УДК 004.82

ВЛОЖЕНИЯ ФОРМАЛИЗМОВ СЕМАНТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Костенко К. И.[1]

INCLUSIONS OF THE SEMANTIC NETS FORMALISMS

Kostenko K. I.

The system of knowledge formalisms comparisons based on the relations of an algebraic and semantic inclusion is defined. Concerning semantic inclusion formalisms of hierarchical semantic nets of any depth are equivalent to nonhierarchical semantic nets.

Keywords: formalism of knowledge, formalisms inclusion, algebraic inclusion, semantic inclusion, semantic net.

Введение

Для моделирования многообразий знаний в разных предметных областях применяются специальные формальные системы, которые будем называть формализмами знаний (или кратко, формализмами). В них отражается опыт разработки форматов представления знаний в составе интеллектуальных систем. Знания в таких форматах составляют базы знаний и используются процессами решения разнообразных задач. Реализации отдельных формализмов составляют семейства абстрактных и прикладных моделей. Многообразие таких моделей достаточно разнородно и развивается в значительной мере индуктивно. Оно состоит из многочисленных частных формализмов, адаптированных к особенностям узких областей. Для существующих формализмов знаний актуальны задачи сравнения и совместного использования. Продуктивное совместное исследование и применение разных формализмов или моделей в таких формализмах связано с обобщением и универсализацией конструктов, составляющих формализмы. Последними, в частности, представляются инварианты, позволяющие сравнивать, измерять и обрабатывать алгебраическую и семантическую структуры представлений знаний.

Уточним универсальное сравнение формализмов. Оно связано с существованием специальных инъективных отображений вложенных фрагментов представлений знаний в одном формализме во вложенные фрагменты знаний другого формализма, монотонных относительно семантической структуры и сохраняющих алгебраическую структуру фрагментов знаний. Применим указанные сравнения для изучения соотношений формализмов знаний, близких к семантическим сетям.

1. Формализмы знаний

В состав всякого формализма знаний $\Im$ входит разрешимое множество, элементы которого интерпретируются как абстрактные образы отдельных знаний. Для каждого такого множества $M_\Im$ предполагаются заданными:

1. вычислимое множество $D_{M_\Im}$ — фрагментов элементов $M_\Im$, содержащее пустую часть, обозначаемую как Λ, и включающее $M_\Im$ в качестве своего разрешимого подмножества;

2. вычислимая операция композиции, порождающая отображение

$$\circ : D_{M_\Im} \times D_{M_\Im} \to D_{M_\Im};$$

3. разрешимое отношение вложения элементов $D_{M_\Im}$ (обозначаемое как $\subseteq$).

Алгебраическая операция композиции позволяет составлять элементы $M_\Im$ с помощью других элементов. Представление произвольного $a \in M_\Im$ в виде композиции определяет алгебраическую структуру a. Для

[1]Костенко Константин Иванович, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета, доцент; e-mail: kostenko@kubsu.ru.

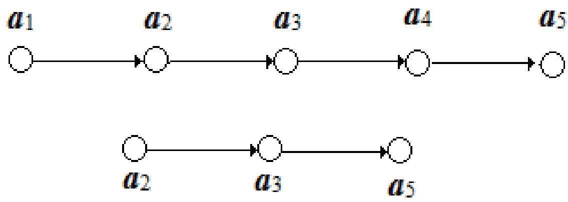

Рис. 1. Сети N_1 и N_2

теоретико-множественных формализмов элементами $M_{\Im}$ являются множества, а $D_{M_{\Im}}$ составляют всевозможные подмножества таких множеств. Композиция элементов $D_{M_{\Im}}$ реализуется операцией объединения. Для формализма семантических сетей фрагментами сетей являются подсети, составляемые подмножествами множеств вершин и рёбер сетей. Композиция фрагментов сетей реализуется объединением соответствующих множеств вершин и рёбер. Использование алгебраической структуры интеллектуальных объектов при решении разнообразных задач, связанных с обработкой знаний, соответствует парадигме моделирования кибернетических систем, предложенной А. В. Чечкиным в [1].

Определение Формализм $\Im_1$ алгебраически вкладывается в $\Im_2$ (обозначается как $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$), если существует такое инъективное вычислимое отображение $\xi : D_{M_1} \to D_{M_2}$, что

$$\forall C_1, C_2 \in DM_1(\xi(C_1 \circ C_2) = \xi(C_1) \circ \xi(C_2)).$$

Определение Формализм $\Im_1$ семантически вкладывается в формализм $\Im_2$ (обозначается как $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$), если существует такое инъективное вычислимое отображение $\xi : D_{M_1} \to D_{M_2}$, что

$$\forall a, b \in D_{M_1}(a \subseteq b \to \xi(a) \subseteq \xi(b)).$$

Определение Формализм $\Im_1$ вкладывается в формализм $\Im_2$ (обозначается как $\Im_1 \sqsubseteq \Im_2$), если существует такое инъективное вычислимое отображение $\xi : D_{M_1} \to D_{M_2}$, что $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$ и $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$.

Пусть для формализмов $\Im_1$, $\Im_2$ и $\Im_3$ имеют место вложения $\Im_1 \sqsubseteq \Im_2$ и $\Im_2 \sqsubseteq \Im_3$, которые выполняются для отображений ξ_1 и ξ_2. Тогда для композиции $\xi_3 = \xi_2 \circ \xi_1$ выполняется вложение $\Im_1 \sqsubseteq \Im_3$. Поэтому отношение $\sqsubseteq$ транзитивно на множестве формализмов знаний. Произвольные формализмы $\Im_1$ и $\Im_2$ будем называть эквивалентными, если $\Im_1 \sqsubseteq \Im_2$и $\Im_2 \sqsubseteq \Im_1$. Эквивалентность формализмов $\Im_1$ и $\Im_2$ обозначается как $\Im_1 \equiv \Im_2$. Если для формализмов $\Im_1$ и $\Im_2$ имеют место алгебраические (семантические) вложения $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$ и $\Im_2 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_1$ ($\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$ и $\Im_2 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_1$), то такие формализмы называются алгебраически (семантически) эквивалентными. Отношения алгебраического и семантического вложений формализмов знаний являются транзитивным. Аналогично определяются алгебраическая и семантическая эквивалентность произвольных формализмов. При этом понятие алгебраического вложения оказывается равносильным понятию инъективного гомоморфизма.

Алгебраическими вложениями формализмов знаний обеспечивается сохранение схем составления знаний при переходе от одного формализма к другому. Для теоретико-множественных формализмов этого оказывается достаточно, чтобы обеспечить монотонность относительно вложений множеств рассматриваемых как представления знаний. В сравнениях формализмов знаний согласованно используются алгебраическое и семантическое вложения.

Большая общность операции композиции позволяет устанавливать соответствия формализмов, при которых сохранение алгебраической структуры представлений знаний не обеспечивает выполнимость условия сохранения монотонности для семантической структуры таких представлений. Последнее связано с тем, что операция композиции может оказаться немонотонной относительно семантического вложения представлений знаний в сравниваемых формализмах.

Приведём пример формализмов $\Im_1$ и $\Im_2$, для которых имеет место вложение $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$. При этом для всякого отображения $\xi : D_{\Im_1} \to D_{\Im_2}$, для которого $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$, неверно соотношение $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$. Знания и их фрагменты в $\Im_1$ задаются конечными подмножествами бесконечного разрешимого множества $Q = \{a_1, \ldots, a_i, \ldots\}$. Композиция знаний и их фрагментом моделируется операцией объединения множеств, а сравнение вложения знаний в $\Im_1$ моделируется отношение вложения множеств. В формализме

$\Im_2$ знания и их фрагменты представляются конечными последовательностями элементов Q, идущими в порядке возрастания значений индексов этих элементов. Можно считать, что такие знания представляются семантическими сетями, примеры которых приведены на рис. 1. Композиция произвольных знаний в $\Im_2$ моделирует преобразованием, упорядочивающим множество элементов, в составе последовательностей, к которым применяется операция композиции. Наконец, вложение знаний $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}$ в $\Im_2$ имеет место, если последовательность, составляющая $\mathbf{x}$, является отрезком последовательности, составляющей $\mathbf{y}$.

Проверим, что для $\Im_1$ и $\Im_2$ выполняется соотношение $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$. Определим отображение $\xi : D_{\Im_1} \to D_{\Im_2}$. Пусть

$$B = \{a_{i_j} | j = 1, \ldots, k \ \& \ i_1 < i_2 < \ldots < i_k\},$$

$$\xi(B) = a_{i_1} \to a_{i_2} \to \ldots \to a_{i_k}.$$

То есть, множествам сопоставляются упорядоченные последовательности, составленные из элементов таких множеств. Для указанного отображения выполняется условие

$$\forall A, B \in D_{\Im_1}(\xi(A \circ B) = \xi(A) \circ \xi(B)).$$

Поэтому $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$. Покажем, что если для некоторого $\xi : D_{\Im_1} \to D_{\Im_2}$ выполняется условие вложения $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$, то для такого ξ не имеет места вложение $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$.

Предположим противное. Тогда найдётся такое вычислимое отображение $\xi : D_{\Im_1} \to D_{\Im_2}$, что

$$\forall A, B \in D_{\Im_1}(\xi(A \circ B) = \xi(A) \circ \xi(B))$$

$$\text{и } \forall A, B \in D_{\Im_1}(A \subseteq B \to \xi(A) \subseteq \xi(B)).$$

Пусть $i \in \mathbf{N}$ — это минимальное значение, для которого $\exists\ A \in D_{\Im_1}(a_i \in \xi(A))$, а $A \in D_{\Im_1}$ — такой элемент $D_{\Im_1}$, что выполнено последнее соотношение. Множество A выбрано так, что если $B \in D_{\Im_1}$ и $A \subseteq B$, то $\xi(B) = \xi(A)\xi(B \backslash A)$. То есть ξ — образ всякого расширения A получается дописыванием к $\xi(A)$ последовательности $\xi(B \backslash A)$. Другие варианты составления $\xi(B)$ невозможны. Это так, поскольку получение $\xi(B)$ включением в упорядоченную последовательность $\xi(A)$ новых внутренних элементов противоречит предположению, что $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$. Пусть $b, c \in Q$ — элементы Q, которые не принадлежат A. Тогда должно выполняться равенство

$$\xi(A \cup \{b, c\}) = \xi(A)\xi(\{b\})\xi(\{c\}) = \\ = \xi(A)\xi(\{c\})\xi(\{b\}),$$

что неверно. Заметим, что в рассмотренном примере существует $\xi : D_{\Im_1} \to D_{\Im_2}$, для которого $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ — вычислимая последовательность, составленная всеми конечными подмножествами множества Q, для которой выполняется условие $\forall\ i, j \in N(A_i \subset A_j \to i < j)$. Положим $\xi(A_i) = a_1, \ldots, a_i$. Для ξ справедливо соотношение $\forall\ A, B \in D_{\Im_1}(A \subseteq B \to \xi(A) \subseteq \xi(B))$. Поэтому $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$ и неверно, что $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$.

Приведём пример формализмов $\Im_1$ и $\Im_2$, для которых $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$, но невозможно вложение $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$. Как и в предыдущем примере, это связано с тем, что свойства сохранения алгебраической и семантической структур представлений знаний не согласованы. В $\Im_1$ и $\Im_2$ знания и их фрагменты представляются вычислимыми семействами конечных подмножеств множества Q, для которого вычислимо отображение, сопоставляющее каждому подмножеству его мощность. Семантическое вложение произвольных фрагментов знаний в $\Im_1$ ($\Im_2$) имеет место, если соответствующие множества являются вложенными. Очевидно, что для тождественного отображения $\xi : D_{\Im_1} \to D_{\Im_2}$ выполняется условие семантического вложения $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{S}} \Im_2$.

Определим операции композиции элементов $D_{\Im_1}$ ($D_{\Im_2}$), так чтобы не существовало связанного с ними гомоморфизма $\Im_1$ в $\Im_2$. Пусть

$$\forall x, y \in D_{\Im_1}\left(x \circ y = \{a_i | i = \max_{a_j \in x \cup y}(j)\}\right)$$

$$\left(\forall x, y \in D_{\Im_2}(x \circ y = \{a_i | i = \min_{a_j \in x \cup y}(j)\})\right).$$

Тогда для формализмов $\Im_1$ в $\Im_2$, не существует инъективного гомоморфизма, связанного с операцией композиции. Это следует из того, что в $\Im_1$ множества значений композиции произвольных элемента $D_{\Im_1}$ с другими элементами $D_{\Im_1}$ является бесконечным, а аналогичные семейства в $\Im_1$ всегда конечные. Следовательно, структурные инварианты композиции и вложения фрагментов представлений знаний не являются согласованными.

2. Формализмы иерархических семантических сетей

Рассмотрим вопрос о выполнимости определённого выше отношения семантического вложения для формализмов, близких к иерархическим семантическим сетям (SN) [1].

В простейшем случае, конкретная семантическая сеть представляется конечным ориентированным графом, вершинами которого являются элементы некоторого бесконечного разрешимого множества $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots\}$, составленного элементарными (неделимыми) вершинами в составе семантических сетей. Рёбра сети размечены отношениями на $\mathbf{V}$, выполняющимися между парами соединяемых ими вершин. На множестве $\mathbf{V}$ дополнительно определено вычислимое отношение порядка $\rho^1 \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$. В общем случае множество вершин $\mathbf{V}$ составляют бесконечные подмножества элементарных и неэлементарных вершин. Последними представляются иерархические семантические сети. Рёбра иерархических семантических сетей связывают пары вершин. При этом каждую пару вершин соединяет не более одного ребра. Рёбра размечены семантическими отношениями, выполняющимися для соединяемых ими вершин. Множество таких отношений обозначим как R. Обозначим формализм иерархических семантических сетей и множество всех сетей в этом формализме как SN. Будем рассматривать фрагменты SN, определяющие специальные формализмы (подмножества) иерархических семантических сетей. В каждом конкретном формализме семантических сетей семейство применяемых отношений на $\mathbf{V}$ является разрешимым. Для представления отдельных семантических сетей будем использовать пары $\widetilde{\mathbf{N}} = (V, U)$, где V — конечное множество вершин, а U— конечное множество рёбер, нагруженных значениями семантических отношений, выполняющихся между соединяемыми ими вершинами. Множество SN распадается на классы $SN_0, \ldots, SN_i, \ldots$ — семантических сетей возрастающей глубины.

Глубиной семантической сети $\widetilde{\mathbf{N}}$ называется значение функционала $d(\widetilde{\mathbf{N}})$, определяемого рекуррентными соотношениями:

1. $\forall\ v \in V$ ((v — элементарная $\vee$ $v =$ _ в определении фрагмента ребра) $\rightarrow d(v) = 1$);

2. $\forall\ v \in V$ (v — неэлементарная & v — представляет сеть
$$\widetilde{\mathbf{N}} = (V, U) \rightarrow d(v) = d(\widetilde{\mathbf{N}}));$$

3. Если $\widetilde{\mathbf{N}} = (V, U)$ и $\mathbf{U} = \varnothing$, то
$$d(\widetilde{\mathbf{N}}) = \max_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}}(d(v));$$

4. Если $u = (a, b)$, то $d(u) = \max(d(a), d(b))$;

5. Если $\widetilde{N} = (V, U)$ и $U \neq \varnothing$, то
$$d(\widetilde{N}) = \max_{u \in U}(d(u)) + 1.$$

Для представления отдельных рёбер семантических сетей будем использовать выражения вида (a, b, r), в которых a и b— вершины, а r — отношение между ними.

Будем считать, что одинаковые вершины в каждой конкретной модели для формализма SN обозначают одинаковые объекты. В частности, неэлементарные вершины сетей в классе SN обозначают фиксированные семантические сети.

Уточним понятия вложения и композиции семантических сетей. Вложения сетей связаны с существованием соответствий, для которых пути одной (вложенной)сети сопоставляются путям другой сети, так что последовательности вершин и разметок рёбер оказываются сравнимыми в специальном отношении. Обозначим как $W(G)$ множество путей в $G \in SN$. Если $W \in W(G)$, то $R(W)$ — это последовательность чередующихся разметок вершин и рёбер, проходимых W. На множестве конечных последовательностей чередующихся элементов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{R}$ определено разрешимое отношение ρ^2. В частности, если R_1, R_2 — такие последовательности и R_1 является подпоследовательностью R_2, то $R_1 \rho^2 R_2$. Уточнение понятия вложения семантических сетей, в общем случае, связано с понятием вложения графов [3]. Вложение имеет место, если существует отображение множества вершин вложенного графа во множество вершин другого графа, для которого всякий путь в первой графе представляется путём другого графа. При этом образы вершин первого пути составляют подпоследовательность последовательности вершин второго пути.

Определение Семантическая сеть $G_1 = (V_1, U_1)$ вложена в сеть $G_2 = (V_2, U_2)$, если существует такое отображение $\psi : V_1 \rightarrow V_2$, что:

1) $\forall\ v \in V_1 (v \rho^1 \psi(v))$;

2) $\forall\ W_1 \in W(G_1)\ \exists\ W_2 \in W(G_2)$
$$(W_1 = v', \ldots, v'' \rightarrow W_2 = \psi(v'), \ldots, \psi(v'') \ \& \ R(W_1) \rho^2 R(W_2)).$$

Семантическая сеть $G' = (V', U')$ является фрагментом сети $G = (V, U)$, если G' является подсетью G. То есть $V' \subseteq V$и $U' \subseteq U$. Другие фрагменты семантических сетей получаются выбором ровно одного ребра в них и удалением одной или двух вершин, соединяемых таким ребром. Простейшие семантические сети представляются отдельными вершинами или фрагментами отдельных рёбер.Остальные семантические сети и фрагменты таких сетей конструируются из простейших сетей с помощью определяемой ниже операции композиции.

Пусть $\mathbf{x} = (\mathbf{V}_x, \mathbf{U}_x)$ — семантическая сеть, а $\mathbf{y}$ —- фрагмент сети, содержащей ровно один из фрагментов рёбер вида $(a, \_, r)$, $(\_, a, r)$ или $(\_, \_, r)$. Здесь символом «_» обозначаются удалённые элементы представлений ребер. Если фрагмент ребра получается удалением одной вершины, то найдём множество вершин в $\mathbf{V}_x$, которые могут быть добавлены в этот фрагмент вместо отсутствующей вершины, так, чтобы отношение выполнялось между имевшейся и добавленной вершинами. Если же фрагмент ребра не содержит вершин, то найдём множество пар вершин из $\mathbf{V}_x$, между которыми выполняется отношение r. Если рассматриваемое множество является одноэлементным, то доопределим фрагмент ребра в $\mathbf{y}$ с помощью этого элемента. Обозначим полученный фрагмент сети как $\mathbf{x}|\mathbf{y}$.

Общее определение композиции фрагментов семантических сетей зададим с помощью следующего правила:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \begin{cases} \mathbf{x} \cup \mathbf{y}, \text{ если } \mathbf{x} \text{ — это сеть } \& \\ \qquad \mathbf{y} \text{ — фрагмент ребра,} \\ \mathbf{z}, \text{ если } \mathbf{x} \text{ — это сеть } \& \\ \qquad \mathbf{y} \text{ — фрагмент сети } \& \ \mathbf{z} = \mathbf{x}|\mathbf{y}, \\ \Lambda, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь приведено определение специальной операции композиции, связывающей пары фрагментов иерархических семантических сетей. Возможны различные уточнения этой операции. Выбор операции в данном случае определяется необходимостью согласования алгебраической структуры представлений знаний в формализмах иерархических семантических сетей и конфигураций абстрактных пространств знаний.

Уточнение формализма семантических сетей является как синтаксическим, определяя используемые форматы представления знаний, так и семантическим, предъявляя определённые требования к интерпретации и свойствам реализаций формализмов. Например, предполагается, что в семантических сетях должны выполняться все конкретные отношения между вершинами, соединяемыми рёбрами, размеченными указанными отношениями. Каждый формализм определяет семейство своих реализаций (моделей), которые могут обладать дополнительными характеристиками. Поэтому представляют интерес фрагменты формализмов, получаемые с помощью дополнительных требований к свойствам моделей, являющихся реализациями формализма или фрагментами таких реализаций. Так, в рассматриваемых формализмах множества элементарных и сложных знаний предполагаются бесконечными и вычислимыми. Фрагменты таких формализмов, представляют семейства моделей, для которых, например, предполагается конечность указанных множеств.

3. Сравнение формализмов семантических сетей

Всякий формализм определяет многообразие объектов, рассматриваемых в качестве представлений отдельных знаний. Если формализм $\Im_1$ определяет семейство представлений знаний, составляющее подмножество аналогичного семейства в формализме $\Im_2$, то он называется подформализмом формализма $\Im_2$.

Определим семейство подформализмов формализма SN, обозначаемых как SN_i, $i = 1, 2, \ldots$, с помощью соотношения: $SN_i = \{\widetilde{N} | \widetilde{N} \in SN \ \& \ d(\widetilde{N}) \leqslant i\}$.

Рассмотрим вопрос о влиянии глубины сетей на вложенность заданных формализмов.

Теорема 1. Для формализмов $SN_k, k = 1, 2, \ldots$, выполняется соотношение

$$SN_k \equiv_{\mathbb{S}} SN_{k+1}.$$

Доказательство.

1. Докажем, что

$$SN_k \sqsubseteq_{\mathbb{S}} SN_{k+1}.$$

Для этого воспользуемся отображением $\xi : D_{SN_k} \to D_{SN_{k+1}}$, которое сопоставляет семейству D_{SN_k} специальный фрагмент $D_{SN_{k+1}}$.

Пусть V_k^i, (V_{k+1}^i), $i = 1, 2, \ldots, k$ $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$ — семейство бесконечных разрешимых дизъюнктных множеств вершин. Элементы V_k^i, (V_{k+1}^i) предназначены для обозначения неэлементарных вершин, представляющих сети глубины i. Определим ξдля множеств V_k^i, $i = 1, 2, \ldots, k$, как вычислимую биекцию множества V_k^i на V_{k+1}^i в формализме SN_k (SN_{k+1}). Также положим $\xi(\_) = \_$.

Пусть $R^k = \{r_k^j | j = 1, 2, \ldots\}$ — бесконечное вычислимое множество разрешимых отношений на множестве вершин $\bigcup\limits_{i=1,\ldots,k} V_k^i$, применяемых для разметки рёбер сетей из SN_k. Вычислимое семейство разрешимых отношений на множестве вершин $\bigcup\limits_{i=1,\ldots,k+1} V_{k+1}^i$, применяемых для разметки рёбер сетей из SN_{k+1}, может быть представлено в виде объединения двух разрешимых непересекающихся множеств R_1^{k+1} и $R_2^{k+1} = \{r_{k+1}^j | j = 1, 2, \ldots\}$, для которых истинно соотношение $\forall\ j \in N(r_{k+1}^j = \{(a,b) | (\xi(a), \xi(b)) \in r_k^j\})$. Доопределим ξ на множестве R^k так, чтобы $\forall\ r_k^j \in R^k(\xi(r_k^j) = r_{k+1}^j)$.

Пусть $v* \in V_k^i$ $,i = 1, 2, \ldots, k$, представляющая семантическую сеть из SN_k. Поставим ей в соответствие семантическую сеть $sn(v*) \in SN_{k+1}$, $sn(v*) = (V, U)$, определяемую с помощью соотношений:

a) $v \in V \leftrightarrow \xi^{-1}(v) \in sn(v*)$;

b) $(x, y, r) \in U \leftrightarrow (\xi(x), \xi(y), \xi(r)) \in sn(v*)$.

Для фрагментов рёбер определение ξ имеет вид:

$$\xi(\_, y, r) = (\_, \xi(y), \xi(r));$$
$$\xi(x, \_, r) = (\xi(x), \_, \xi(r));$$
$$\xi(\_, \_, r) = (\_, \_, \xi(r)).$$

Отображение ξ инъективно и реализует преобразование фрагментов знаний в SN_kв изоморфные фрагменты знаний формализма SN_{k+1}. Поэтому $SN_k \sqsubseteq_{\mathbb{S}} SN_{k+1}$.

2. Покажем справедливость обратного соотношения: $SN_{k+1} \sqsubseteq_{\mathbb{S}} SN_k$. Приводимое ниже обоснование основано на общей схеме трансформации произвольных сетей из SN_{k+1} в сети из SN_k. Проиллюстрируем данное преобразование для значения $k = 1$. В этом случае достаточно уточнить подходящее отображение $\xi : D_{SN_2} \to D_{SN_1}$, задающее преобразование фрагментов иерархических сетей из SN_2 в фрагменты сетей из SN_1. Схема такого преобразования приведена на рис. 2.

Здесь изображена сеть $\widetilde{\Sigma}$ глубины 2. Она содержит семантическую сеть Σ глубины 1. При преобразовании $\widetilde{\Sigma}$ сеть Σ представляется специальной элементарной вершиной $\mathbf{a}_1$. В сети Σ выполняется операция однократного разбиения всех рёбер. Добавляемые вершины на рисунке окрашены в серый цвет. Результат преобразования Σ представлен в сети $\xi(\widetilde{\Sigma})$ изоморфным ему фрагментом Σ'. Вершина $\mathbf{a}_1$ в $\xi(\widetilde{\Sigma})$ связывается со всеми вершинами фрагмента, представляющего Σ', рёбрами, размеченными двумя специальными семантическими отношение. Первое из указанных отношений связывает $\mathbf{a}_1$ с образами вершин Σ. Второе отношение связывает $\mathbf{a}_1$ с вершинами разбиения рёбер в Σ. Сеть Σ и рёбра, которые соединяют её с другими вершинами $\widetilde{\Sigma}$, однозначно восстанавливаются по $\xi(\widetilde{\Sigma})$. Поэтому приведённое преобразование является инъективным. При этом сохраняются как алгебраическая, так и семантическая структура преобразуемых сетей из SN_1.

Аналогично определяются преобразования фрагментов сетей из SN_2, соответствующих рёбрам, ведущим из неэлементарной вершины в элементарную вершину и соединяющим пары неэлементарных вершин. Схема первого из указанных преобразований представлена на рис. 3.

Рассмотрим общий случай доказательства вложения $SN_{k+1} \sqsubseteq_{\mathbb{S}} SN_k$. Определим отображение $\xi_k : D_{SN_{k+1}} \to D_{SN_k}$, для которого выполнено условие семантического вложения SN_{k+1} в SN_k. Бесконечное разрешимое множество V^k, элементы которого используются для обозначения вершин сетей из SN_k, разобьём на три бесконечных вычислимых множества $V_0^k = \{v_1, \ldots, v_i, \ldots\}$, $V_1^k = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ и $V_2^k = \{y_1, \ldots, y_i, \ldots\}$. Элементы V_0^k и V_1^k используются для представления в сетях из SN_k элементарных и сложных вершин сетей из SN_{k+1}. Элементами V_2^k представляются вспомогательные вершины, встраиваемые в результат преобразования сетей из SN_{k+1} в фрагменты сетей из SN_k.

Обозначим как R_{k+1} бесконечное вычислимое множество разрешимых отношений на множестве вершин семантических сетей из SN_{k+1}. Зададим два специальных отношения в формализме SN_k, аналогичные отношениям r_0 и r_1 в рассмотренном выше частном случае.

Пусть $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_i, \ldots$ — однозначный вычислимый пересчёт множества $D_{SN_{k+1}}$. Определим ξ_k на множествах V_0 — элементарных и V_1 — неэлементарных вершин в SN_{k+1} так, чтобы это были биекции на множества V_0^k и V_1^k. Также положим $\xi_k(\_) = \_$.

Если $r \in R_{k+1}$, то определим отношения $\xi_k(r)$ так, чтобы каждое такое отношение было разрешимым. Первоначально включим в $\xi_k(r)$ образы рёбер (a, b, r) в сетях из SN_{k+1}, для которых выполняется условие $d(a) < k\ \ \&\ \ d(b) < k)$. То есть оказывает-

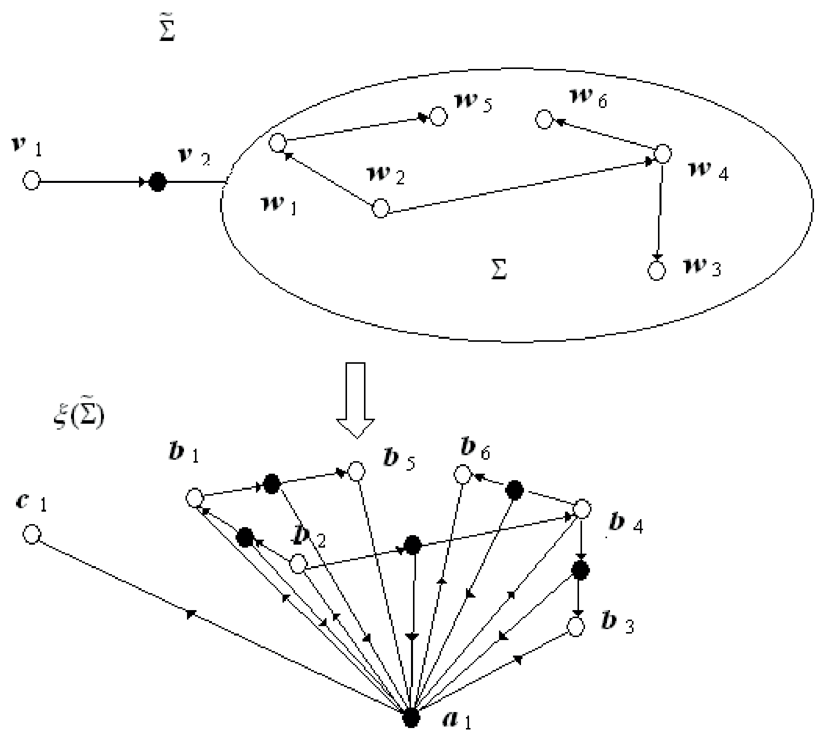

Рис. 2. Отображение фрагмента сети из SN_2 во фрагмент сети из SN_1

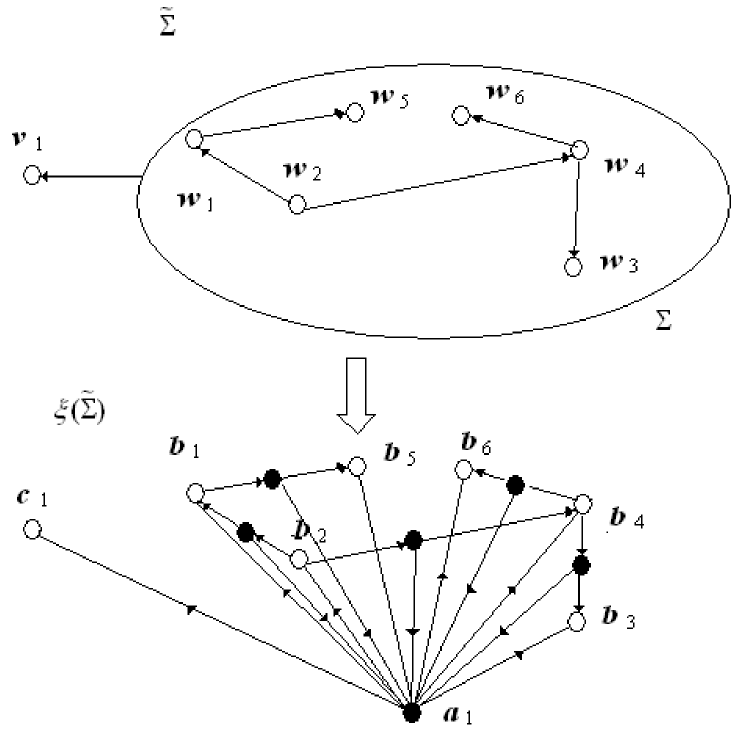

Рис. 3. Преобразование фрагмента семантической сети, для ребра соединяющего неэлементарную и элементарную вершины

ся истинным утверждение:

$$\forall r \in R_{k+1}(((a,b) \in r \ \& \ d(a) < k \ \& \\ d(b) < k) \rightarrow (\xi_k(a), \xi_k(b)) \in \xi_k(r)).$$

Доопределим ξ_k на элементах $D_{SN_{k+1}}$ и V_2^k с помощью следующей, выполняемой по шагам процедуры. Предположим, что выполнено i шагов данной процедуры.

Шаг $i+1$. Пусть отображение ξ_k определено для начала $\{y_1, \ldots, y_s\}$ множества V_2^k. Обозначим как $\Sigma_p = (V_p, U_p)$ — первый в порядке перечисления элемент последовательности $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_i, \ldots$, для которого значение ξ_k ещё не определено.

Зададим ξ_k для Σ_p с помощью следующих правил.

a) Если $(a,b,r) \in U_p$, где aи b — вершины, для которых $d(a) < k \ \& \ d(b) < k$, и значение $\xi_k((a,b,r))$ещё не определено, то положим $\xi_k((a,b,r)) = (\xi_k(a), \xi_k(b), \xi_k(r))$.

Пусть b — это вершина в V_t, представляемая сетью $\Sigma(b) = (\{a_1, \ldots, a_d\}, \{u_1, \ldots, u_t\})$, которая не встречалась среди фрагментов сетей $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_{t-1}$, для которой $d(b) = k$. Определим значение $\xi_k(\Sigma(b))$ для сети $\Sigma(b)$, представляющей b. Для этого разобьём ξ_k образы рёбер и фрагментов рёбер $\{u_1, \ldots, u_t\}$, используя для этого вершины $y_{s+1}, \ldots, y_{s+t}$. При этом ориентация и разметка разбиваемых рёбер сохраняются. Если $u_i = (a,b,r)$, $i = 1, \ldots, t$, то дополним отношение $\xi_k(r)$, двумя новыми парами $(\xi(a), y_{s+i}, \xi(r))$ и $(y_{s+i}, \xi(a), \xi(r))$. Указанное расширение отношений из $\xi(R_{k+1})$ сохраняет их разрешимость. Это так, поскольку отношение $\xi(r)$ пополняется новыми парами, соответствующими разбиениям рёбер сетей, представляющих сложные вершины, для которых $d(b) = k$. Разрешимость расширений отношений следует из того, что всякая вершина y_{s+j} используется в разбиениях рёбер сетей из SN_{k+1} ровно один раз.

b) Образуем дополнительные рёбра $(\xi_k(b), \xi_k(a_i), r_0)$, $i = 1, \ldots, d$, а также $(y_{s+j}, \xi_k(b), r_1)$, $j = 1, \ldots, t$;

c) Если $u = (a,b,r)$ — ребро или фрагмент ребра в Σ_p, для которого $d(a) = k \vee d(b) = k$, и значение Σ_p ещё не определено, то доопределим ξ_k для u как $\xi_k(u) = (\xi_k(a), \xi_k(b), \xi_k(r))$.

Теперь определим $\xi_k(\Sigma_p)$ как объединение ξ_k образов вершин и фрагментов рёбер, составляющих Σ_p.

Продолжение приведённого процесса позволяет определить отображение ξ_k для всех элементов множества $D_{SN_{k+1}}$.

Выполнимость условия вложения $SN_{k+1} \sqsubseteq_{\mathbb{S}} SN_k$ следует из того, пути в сетях из SN_{k+1} можно инъективно представлять путями в ξ_k образах таких сетей. Если W— путь в SN_{k+1}, то ему соответствует путь W^* в SN_k. Последний составляют ξ_k образы вершин из W, глубина которых меньше k, а также дополнительными вершины моделирующие замену вершин, глубина которых равна k. В остальном пути совпадают с точностью до именования вершин и разметки рёбер. Поэтому возможно подходящее уточнение отношения ρ^2 для формализма семантических сетей, для которого выполнено условие $\forall \Sigma^1, \Sigma^2 \in D_{SN_{k+1}}(\Sigma^1 \subseteq \Sigma^2 \rightarrow \xi(\Sigma^1) \subseteq \xi(\Sigma^2))$.

Доказательство окончено.

Воспользуется конструкцией доказательства теоремы 1 для обоснования семантической эквивалентности формализмов иерархических семантических сетей и формализма сетей составленных только из элементарных вершин.

Теорема 2. $SN_1 \equiv_{\mathbb{S}} SN$.

Доказательство. Для обоснования истинности утверждения теоремы достаточно проверить справедливость вложения $SN \sqsubseteq_{\mathbb{S}} SN_1$. Разобьём множество вершин из SN на бесконечное разрешимое семейство бесконечных разрешимых непересекающихся множеств V^i, $i = 1, 2, \ldots$. Здесь элементы множества V^i, $i = 1, 2, \ldots$, будут использоваться для представления иерархических семантических сетей глубины i.

Множество вершин в формализме SN_1 представим в виде объединения бесконечного вычислимого семейства бесконечных непересекающихся множеств $G, V_1, V_2, \ldots$. Элементы множества V_j, $j = 1, 2, \ldots$, будут использованы в доказательство при моделирования вершин из SN, представляющих сети глубины j. Множество семантических отношений в SN (SN_1) обозначим как R (R_1). Выберем в R_1 два специальных отношения, которые обозначим как r_0 и r_1.

Пусть

$$V = \bigcup_{i=0,1,\ldots} V^i \cup \{\_\}$$

и $\lambda : V \times V \times R \rightarrow G$ — вычислимое биективное отображение. Определим инъективное отображение $\xi : D_{SN} \rightarrow D_{SN_1}$, для которого выполнено условие вложения $SN \sqsubseteq_{\mathbb{S}} SN_1$, с помощью следующих правил.

1) Отображение ξ является вычислимой биекцией множеств $V^1, V^2, \ldots$ на множества $V_1, V_2, \ldots$. Кроме того, пусть $\xi(\_) = \_$.

2) Если $r \in R$, то положим

$$\xi(r) = \{(\xi(a), \lambda(a,b,r))|(a,b) \in r\} \cup \\ \cup \{(\lambda(a,b,r), \xi(b))|(a,b) \in r\} \cup \\ \cup \{(\xi(a), \xi(b))|(a,b) \in r\}.$$

.

3) Доопределим ξ на множество отдельных рёбер и фрагментов рёбер сетей в SN, сопоставив всякому такому ребру (a,b,r) два ребра $(\xi(a), \lambda(a,b,r), \xi(r))$ и $(\lambda(a,b,r), \xi(b), \xi(r))$. (Пары $(\xi(a), \lambda(a,b,r))$ и $(\lambda(a,b,r), \xi(b))$ уже включены в отношение $\xi(r)$, определённое согласно правилу 2). Поскольку λ — это биекция, то данное расширение отображения $\xi-$ инъективное.

4) Доопределим ξ на множестве D_{SN}. Пусть $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_i, \ldots$ — вычислимая последовательность, содержащая все элементы D_{SN} без повторений, для которой истинно соотношение: $\forall\ i, j(\Sigma_i \subseteq \Sigma_j\ \&\ i \neq j \to i < j)$.

Элементам указанной последовательности поставим в соответствие фрагменты сетей из D_{SN_1} с помощью соотношений:

a) Пусть рассматривается очередной фрагмент $\Sigma_i = (V, U)$. Если Σ_i является семантической сетью, то обозначим как a — вершину в сетях из SN, которой соответствует Σ_i.

b) фрагментов рёбер в Σ_i.

c) Если Σ_i является сетью и $\Sigma_i \notin SN_1$, то множество вершин фрагмента $\xi(\Sigma_i)$ составляют вершина a, а также вершин в составе ξ образов элементарных и неэлементарных вершин в Σ_i. Множество рёбер в $\xi(\Sigma_i)$ составляют рёбра в составе сетей, представляющих неэлементарные вершины в Σ_i, дополненные представлениями рёбер в Σ_i, а также входными и выходными рёбрами вершины $\xi(a)$. При этом, если $(a,b,r) \in U$, то данное ребро представляется в $\xi(\Sigma_i)$ рёбрами $(\xi(a), \lambda(a,b,r), \xi(r))$ и $(\lambda(a,b,r), \xi(b), \xi(r))$. Дополнительные входные и выходные рёбра вершины $\xi(a)$ составляют семейства $\{(\xi(a), \xi(b), r_0)|b \in V\}$ и $\{(\lambda(b,c,r), \xi(a), r_1)|(b,c,r) \in U\}$.

d) Если Σ_i — не является семантической сетью, то его составляет некоторая сеть Σ, дополненная фрагментом ребра (x, y, r). Тогда значение $\xi(\Sigma_i)$ составляет сеть $\xi(\Sigma)$, дополненная фрагментом ребра $(\xi(x), \xi(y), \xi(r))$.

Отображение ξ является инъективным. Им реализуется преобразование фрагментов сетей, аналогичное преобразованию из доказательства теоремы 1. В нём реализована схема замены вхождений всех неэлементарных вершин на представляющие их семантические сети с сохранением структурных свойств. Для каждого элемента D_{SN} такая трансформация заканчивается за конечное время. Поэтому ξ-вычислима и $SN_1 \equiv_{\mathbb{S}} SN$.

Доказательство окончено.

Литература

1. Искусственный интеллект. В 3-х кн. Кн. 2. Модели и методы. М.: Радио и связь, 1990. С. 28–49
2. *Чечкин А.В.* Нейрокомпьютерная парадигма информатики // Нейрокомпьютеры: разработки, применение. 2011. №7, С. 3–9.
3. *Gupta A., Nashimura N.* Finding largest subtrees and smallest supertrees // Algorithmica, 1998. Vol. 21. P. 183–210.

Ключевые слова: формализм знаний, вложение формализмов, алгебраическое вложение, семантическое вложение, семантическая сеть.

Статья поступила 1 апреля 2013 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар