model, Value-at-Risk (VaR), Average Value-at-Risk (AVaR), time series, distribution with "heavy tails".

Введение

Важным аспектом управления рисками и портфелем ассигнований является прогнозирование поведения цен на акции. Так, Бюссе [1], анализируя доходы американских инвестиционных фондов, делает вывод о том, что способность последних управлять портфелем таким образом, чтобы в периоды высокой изменчивости цен акций снижать долю наиболее волатильных активов в портфеле, является основной характеристикой, отличающей успешные фонды. Анализ изменения цен на акции связан с построением подходящей модели, правильный выбор которой является непростым делом. Эконометрика предлагает большой набор разнообразных моделей временных рядов. ARMA-модели предполагают, что временные ряды стационарны. Однако ряды, описывающие финансовые индексы, редко обладают этим свойством. Мандельброт [2] отмечал, что «большие изменения цен активов влекут за собой большие изменения как в сторону возрастания, так и убывания, в то время как малые изменения влекут малые изменения. В частности, финансовые переменные имеют спокойные периоды, за которыми следуют периоды сравнительной нестабильности, т.е. нестабильность является не постоянной, а изменяющейся во времени». Таким образом, наблюдаются продолжительные периоды высокой и низкой волатильности. При построении моделей ценовой динамики их авторы стремились корректно воспроизвести эмпирические свойства наблюдаемых финансовых временных рядов и, прежде всего, феномена кластеризации волатильности. Простейшая модель условной гетероскедастичности (ARCH, от англ. autoregressive conditional heteroscedasticity) была предложена Энгелем в 1982 г. для моделирования инфляции в Великобритании [3]. Эта модель позднее использовалась и для моделирования цен акций и обменных курсов [4]. Естественным продолжением ARCH является обобщенная авторегрессионная условная гетероскедастичность (GARCH, от англ. generalized autoregressive conditional heteroscedasticity), предложенная Боллерслевом в 1986 г. и до сегодняшнего дня активно используемая для прогнозов волатильности [5]. Боллерслев предложил бо-

[1]Работа выполнена при поддержке стипендии Президента России.

[2]Кармазин Владимир Николаевич, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: karmazin@kubsu.ru.

[3]Кириллов Кирилл Валерьевич, аспирант кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: k.kirillov@mail.ru.

лее общую спецификацию модели для уравнения условной дисперсии ошибок.

Несоответствие между эмпирическими свойствами цен акций и свойствами используемых в финансовой экономике моделей существенно снижает эффективность их практического применения в управлении инвестиционным портфелем и прогнозировании финансовых кризисов. Одна из причин низкой производительности связана с предположением о том, что временные ряды модели GARCH распределены нормально. Управление активами в модели ценообразования требует надлежащего моделирования распределения изменений курса финансовых активов. Многочисленные исследования, рассматривавшиеся поведение эмпирической доходности активов на финансовых рынках во всем мире, отклоняют гипотезу, что распределение изменений курса активов, как правило, является нормальным. Изменение курса финансовых активов в высоковолатильные периоды характеризуется асимметрией и остроконечностью, которые не могут быть охвачены предположением нормального распределения. К широко используемым моделям, альтернативным нормальной модели временных рядов, относятся модели временных рядов с распределением Стьюдента, однако распределение Стьюдента также не всегда может описать свойства колебаний цен.

Модели GARCH, характеризующиеся с распределениями с «тяжелыми хвостами», были предложены, например, в [6, 7, 9]. Ким и Рачев разработали новый класс распределений, гораздо лучше описывающие свойства динамики цен.

В данной работе с учетом различных моделей временных рядов, основанных на 10-летней базе ежедневных наблюдений, показана неэффективность нормального распределения и распределения Стьюдента для прогнозирования скачков биржевых котировок в кризисные периоды и показаны преимущества распределений с «тяжелыми хвостами». Проведенные исследования направлены на то, чтобы обеспечить участников рынка более надежными математическими и статистическими инструментами для проведения эффективного финансового анализа.

1. Модели для описания изменения цены акций

Для того чтобы сравнить эффективность работы различных моделей для прогнозирования изменений биржевых котировок, обсудить их преимущества и недостатки в настоящей работе рассматривались три различные модели:

1. Модель с постоянной волатильностью рынка (CV-constant volatility model) описывается системой

$$\begin{cases} y_t = \sigma_t \varepsilon_t + c, \\ \sigma_t^2 = \alpha_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $(y_t)_{t \geqslant 0}$ — величина, описывающая дневное изменение цены на акцию. Эта величина определяется определяется следующим образом:

$$y_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}},$$

$(S_t)_{t \geqslant 0}$ — цена акции в момент времени t; $\varepsilon_0 = 0$ и $(\varepsilon_t)_{t \in \mathrm{N}}$ последовательность независимых и одинаково распределенных действительных случайных величин; σ_t — стандартное отклонение, α_o; c — параметры модели, подбираемые исходя из имеющихся наблюдений за некоторый временной период. В CV-модели условная дисперсия постоянна, то есть $\sigma_t = \sqrt{\alpha_0}$ для всех $t \geqslant 0$.

2. GARCH(1,1) модель описывается системой

$$\begin{cases} y_t = \sigma_t \varepsilon_t + c, \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \end{cases} \tag{1.2}$$

с параметрами α_o, α_1, β_1, c.

3. ARMA(1,1)–GARCH(1,1) модель имеет вид

$$\begin{cases} y_t = a y_{t-1} + b \sigma_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t + c, \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь α, α_o, α_1, β_1, b, c — параметры модели.

Заметим, что подставляя $a = 0$ и $b = 0$, $\alpha_1 = 0$, и $\beta_1 = 0$ в (1.3), получим модель с постоянной волатильностью рынка (1.1). Подставляя $a = 0$ и $b = 0$ в (1.3), получим GARCH(1,1) модель (1.2).

Обычно принимается, что случайные величины ε_t распределены по нормальному закону или по t-закону (распределению Стьюдента). Так как безусловное вероятностное распределение дневных изменений биржевых котировок характеризуется «тяжёлыми хвостами», т.е. высокой вероятностью появление экстремальных значений, наряду с этими двумя традиционно использующимися видами распределений для нормированных остатков, рассмотрим еще три модели сравнительно недавно [6, 7, 9] предложенных за-

Таблица 1

Распределение X	$c_n(X)$ для $n = 2, 3\cdots$
CTS	$C\Gamma(n-\alpha)((\lambda_+^{\alpha-n} + (-1)^n\lambda_-^{\alpha-n})$
MTS	$2^{n-\frac{\alpha+3}{2}}C\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)(\lambda_+^{\alpha-n} + (-1)^n\lambda_-^{\alpha-n})$
RDTS	$2^{\frac{n-\alpha-2}{2}}C\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)(\lambda_+^{\alpha-n} + (-1)^n\lambda_-^{\alpha-n})$

конов распределения с «тяжёлыми хвостами». Эти распределения в англоязычной литературе носят названия: classical tempered stable (CTS), modified tempered stable (MTS) и rapidly decreasing tempered stable (RDTS) distributions. Они задаются характеристическими функциями. Для их описания введем следующие величины: $\alpha \in (0,2)\,/\,\{1\}$, C, λ_+, $\lambda_- > 0$, и $m \in R$.

1. Случайная величина X называется CTS-распределенной, если характеристическая функция X имеет вид

$$\varphi_X(u) = \varphi_{CTS}(u;\alpha,C,\lambda_+,\lambda_-,m) = \\ = \exp(ium - iuC\Gamma(1-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1}) + \\ + C\Gamma(-\alpha)((\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_+^\alpha + (\lambda_- + iu)^\alpha - \lambda_-^\alpha)).$$

Соответствие указанному закону распределения будем обозначать

$$X \sim CTS(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, m).$$

2. Случайная величина X называется MTS-распределенной, если характеристическая функция X имеет вид

$$\varphi_X(u) = \varphi_{MTS}(u;\alpha,C,\lambda_+,\lambda_-,m) = \\ = \exp(ium + C(G_R(u;\alpha,\lambda_+) + G_R(u;\alpha,\lambda_-)) + \\ + iuC(G_I(u;\alpha,\lambda_+) + G_I(u;\alpha,\lambda_-))),$$

где

$$u \in R,$$

$$G_R(x;\alpha,\lambda) = \\ = 2^{-\frac{\alpha+3}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)((\lambda^2 + x^2)^{\frac{\alpha}{2}} - \lambda^\alpha),$$

$$G_I(x;\alpha,\lambda) = 2^{-\frac{\alpha+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \times \\ \times \lambda^{\alpha-1}\left[{}_2F_1\left(1, \frac{1-\alpha}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{\lambda^2}\right) - 1\right],$$

${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция.

Для MTS-распределенной величины X введем обозначение

$$X \sim MTS(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, m).$$

3. Случайная величина X называется RDTS-распределенной, если характеристическая функция X имеет вид

$$\varphi_X(u) = \varphi_{RDTS}(u;\alpha,C,\lambda_+,\lambda_-,m) = \\ = \exp(ium + C(G(iu;\alpha,\lambda_+) + G(-iu;\alpha,\lambda_-))),$$

где

$$G(x;\alpha,\lambda) = 2^{-\frac{\alpha}{2}-1}\lambda^\alpha\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \times \\ \times \left(M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2\lambda^2}\right) - 1\right) + \\ + 2^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\lambda^{\alpha-1}x\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \times \\ \times \left(M\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2\lambda^2}\right) - 1\right),$$

и M вырожденная гипергеометрическая функция.

В этом случае запишем

$$X \sim RDTS(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, m).$$

Кумулянты X определяются следующей формулой

$$c_n(X) = \frac{\partial^n}{\partial u^n}\log E\left[e^{iuX}\right]|_{u=0}, \quad n = 1, 2, 3\cdots.$$

Для трёх рассмотренных распределений $E[X] = c_1(X) = m$. Кумулянты распределений представлены в табл. 1.

Подставляя соответствующие значения для параметров m и C в характеристические функции рассмотренных распределений, получим вид характеристических функций с нулевым средним значением и единичной дисперсией:

1. Случайная величина

$$X \sim CTS(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, 0)$$

имеет нулевое среднее и единичную дисперсию, если параметр C выбрать следующим образом

$$C = (\Gamma(2-\alpha)((\lambda_{+}^{\alpha-2} + \lambda_{-}^{\alpha-2}))^{-1}.$$

Распределение X с выбранными таким образом m и C называется нормированным CTS-распределением с параметрами α, λ_{+}, λ_{-} и обозначается

$$X \sim stdCTS(\alpha, \lambda_{+}, \lambda_{-}).$$

2. Случайная величина

$$X \sim MTS(\alpha, C, \lambda_{+}, \lambda_{-}, 0)$$

имеет нулевое среднее значение и единичную дисперсию, если

$$C = 2^{\frac{\alpha+1}{2}}(\sqrt{\pi}\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)((\lambda_{+}^{\alpha-2} + \lambda_{-}^{\alpha-2}))^{-1}.$$

Распределение X называется в этом случае нормированным MTS-распределением и обозначается

$$X \sim stdMTS(\alpha, \lambda_{+}, \lambda_{-}).$$

3. Случайная величина

$$X \sim RDTS(\alpha, C, \lambda_{+}, \lambda_{-}, 0)$$

имеет нулевое среднее и единичную дисперсию для

$$C = 2^{\frac{\alpha}{2}}(\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})(\lambda_{+}^{\alpha-2} + \lambda_{-}^{\alpha-2}))^{-1}.$$

В этом случае распределение X называется нормированным RDTS-распределением и обозначается как

$$X \sim stdRDTS(\alpha, \lambda_{+}, \lambda_{-}).$$

Если случайные величины ε_t распределены по нормальному закону, CV и GARCH(1,1), модели называют нормальной CV моделью и нормальной GARCH моделью, соответственно. Если ошибки распределены по t-закону, модели называют t-CV моделью и t-GARCH моделью. Если ошибки распределены по одному их трёх законов распределения с «тяжёлыми хвостами», например, CTS, CV и GARCH(1,1) модели будем именовать как CTS-CV модель и CTS-GARCH модель.

2. Оценка параметров моделей

В этом разделе описаны способы вычисления параметров для моделей CV, GARCH(1,1) и ARMA(1,1)-GARCH(1,1). Расчеты были проведены для американской биржи S & P 500 и двух крупнейших российских бирж ММВБ и РТС.

Последние обвалы рынка наблюдались 19 октября 1987 г. (черный понедельник), 27 октября 1997 г. (азиатские потрясения), 31 августа 1998 (русский дефолт), 14 апреля 2000 г. (коллапс интернет акций) и 29 сентября 2008 г. (финансовый кризис в США). С целью изучения прогнозирующей способности каждой модели, необходимо вычислить ее параметры на основе наблюдений за изменением биржевых котировок за продолжительный период. В связи с тем, что данные торгов на российских биржах существуют с 1997 г., проведение расчетов параметров является целесообразным только для последнего из наблюдаемых обвалов рынка в 2008 г.

Параметры CV, GARCH(1,1) и ARMA(1,1)–GARCH(1,1) моделей рассчитывались на основе ежедневных изменений курса за последние 10 лет. Ежедневные изменения определялись по цене закрытия. Параметры моделей с нормальным и t-распределением оцениваются с помощью метода максимального правдоподобия. В остальных случаях, параметры оценивались следующим образом: на первом шаге вычислялись параметры α_0, α_1, β_1, a, b, c для моделей с нормированными остатками, распределёнными по t-закону, с помощью метода максимального правдоподобия, на втором шаге, используя вычисленные параметры, определялся временной ряд y_t. Далее на основе полученных значений ε_t подбирались параметры распределений α, λ_{+}, λ_{-} для CTS, MTS и RDTS-распределений с использованием метода максимального правдоподобия.

В табл. 2, 3, 4 приводятся результаты вычислений для бирж S&P 500, ММВБ и РТС. Количество используемых наблюдений за 10 лет для бирж S&P 500 составляет 2505, ММВБ и РТС — 2478 так как в выходные дни и праздники торги не проводятся. Эти таблицы содержат вычисленные параметры для CV, GARCH(1,1) и ARMA(1,1)–GARCH(1,1) моделей временных рядов, распределённых по нормальному и t-закону, а также параметры для нормированных CTS, MTS и RDTS распределений. Для оценки достоверности вычис-

Таблица 2. Анализ американского кризиса: 29 сентября (понедельник) 2008 г. индекс S&P 500 упал на 9%. Использовались наблюдения котировок за 2505 дней, последний день наблюдений 26 сентября (пятница) 2008 г.

Модель	распределение	α_0	α_1	β_1	a	b	c	КС	(p-уровни)	АД	разница курса	вероятность кризиса	среднее время
CV	Норм.	1,3345E−04					1,9438E−04	0,0552	0,0000	0,8744	−7,64	1,08E−14	3,696E+11
	t ($d=$ 4,196)	1,4229E−04					2,7736E−04	0,0810	0,0000	0,1900	−7,41	7,33E−04	5,455
	CTS	$\alpha = 0,0100$	$\lambda_+ = =1{,}6288$	$\lambda_- = =1{,}5046$				0,0154	0,5873	0,0458	−7,41	8,45E−06	473,123
	MTS	$\alpha = 1,0100$	$\lambda_+ = =0{,}9544$	$\lambda_- = =0{,}8746$				0,0158	0,5510	0,0489	−7,41	5,02E−05	79,751
	RDTS	$\alpha = 1,0100$	$\lambda_+ = = 0{,}5526$	$\lambda_- = =0{,}5525$				0,0404	0,0005	0,2538	−7,41	7,97E−06	502,273
GARCH	Норм.	0,000001	0,062372	0,932507			4,3339E−04	0,0366	0,0024	101,3442	−3,80	7,12E−05	56,160
	t($d=$ 9,5433)	0,000000	0,062855	0,936464			5,1223E−04	0,0461	0,0000	0,1059	−3,74	2,10E−03	1,909
	CTS	$\alpha = =0{,}010000$	$\lambda_+ = =2{,}664644$	$\lambda_- = =2{,}317331$				0,0254	0,0770	0,3270	−3,74	1,24E−03	3,231
	MTS	$\alpha = =1{,}010000$	$\lambda_+ = =2{,}065536$	$\lambda_- = =1{,}603247$				0,0298	0,0231	0,7138	−3,74	1,31E−03	3,043
	RDTS	$\alpha = =1{,}010000$	$\lambda_+ = =0{,}831042$	$\lambda_- = = 1{,}163421$				0,0520	0,0000	0,4438	−3,74	5,47E−04	7,316
ARMA-GARCH	Норм.	0,000001	0,060919	0,934121	0,763942	−0,813619	1,0155E−04	0,0363	0,0027	144,5140	−3,89	4,97E−05	80,514
	t ($d=$ 9,404)	0,000000	0,062437	0,936913	0,718472	−0,774738	1,4828E−04	0,0498	0,0000	0,1175	−3,82	1,89E−03	2,114
	CTS	$\alpha = =0{,}010000$	$\lambda_+ = =2{,}674194$	$\lambda_- = =2{,}202865$				0,0259	0,0685	0,3591	−3,82	1,25E−03	3,187
	MTS	$\alpha = =1{,}010000$	$\lambda_+ = =2{,}099934$	$\lambda_- = =1{,}461669$				0,0287	0,0316	0,2836	−3,82	1,45E−03	2,760
	RDTS	$\alpha = =1{,}010000$	$\lambda_+ = =0{,}820097$	$\lambda_- = =1{,}125203$				0,0491	0,0000	0,3119	−3,82	4,75E−04	8,429

Таблица 3. Анализ американского кризиса: 16 сентября (вторник) 2008 г индекс ММВБ упал на 17,5%. Использовались наблюдения котировок за 2478 дней, последний день наблюдений 15 сентября (понедельник) 2008 г.

Модель	распре-деление	α_0	α_1	β_1	a	b	c	КС	(p-уровни)	АД	раз-ница кур-са	вероятность кризиса	среднее время
CV	Норм.	0,0005905					0,00156879	0,0627	6,64E−09	11,06999	−7,96	8,83E−16	4,52803E+12
	$t(d= =3{,}547)$	0,0006293					0,00206239	0,0993	1,05E−21	0,244422	−7,73	0,0012154	3,291085248
	CTS	$\alpha = =0{,}9324219$	$\lambda_+ = =0{,}683643$	$\lambda_- = =0{,}59158$				0,0187	0,34613602	0,150238	−7,73	0,00011503	34,77358041
	MTS	$\alpha = =1{,}0579759$	$\lambda_+ = =0{,}796748$	$\lambda_- = =0{,}687736$				0,0177	0,41704795	0,168611	−7,73	9,83E−05	40,69933877
	RDTS	$\alpha = 1,01$	$\lambda_+ = =0{,}390348$	$\lambda_- = =1{,}930068$				0,0422	0,00028803	0,203652	−7,73	7,91E−05	50,60021556
GARCH	Норм.	1,46E−05	0,125789	0,855233			0,00168002	0,0394	0,00087416	2,135705	−4,09	2,17E−05	184,039329
	$t(d= 5{,}969)$	1,38E−05	0,128171	0,854805			0,00210178	0,0633	4,48E−09	0,170841	−4,05	0,0033811	1,183046553
	CTS	$\alpha = =1{,}3925725$	$\lambda_+ = =0{,}704066$	$\lambda_- = =0{,}506483$				0,0182	0,38161957	0,209058	−4,05	0,00195559	2,045420407
	MTS	$\alpha = =1{,}5192481$	$\lambda_+ = =0{,}855085$	$\lambda_- = =0{,}639003$				0,0186	0,35619668	0,2176	−4,05	0,00187531	2,132982314
	RDTS	$\alpha = =1{,}666075$	$\lambda_+ = =0{,}238389$	$\lambda_- = =0{,}503627$				0,0438	0,00014485	0	−4,05	0,00096206	4,157766094
ARMA-GARCH	Норм.	1,47E−05	0,124718	0,855985	−0,239468	0,292708	0,00204593	0,0377	0,00168325	2,554679	−3,94	4,07E−05	98,20016518
	$t(d= 5{,}996)$	1,38E−05	0,126739	0,855783	−0,288024	0,3402	0,00270677	0,0629	5,61E−09	0,168779	−3,91	0,00397084	1,00734256
	CTS	$\alpha = =1{,}4374716$	$\lambda_+ = =0{,}649112$	$\lambda_- = =0{,}468963$				0,0182	0,38136105	0,198154	−3,91	0,00228739	1,748715567
	MTS	$\alpha = =1{,}5622161$	$\lambda_+ = =0{,}785398$	$\lambda_- = =0{,}596148$				0,0186	0,35615368	0,205791	−3,91	0,00219775	1,820045524
	RDTS	$\alpha = =1{,}6760487$	$\lambda_+ = =0{,}2321$	$\lambda_- = =0{,}490963$				0,044	0,00012887	0,22637	−3,91	0,00114369	3,497456644

Таблица 4. Анализ Американского кризиса: 16 сентября (вторник) 2008 г. индекс РТС упал на 11,5%. Использовались наблюдения котировок за 2478 дней, последний день наблюдений 15 сентября (понедельник) 2008 г.

Модель	распределение	α_0	α_1	β_1	a	b	c	КС	(p-уровни)	АД	разница курса	вероятность кризиса	среднее время
CV	Норм.	0,0005386					0,00135256	0,0685	1,49E−10	4322,054	−5,31	5,62E−08	71144,7223
	$t(d = 3{,}222)$	0,0006234					0,00199979	0,1065	6,21E−25	0,260264	−4,96	0,00663988	0,602420438
	CTS	$\alpha = 0{,}7369534$	$\lambda_+ = 0{,}750058$	$\lambda_- = 0{,}658566$				0,0207	0,23386318	0,065612	−4,96	0,00136926	2,921281427
	MTS	$\alpha = 1{,}01$	$\lambda_+ = 0{,}739595$	$\lambda_- = 0{,}626624$				0,0218	0,18737143	0,06089	−4,96	0,00155438	2,573374322
	RDTS	$\alpha = 1{,}01$	$\lambda_+ = 0{,}339975$	$\lambda_- = 1{,}925894$				0,0446	9,90E−05	0,103401	−4,96	0,00071357	5,605592861
GARCH	Норм.	1,58E−05	0,151859	0,825589			0,00198171	0,039	0,00105256	1,445939	−3,03	0,0121991	30,27893947
	$t(d = 5{,}479)$	1,10E−05	0,141009	0,849663			0,00221226	0,0605	2,48E−08	0,174845	−2,99	0,01355769	0,295035527
	CTS	$\alpha = 0{,}7052611$	$\lambda_+ = 1{,}374352$	$\lambda_- = 1{,}105166$				0,0263	0,06426464	0,053754	−2,99	0,00717411	0,557560193
	MTS	$\alpha = 1{,}01$	$\lambda_+ = 1{,}392243$	$\lambda_- = 1{,}056317$				0,0268	0,05531601	0,055167	−2,99	0,00737241	0,542563755
	RDTS	$\alpha = 1{,}107317$	$\lambda_+ = 0{,}511392$	$\lambda_- = 1{,}203532$				0,0474	2,85E−05	0,117097	−2,99	0,00407698	0,981118646
ARMA-GARCH	Норм.	1,51E−05	0,145237	0,83234	0,133431	−0,04148	0,00167754	0,035	0,00444123	1,913934	−2,95	0,0160281	24,95620085
	$t(d = 5{,}594)$	1,07E−05	0,1377	0,852476	−0,026395	0,11249	0,00226203	0,0584	8,58E−08	0,174498	−2,90	0,01488114	0,268796596
	CTS	$\alpha = 0{,}9620178$	$\lambda_+ = 1{,}161893$	$\lambda_- = 0{,}877759$				0,0255	0,07790586	0,053066	−2,90	0,00831311	0,481167806
	MTS	$\alpha = 1{,}1067819$	$\lambda_+ = 1{,}352036$	$\lambda_- = 0{,}990496$				0,0254	0,08044563	0,052796	−2,90	0,00839655	0,47638594
	RDTS	$\alpha = 1{,}225829$	$\lambda_+ = 0{,}462943$	$\lambda_- = 1{,}232203$				0,0467	3,93E−05	0,119261	−2,90	0,00468907	0,853047629

ленных параметров использовался критерий Колмогорова–Смирнова (КС), а также критерий Андерсона–Дарлинга (АД). Критерий Андерсона–Дарлинга лучше подходит для оценки распределений с «тяжелыми хвостами».

На основе проведенных тестов можно сделать следующие выводы:

– в соответствии с критерием согласия Колмогорова-Смирнова при уровне значимости $p = 0,01$ для всех наборов данных были отвергнуты гипотезы о соответствии эмпирических распределений рассматриваемым нормальным и t-распределением. Все RDTS-модели временных рядов были отклонены критерием Колмогорова-Смирнова при уровне значимости $p = 0,01$, все три модели с CTS и MTS распределением принимаются. Такие результаты были получены как для американской, так и для российской бирж;

– статистика Андерсона–Дарлинга для трех нормальных моделей временных рядов значительно выше, чем для других моделей. Это означает, что нормальное распределение для рассмотренных наблюдений хуже описывает «тяжелые хвосты» поведения эмпирического распределения временных рядов.

3. Прогнозы финансовых кризисов

На основании вычисленных параметров, можно рассчитать вероятность обвалов биржевых рынков. Среднее время возникновения кризиса определяется согласно формуле

$$T = \frac{1}{250P\left[y_t \leqslant y_t^*\right]},$$

где y_t^* — наблюдаемое падение цены на акцию в момент времени t.

На основе вычисленных параметров рассмотренных моделей были сделаны прогнозы изменения цены за день до кризиса y_t. Числовые значения изменения курса внесены в табл. 2, 3, 4 (3-й столбец справа). На основе наблюдаемого падения биржевых котировок и сделанных прогнозов была рассчитана вероятность кризиса и дан временной прогноз обвала рынка.

В работе исследовался кризис, вызванный банкротством Lehman Brothers 15 сентября 2008 г. Рынок в это время характеризовался повышенной волатильностью. На российских биржах наибольшее падение наблюдалось 16 сентября — для ММВБ 17,5% и для РТС 11,5%. На американской бирже в этот также день было сильное падение, но максимальный спад произошел 29 сентября 2008 г., когда S&P 500 снизился на 9%. По параметрам, вычисленным на основе наблюдений до 26 сентября (и 15 сентября для российских бирж) 2008 года, спрогнозирована вероятность того, что произойдет обвал 29 (16) сентября 2008 г. Среднее время возникновения кризиса для S&P 500 составляет (последний столбец таблицы 1) $3,69 \cdot 10^{11}$, 56,16 и 80,5 лет для нормальной-CV, нормальной-GARCH и нормальной-ARMA-GARCH модели соответственно. Для российских бирж (табл. 3, 4) временные промежутки, спрогнозированные с помощью моделей с нормальным распределением, также очень велики. Таким образом, можно сделать вывод о невозможности получения серьезных предупреждений об обвале рынка, взяв за основу модели временных рядов с нормальным распределением ошибок, несмотря на то, что эти модели включают влияние кластеризации волатильности.

Среднее время возникновения обвала для t-CV, t-GARCH и t-ARMA-GARCH модели заметно меньше, чем соответствующее время в нормальной модели временных рядов. Тем не менее, все они отклонены критерием КС при уровне значимости $p = 0,01$, и они не объясняют свойства концов распределения лучше по сравнению с моделями временных рядов с «тяжелыми хвостами».

В отличие от трех моделей временных рядов с распределением Стьюдента, три модели временных рядов с «тяжелыми хвостами» не отвергнуты критерием КС при уровне значимости $p = 0,01$ в этом исследовании, кроме RDTS-модели. Распределение RDTS имеет более тонкие хвосты распределения, чем CTS и MTS распределения. По этой причине среднее время до обвала рынка для RDTS-модели больше, чем у соответствующих CTS и MTS моделей. Полученные результаты сравнивались с исследованиями, проведенными Рачевым и Ким для американской биржи S&P 500 [8]. Сравнение показало качественное совпадение вычисленных значений параметров и вероятностей для всех рассмотренных моделей.

4. AVaR для CTS-ARMA-GARCH модели

Стандартным методом оценки риска позиции или портфеля на сегодняшний день считается использование квантильных мер риска. Наиболее часто используемой мерой является величина Value-at-Risk (VaR) — мера риска актива с заданной доверительной вероятностью. Утверждение о том, что позиция имеет определенное значение VaR означает следующее: в течение промежутка времени t абсолютная величина убытка по позиции не может быть больше, чем VaR с заданной доверительной вероятностью η [10]. VaR некоторой случайной величины X с заданной доверительной вероятностью η определяется следующим образом

$$VaR_{\eta}(X) = -\inf\left\{x \in R \,|\, P(X \leqslant x) > \eta\right\}.$$

Учитывая определение ARMA-GARCH модели (1.3), можно определить VaR на основе данных, наблюдаемых до момента времени t с доверительной вероятностью η, как

$$VaR_{t,\eta}(y_{t+1}) = \\ = -\inf\left\{x \in R \,|\, P_t(y_{t+1} \leqslant x) > \eta\right\},$$

где $P_t(A)$ — условная вероятность данного события A для наблюдений до момента t.

В этом разделе рассматривается AVaR для ARMA-GARCH модели с ошибками, имеющими CTS-распределение в сравнении с AVaR, полученным на основе наблюдений. AVaR с доверительной вероятностью η определяется следующим образом

$$AVaR_{\eta}(X) = \frac{1}{\eta}\int\limits_{0}^{\eta} VaR_{\varepsilon}(X)d\varepsilon,$$

где $VaR_{\varepsilon}(X)$ — VaR от X с уровнем значимости ε. Величина AVaR более консервативна в кризисные периоды. Это означает, что AVaR можно считать хорошим показателем предстоящего кризиса во время высокой волатильности рынков.

На рис. 1, 2, 3 представлены результаты наблюдения изменений дневных курсов S&P 500, ММВБ и РТС и посуточные значения 1%-AVaR для нормальной ARMA-GARCH и CTS-ARMA-GARCH моделей с 14 декабря 2004 г. по 31 декабря 2008 г. Ежедневная разница цены акций, начиная с июля 2007 г, принимает более высокие значения. Наконец, индекс резко снижается в сентябре 2008 г. Наблюдаемые на рис. 1 скачки для биржи S&P 500 можно рассматривать как сигналы раннего предупреждения предстоящего резкого спада на рынке. Амплитуда колебаний начала расти в июле 2007 г, достигнув своего максимального значения в последние месяцы 2008 г. Исследования, выполненные для российских бирж, не позволяют сделать однозначные выводы о приближающемся кризисе 2008 г. Частота скачков амплитуд, а также сами амплитуды намного выше, чем для американской биржи, что, возможно, обусловлено меньшим торговым оборотом и зависимостью от сырьевых цен.

Заключение

Проведенные исследования показывают, что для рассмотренных эмпирических данных модели временных рядов, основанные на предположении о нормальном распределении нормированных остатков, не дают достоверных прогнозов будущих изменений биржевого курса, даже если они учитывают кластеризацию волатильности. Обсуждаются недостатки моделей временных рядов с распределением Стьюдента в кризисные для финансовых рынков периоды. При этом наблюдаемые данные показывают, что модели временных рядов с распределениями с «тяжелыми хвостами» дают лучшие предсказания относительно рыночного риска. Эффективность предложенных моделей прогнозирования финансовых кризисов демонстрируется с помощью бэктестов.

Литература

1. *Busse J.* Volatility timing in mutual funds: Evidence from daily returns // Review of Financial Studies. 1999. Vol. 12. No. 5. P. 1009–1041.
2. *Mandelbrot B.* The Variation of Certain Speculative Prices, Cambridge: MIT Press. 1964.
3. *Engle R.* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of United Kingdom in?ation // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 987–1008.
4. *Engle R.* Bollerslev T. Modelling the persistence of conditional variances // Econometric Reviews. 1986. Vol. 5. No. 1. P. 1–50.
5. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. Vol. 31. No. 3. P. 307–327.
6. *Kim Y.S., Rachev S.T., Bianchi M.L., Fabozzi F.J.* Tempered stable and tempered infinitely divisible GARCH models // Journal of Banking and Finance. 2010. No.34. P. 2096-2109
7. *Kim Y.S., Rachev S.T., Chung D.M., Bianchi M.L.* The modified tempered stable distribution, GARCH-models and option pricing //Probability and Mathematical Statistics. 29(1.1). 2009. P. 91-117.

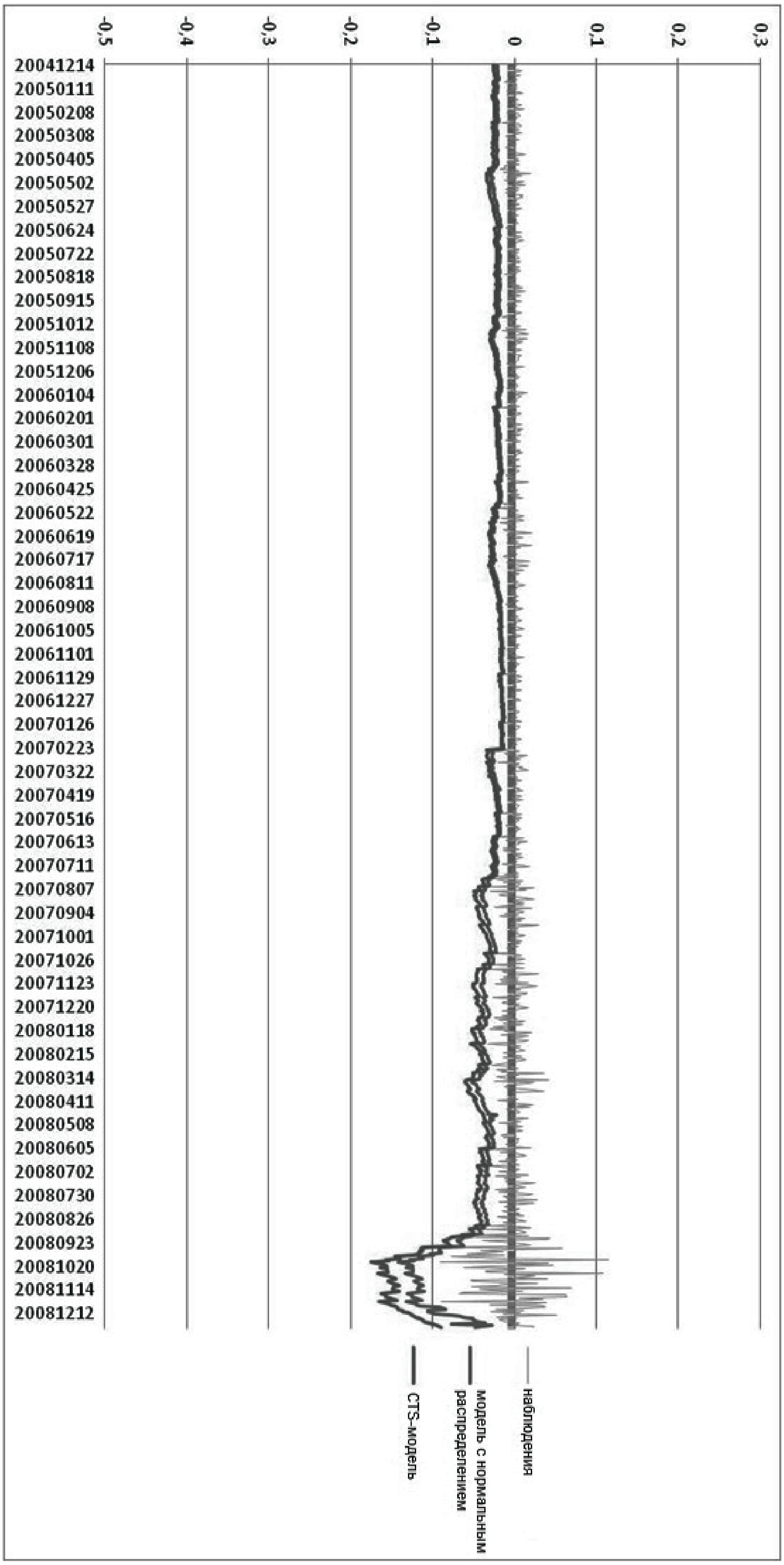

Рис. 1. Значения AVaR и дневные колебания курса для индекса S&P 500

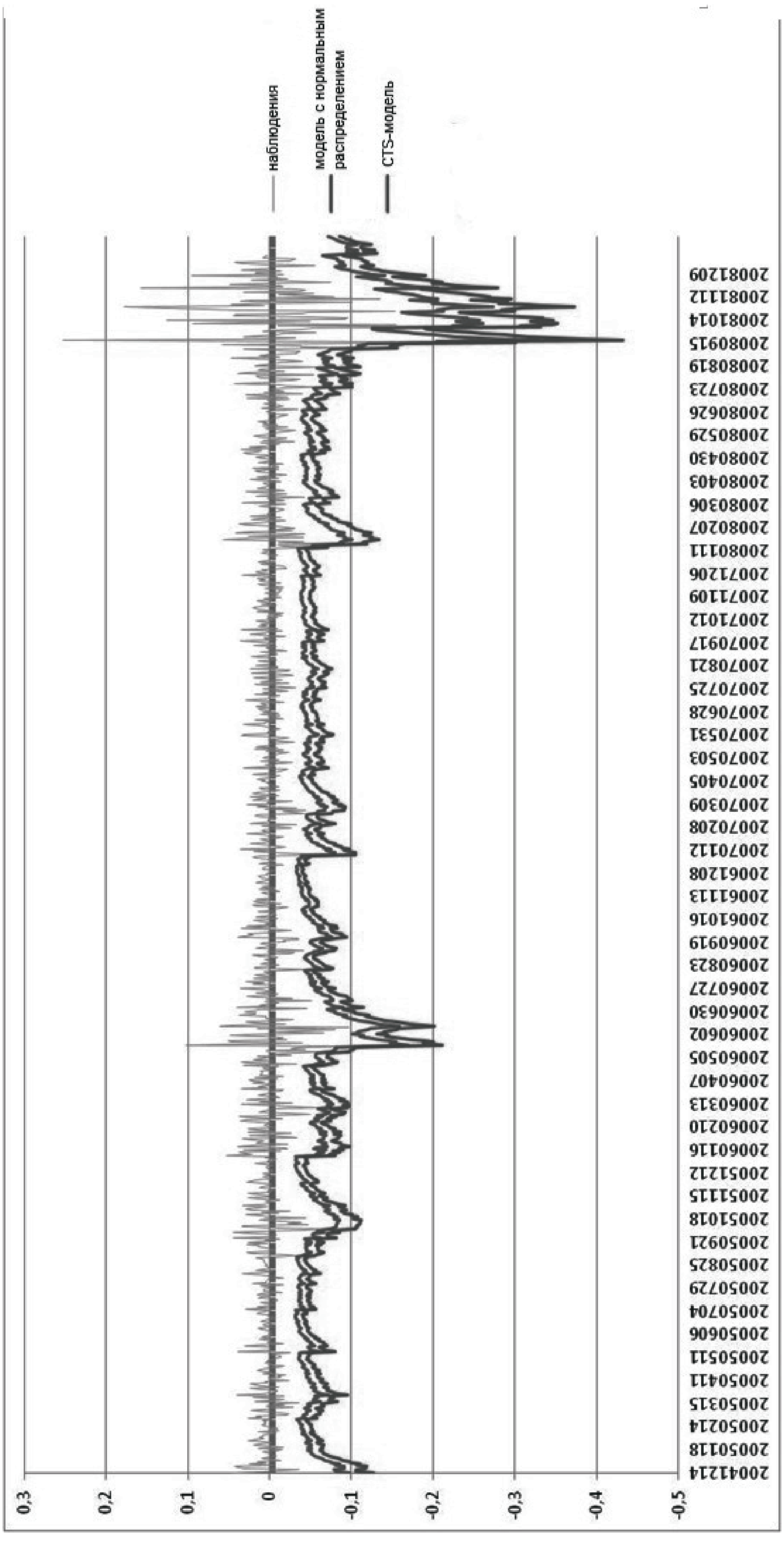

Рис. 2. Значения AVaR и дневные колебания курса для индекса ММВБ

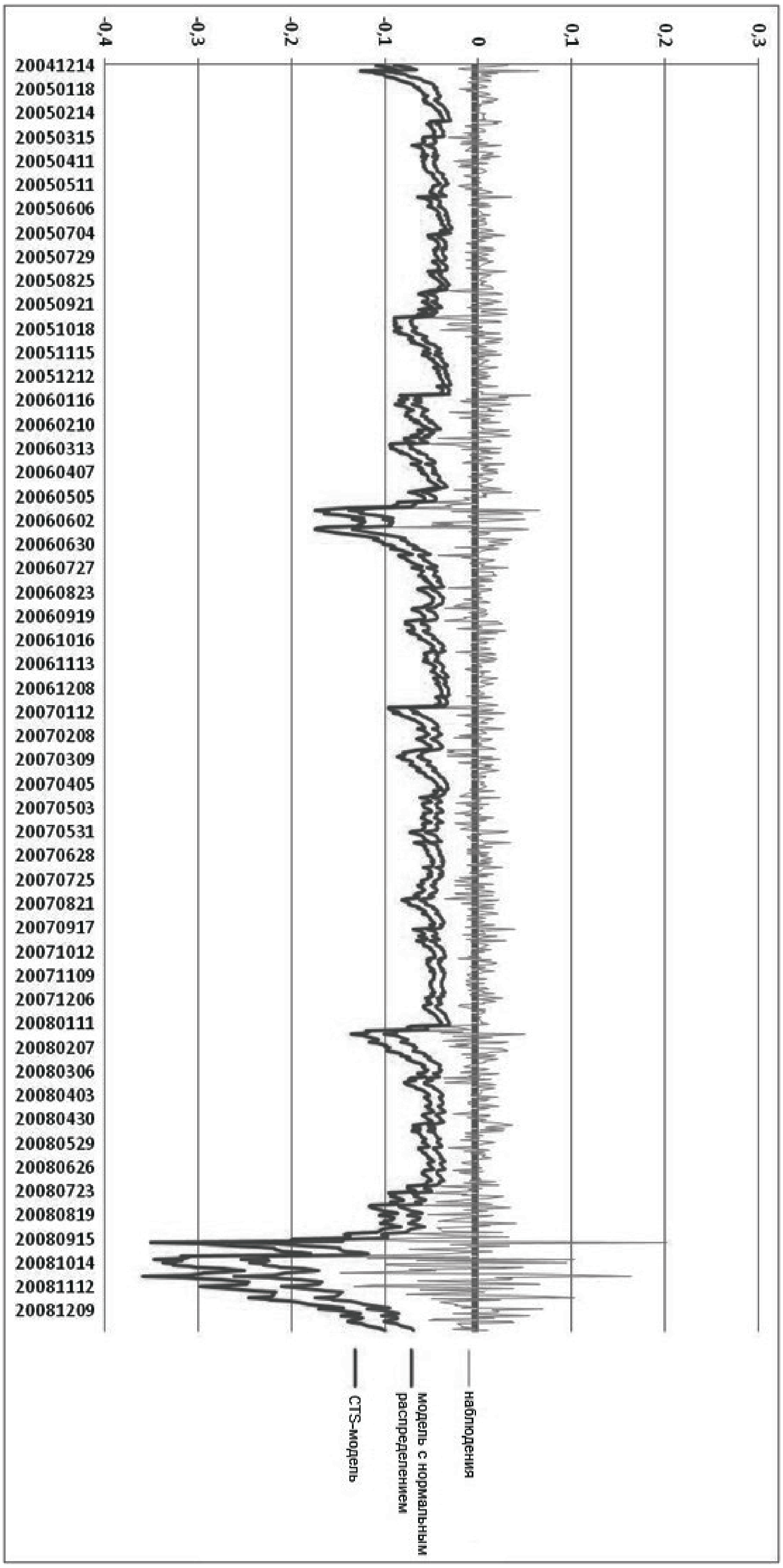

Рис. 3. Значения AVaR и дневные колебания курса для индекса РТС

8. *Kim Y.S., Rachev S.T., Bianchi M.L., Mitov I, Fabozzi F.J.* Time series analysis for financial market meltdowns//Journal of Banking and Finance. 2011. No.35. P.1879–1891.
9. *Bianchi M.L., Rachev S.T., Kim Y.S., Fabozzi F.J.* Tempered infinitely divisible distributions and processes // Theory of Probability and Its Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics. (SIAM) 55(1.1). 2010. P. 58-86.
10. *Булдашев С.В.* Статистика для трейдеров. Москва: Компания Спутник. 2003. 244 с.

Ключевые слова: ARMA-GARCH модель, Value-at-Risk (VaR), Average Value-at-Risk (AVaR), временные ряды, распределения с «тяжелыми хвостами».

Статья поступила 19 мая 2013 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар