

УДК 519.634

ФОРМЫ СВОБОДНЫХ ГРАНИЦ ЖИДКОСТИ НА МАЛЫХ ВРЕМЕНАХ ПРИ СОВМЕСТНОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА И ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СТЕНКИ

Норкин М. В.¹, Яковенко А. А.²

FORMS OF FREE BORDERS OF LIQUID ON SMALL TIMES AT JOINT VERTICAL MOVEMENT OF ELLIPTICAL CYLINDER AND HORIZONTAL WALL

Norkin M. V., Yakovenko A. A.

Simultaneous vertical movement of the elliptic cylinder and a horizontal wall (bottom) is considered which have been completely submerged in ideal incompressible liquid on small times. The feature of this task is that under certain conditions a liquid separation from a body occurs as a result of which near a body the cavity is formed and a new internal free border emerges. Generalization of the received results is given in case of detachable acceleration of the circular cylinder which has been partly submerged in liquid.

Keywords: ideal incompressible liquid, the elliptic cylinder, free border, cavity, small times, Frud number, cavity number.

На начальном этапе движения твердого тела в жидкости с большими ускорениями возникает отрыв жидкости от тела, в результате которого вблизи поверхности тела образуется каверна и появляется новая внутренняя свободная граница. Форма каверны и возвышение внешней свободной границы жидкости заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. В статье [1] рассматривалась задача о поступательно-вращательном разгоне эллиптического цилиндра в жидкости на малых временах с учетом отрыва частиц жидкости от поверхности цилиндра (цилиндр движется из состояния покоя в горизонтальном направлении с постоянным поступательным ускорением и вращается вокруг своей оси с постоянным угловым ускорением). Приведены результаты определения формы каверны и конфигурации внешней свободной границы жидкости на малых временах. В настоящей работе исследуется процесс образования каверны вблизи тела на малых временах при одновременном вертикальном движении эллиптического цилиндра и горизон-

тальной стенки. Показано, что при определенных условиях на поверхности эллиптического цилиндра могут образоваться сразу две зоны отрыва. Исследована задача об отрывном разгоне кругового цилиндра, погруженного в жидкость больше чем наполовину. При свободных и безотрывных движениях цилиндра в присутствии разгоняющейся стенки найдены неизвестный заранее закон движения цилиндра и конфигурация внешней свободной границы жидкости.

1. Постановка задачи

Исследуется одновременное вертикальное движение эллиптического цилиндра, полностью погруженного в идеальную несжимаемую однородную жидкость конечной глубины, и горизонтальной стенки (дна) на малых временах. Предполагается, что твердая стенка начинает плавный вертикальный разгон с постоянным ускорением. При этом рассматриваются случаи, когда цилиндр свободно движется в жидкости (в этом случае закон его движения заранее неизвестен) или раз-

¹Норкин Михаил Викторович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры Вычислительной математики и математической физики Южного федерального университета; e-mail: norkin@math.rsu.ru.

²Яковенко Антон Александрович, аспирант кафедры Вычислительной математики и математической физики Южного федерального университета; e-mail: anton.sfedu12@mail.ru.

гоняется из состояния покоя с постоянным ускорением. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с движущейся стенкой, имеет вид:

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \alpha t \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}\xi(x, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$R \in S_2(t);$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t); \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = [\alpha t + \dot{h}_r(t)] n_y, \quad R \in S_{11}(t); \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \alpha t \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(Y - H) = 0, 5\chi, \quad (1.5)$$

$$R \in S_{12}(t);$$

$$\begin{aligned} [x\Phi_x + (y - h_r(t))(\Phi_y - \alpha t - \dot{h}_r(t))] R^{-1} = \\ = \left[R'_0(\theta) + \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \right] \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$R \in S_{12}(t);$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = R^{-2} \left[(\Phi_y - \alpha t - \dot{h}_r(t))x - (y - h_r(t))\Phi_x \right],$$

$$R_0(\theta) = (\cos^2\theta + \varepsilon^{-2} \sin^2\theta)^{-1/2},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \alpha t, \quad y = 0, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, 0) = 0, \quad \xi(x, 0) = 0, \\ \eta(\theta, 0) = 0, \quad h_r(0) = h_0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} Fr = \sqrt{\frac{|w_b|}{g}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho|w_b|a}, \\ \alpha = \frac{w_b}{|w_b|}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам

$$t' = t \sqrt{\frac{a}{|w_b|}}, \quad \Phi' = a\Phi \sqrt{|w_b|a}, \quad p' = \rho|w_b|ap,$$

$$x' = ax, \quad y' = ay,$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y соотношениями: $X = x, Y = y + h(t), h(t) = 0, 5\alpha t^2$.

Здесь $\Phi(x, y, t)$ — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный относительно подвижной системы координат; $\Omega(t)$ — область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ — часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ — оторвавшаяся от поверхности цилиндра внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ — свободная поверхность жидкости, которая первоначально была горизонтальной; w_b — ускорение стенки; g — ускорение свободного падения; Fr — число Фруда; χ — число кавитации; $h_r(t)$ — закон движения цилиндра относительно подвижной системы координат; $\rho = \text{const}$ и $\rho_b = \text{const}$ — плотности жидкости и цилиндра; p — давление в жидкости; a и b — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса; R — радиус вектор с координатами (x, y) ; параметр α характеризует направление движения стенки (при $\alpha = 1$ стенка движется против вектора силы тяжести, а при $\alpha = -1$ — вдоль его направления).

Уравнение внешней свободной границы жидкости относительно системы координат, связанной с движущейся стенкой, имеет вид

$$y = H + \xi(x, t) - 0, 5\alpha t^2,$$

где $\xi = \xi(x, t)$ определяет возмущение свободной границы жидкости относительно неподвижной системы координат, H — глубина первоначально невозмущенного слоя жидкости.

Форма внутренней свободной границы жидкости описывается уравнением в полярных координатах R, θ

$$R = R_0(\theta) + \eta(\theta, t),$$

Давление в жидкости находится на основании интеграла Коши–Лагранжа

$$p = p_0 - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \alpha t \frac{\partial\Phi}{\partial y} + 0, 5 (\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(Y - H) \right], \quad (1.10)$$

где p_0 — безразмерное атмосферное давление.

В точках пересечения внутренней свободной границы с поверхностью цилиндра

(в точках отрыва) ставится условие Кутты–Жуковского, согласно которому скорость жидкости в этих точках должна быть конечной.

Для полной постановки задачи о свободных движениях цилиндра необходимо учесть уравнение его движения

$$\ddot{h}_r(t) + \alpha = -\beta\pi^{-1}\varepsilon^{-1} \int_{S_1} p n_y ds - Fr^{-2}, \quad (1.11)$$

$$\beta = \frac{\rho}{\rho_b}.$$

Так как численные расчеты проводятся для ограниченной области, удобно сразу ввести в рассмотрение боковые стенки, удаленные от тела на большие расстояния ($x = H_R, -H_L; H_R = H_L = 10$). Решение исходной задачи и решения всех рассматриваемых в дальнейшем краевых задач удовлетворяют на боковых стенках условиям непротекания.

2. Асимптотическое решение задачи о свободных движениях эллиптического цилиндра

Решение данной задачи строится в предположении безотрывности обтекания (на всей поверхности цилиндра ставится условие (1.4)). Потенциал скоростей $\Phi(x, y, t)$, возвышение свободной поверхности жидкости $\xi(x, t)$ и закон движения цилиндра $h_r(t)$ представимы в виде следующих асимптотических разложений ($t \rightarrow 0$):

$$\Phi(x, y, t) = t\Phi_0(x, y) + t^2\Phi_1(x, y) + t^3\Phi_2(x, y) + o(t^3), \quad (2.1)$$

$$\xi(x, t) = t^2\xi_0(x) + t^3\xi_1(x) + t^4\xi_2(x) + o(t^4), \quad (2.2)$$

$$h_r(t) = h_r(0) + w_0t^2 + w_1t^3 + w_2t^4 + o(t^4). \quad (2.3)$$

Подставляя асимптотики (2.1)–(2.3) в уравнение и граничные условия поставленной задачи, перенося краевые условия с возмущенных участков границы области $\Omega(t)$ на первоначально невозмущенные уровни с помощью соответствующих разложений в ряды на малых временах, получим для определения первых трех приближений потенциала скорости смешанные краевые задачи тео-

рии потенциала в первоначально невозмущенной области $\Omega(0)$ (прямоугольнике с выброшенным эллипсом). Далее, выражая решения этих краевых задач через две гармонические функции u_0 и u_1 , получим для определения функций Φ_0, Φ_1, Φ_2 следующие выражения:

$$\Phi_0 = \alpha(y - H) + 2w_0u_0, \quad \Phi_1 = 3w_1u_0, \quad (2.4)$$

$$\Phi_2 = 4w_2u_0 + u_1,$$

где функции u_0 и u_1 определяются решением краевых задач в области $\Omega(0)$

$$\Delta u_0 = 0; \quad u_0 = 0, \quad y = H, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = n_y, \quad R \in S_1; \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \quad y = 0,$$

$$\Delta u_1 = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = -w_0 \left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} n_x + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} n_y \right], \quad R \in S_1,$$

$$3u_1 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} [\xi_0(x) - 1, 5\alpha] - 0, 5 \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right)^2 - Fr^{-2} \xi_0(x), \quad y = H.$$

Коэффициенты разложения (2.2) для возмущения свободной границы жидкости найдутся на основании равенств

$$\alpha + 2w_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = 2\xi_0(x), \quad w_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \xi_1(x), \quad (2.7)$$

$$4w_2 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 2w_0 \xi_0'(x) \frac{\partial u_0}{\partial x} + 4\xi_2(x).$$

Для определения неизвестных постоянных w_0, w_1, w_2 воспользуемся уравнением движения цилиндра (1.11). Подставляя асимптотику потенциала скорости (2.1) в выражение для давления (1.10) и осуществляя снос граничных функций с поверхности цилиндра в момент времени t на первоначально невозмущенный уровень, получим для определения давления p следующее выражение ($t \rightarrow 0$):

$$p = p_0 - \Phi_0 - Fr^{-2}(y - H) - 2t\Phi_1 - gt^2 + o(t^2), \quad (2.8)$$

$$g = 3\Phi_2 + f,$$

$$f = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} (w_0 - \alpha) + 0, 5(\nabla \Phi_0)^2 + Fr^{-2}(w_0 + 0, 5\alpha).$$

Далее, подставляя разложения (2.3) и (2.8) в уравнение (1.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , найдем величины w_0 , w_1 , w_2

$$w_0 = 0,5(\beta - 1)(\alpha + Fr^{-2})I_0^{-1}, \quad (2.9)$$

$$w_1 I_0 = 0,$$

$$w_2 = \beta\pi^{-1}\varepsilon^{-1}I_1/(12I_0),$$

$$I_0 = 1 - \beta\pi^{-1}\varepsilon^{-1} \int_{S_1} u_0 n_y ds,$$

$$I_1 = \int_{S_1} (3u_1 + f)n_y ds.$$

Как показывают вычисления, во всех рассматриваемых случаях $I_0 \neq 0$, следовательно, $w_1 = 0$, $\Phi_1 = 0$ и $\xi_1(x) = 0$.

3. Разгон с отрывом

Рассматривается одновременный разгон эллиптического цилиндра и горизонтальной стенки с учетом отрыва частиц жидкости от твердой поверхности (движение цилиндра с большим начальным ускорением). Законы движения цилиндра и стенки предполагаются известными

$$h(t) = 0,5\alpha t^2, \quad h_r(t) = h_r(0) + 0,5w_0 t^2,$$

$$w_0 = \frac{w'_0}{|w_b|},$$

где w'_0 — ускорение цилиндра относительно подвижной системы координат.

В результате отрыва вблизи цилиндра образуется каверна и появляется новая внутренняя свободная граница. Решение задачи на малых временах будем разыскивать в виде следующих асимптотических разложений ($t \rightarrow 0$):

$$\Phi(x, y, t) = t\Phi_0(x, y) + o(t), \quad (3.1)$$

$$\xi(x, t) = t^2\xi_0(x) + o(t^2), \quad (3.2)$$

$$\eta(\theta, t) = t^2\eta_0(\theta) + o(t^2). \quad (3.3)$$

Подставляя эти разложения в уравнение и граничные условия задачи (1.1)–(1.9), в главном приближении получим для определения функции Φ_0 смешанную краевую задачу теории потенциала с неизвестным априори разбиением границы тела на области контакта и отрыва

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0 &= 0, & R \in \Omega(0); \\ \Phi_0 &= 0, & y = H, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = (\alpha + w_0)n_y, \quad (3.5)$$

$$F - \Phi_0 \geq 0, \quad R \in S_{11}(0),$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \geq (\alpha + w_0)n_y, \quad (3.6)$$

$$F - \Phi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0),$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} = \alpha, \quad y = 0; \quad (3.7)$$

$$F = 0,5\chi - Fr^{-2}(y - H).$$

Здесь $S_{11}(0)$ и $S_{12}(0)$ — первоначальные зоны контакта и отрыва, которые получаются в результате предельного перехода при $t \rightarrow 0$ границ $S_{11}(t)$ и $S_{12}(t)$. Динамическое условие в виде неравенства в (3.5) означает, что давление на смоченной поверхности цилиндра не может быть меньше давления в каверне. Кинематическое условие в виде неравенства в (3.6) говорит о том, что жидкие частицы не могут входить внутрь твердого тела, однако теперь им разрешается оторваться от твердой поверхности. В силу регулярности решения задачи (3.4)–(3.7) вблизи точек отрыва, условие Кутты–Жуковского в главном приближении будет выполнено автоматически.

После решения задачи (3.4)–(3.7) функции $\eta_0(\theta)$, $\xi_0(x)$ определяются на основании следующих равенств:

$$\begin{aligned} R_0^{-1}(\theta)[x\Phi_{0x} + f_1 f_2] &= \\ = R'_0(\theta)R_0^{-2}(\theta)[x f_1 - f_2 \Phi_{0x}] + 2\eta_0(\theta), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$f_1 = \Phi_{0y} - \alpha - w_0, \quad f_2 = y - h_r(0);$$

$$\Phi_{0y} = 2\xi_0(x).$$

Анализ решения задачи с односторонними ограничениями показывает, что функция $\eta(\theta, t)$, определяемая формулами (3.3) и (3.8), при любом фиксированном t будет непрерывной в точках отрыва ($\theta = \theta_{s1}, \theta_{s2}$), а ее первая производная будет иметь в них особенность типа квадратного корня. Для получения решения кинематического уравнения внутренней свободной границы класса C^1 , нужно построить погранслоиные решения в точках отрыва и согласовать их с внешним разложением (3.3). Определение формы внутренней свободной границы жидкости с учетом погранслоиных решений в точках отрыва проведем для случая кругового

цилиндра. Вначале рассмотрим опускающийся цилиндр. Поступая по аналогии с работами [1–3], внутреннее представление свободной границы в окрестности первой точки отрыва $\theta = \theta_{s1}$ ($0 < \theta_{s1} < \pi/2$) будем искать в виде

$$\eta(\theta, t) = 0, 5\beta_1 t^3 H(\tau) + o(t^3),$$

$$\tau = \frac{\theta - \theta_{s1}}{t^2}, \quad (3.9)$$

где $H(\tau)$ — новая неизвестная функция, а β_1 — коэффициент в разложении функции $\eta_0(\theta)$ в окрестности рассматриваемой точки

$$\eta_0(\theta) = 0, 5 \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - (\alpha + w_0) \sin \theta \right) \sim$$

$$\sim 0, 5\beta_1 \sqrt{\theta - \theta_{s1}}. \quad (3.10)$$

Подставляя в уравнение внутренней свободной границы (1.6) разложения (1.1) и (3.9) и ограничиваясь только главными по t членами (порядка t^2), получим для определения функции $H(\tau)$ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с нулевым начальным условием и условием сращения с внешним решением на бесконечности, которое следует из (3.10)

$$(\tau - 0, 5\beta)H'(\tau) - 1, 5H(\tau) = -\sqrt{\tau}, \quad (3.11)$$

$$0 < \tau < \infty,$$

$$H(0) = 0, \quad H(\tau) \sim \sqrt{\tau}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$

где $\beta = -(\alpha + w_0 + Fr^{-2}) \cos \theta_{s1}$.

Решение задачи (3.11)–(3.12), отвечающее случаю $\beta \geq 0$, имеет вид

$$H(\tau) = \frac{4}{3\beta} \tau^{3/2}, \quad 0 \leq \tau \leq 0, 5\beta, \quad (3.13)$$

$$H(\tau) = \frac{4}{3\beta} \left[\tau^{3/2} - (\tau - 0, 5\beta)^{3/2} \right], \quad (3.14)$$

$$0, 5\beta \leq \tau < \infty.$$

Форма внутренней свободной границы жидкости вблизи второй точки отрыва $\theta_{s2} = \pi - \theta_{s1}$ получается зеркальным отображением полученного решения относительно оси y .

По аналогии исследуется случай поднимающегося цилиндра. Для определения погранслоного решения в точке $\theta = \theta_{s1}$ ($-\pi/2 < \theta_{s1} < 0$) по формулам (3.9)–(3.12) необходимо величину $\theta - \theta_{s1}$ заменить на $\theta_{s1} - \theta$, а постоянную β на $-\beta$.

Отметим, что задача (3.4)–(3.7) также позволяет определить в главном приближении форму свободной поверхности жидкости при отрывном разгоне кругового цилиндра, погруженного в жидкость больше чем наполовину ($\chi = 0$).

4. Численная реализация и анализ результатов

Для решения смешанной краевой задачи (3.4)–(3.7) с неизвестными априори областями контакта применяется специальный итерационный процесс, позволяющий свести решение рассматриваемой нелинейной задачи к последовательному решению линейных краевых задач [1–3]. Последние задачи решаются численно с помощью пакета конечных элементов FreeFem++ [4].

Вначале рассмотрим задачу о свободных движениях эллиптического цилиндра в присутствии разгоняющейся горизонтальной стенки. На рис. 1а–1в показана форма внешней свободной поверхности жидкости в моменты времени $t = 0, 5, 0, 8, 1, 1, 2$ при следующих фиксированных значениях параметров задачи: $Fr = 0, 6$, $\varepsilon = 0, 7$, $H = 5$, $h_0 = 4, 2$, $\beta = 0, 1$, $\alpha = 1$. Коэффициенты разложения (2.3), определяющего закон движения цилиндра относительно подвижной системы координат, находятся по формулам (2.9) и имеют следующие приближенные значения: $w_0 = -1, 54$, $w_2 = 0, 037$ ($w_1 = 0$). Из рисунков хорошо видно, что вначале на поверхности жидкости образуется впадина, а затем формируются две симметричные струи, интенсивность которых возрастает с увеличением времени. При изменении параметров задачи форма внешней свободной границы может качественно измениться.

Отметим, что в случае опускающейся стенки ($\alpha = -1$), тяжелый цилиндр тонет при $Fr < 1$ и всплывает при $Fr > 1$. Аналогично легкий цилиндр всплывает при $Fr < 1$ и тонет при $Fr > 1$.

Задача об определении формы каверны и конфигурации внешней свободной границы жидкости, вызванных опускающимся цилиндром, исследовалась при следующих значениях параметров: $Fr = 1$, $w_0 = -2$, $\chi = 0, 1$, $\varepsilon = 1$, $H = 5$, $h_0 = 3, 8$, $\alpha = -1$, $t = 0, 5$. На рис. 2а показано хорошее согласование погранслоных решений (они изображены пунктиром) с внешним разложением во всем диапазоне изменения угла θ ($\theta_1 < \theta < \pi - \theta_1$,

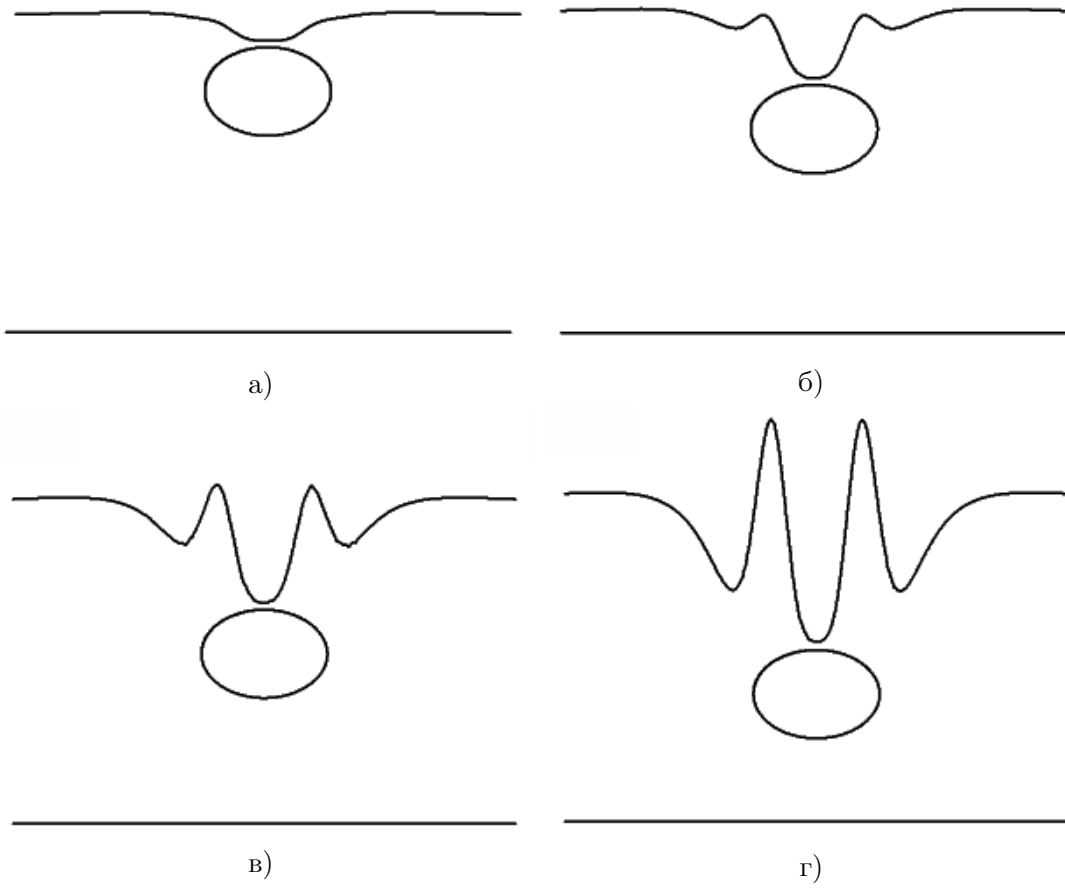


Рис. 1

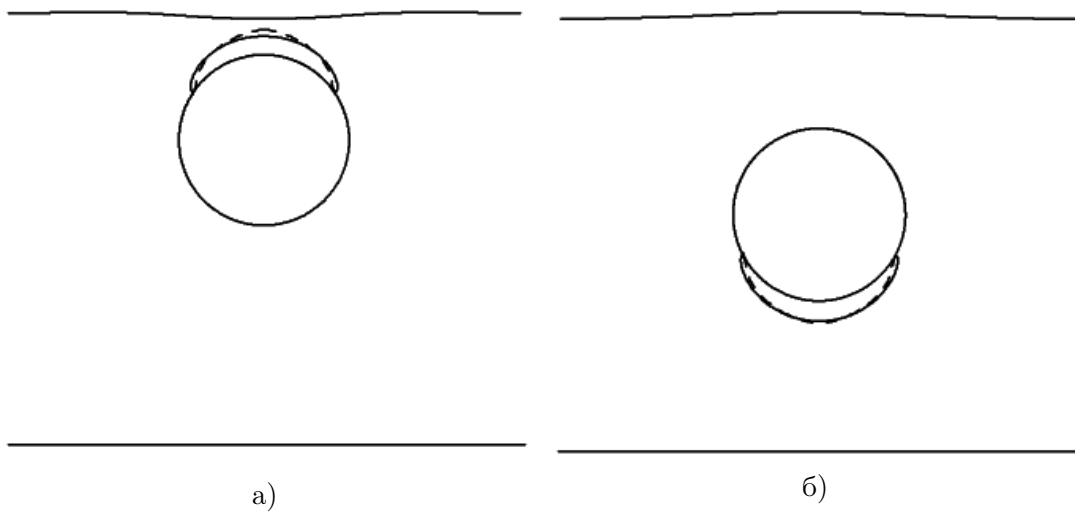


Рис. 2

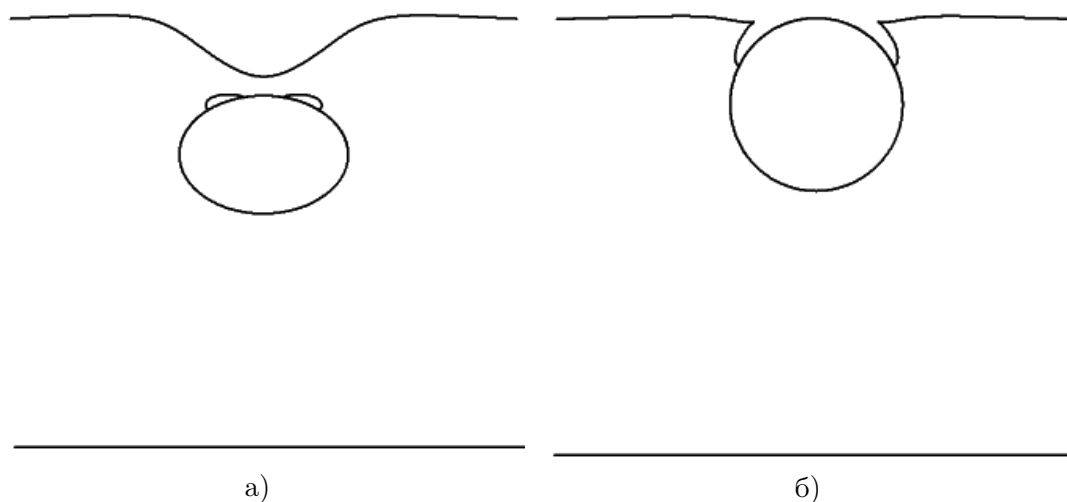


Рис. 3

$\theta_1 \approx 0,59$). Аналогичная картина наблюдается и в случае поднимающегося цилиндра ($Fr = 1$, $w_0 = 2$, $\chi = 0,1$, $\varepsilon = 1$, $H = 5$, $h_0 = 2,5$, $\alpha = -1$, $t = 0,5$ (рис. 2б), $-\pi + \theta_1 < \theta < \theta_1$, $\theta_1 \approx -0,49$).

Можно считать, что рассмотренные примеры о разгоне с отрывом соответствуют физической ситуации, когда радиус цилиндра равен 1–2 м, а давление в каверне немного меньше атмосферного.

Интересно отметить, что при определенных условиях на поверхности эллиптического цилиндра могут образоваться сразу две зоны отрыва. Такая ситуация возникает, например, при следующих фиксированных значениях параметров: $Fr = 1$, $w_0 = -5$, $\chi = 2$, $\varepsilon = 0,7$, $H = 5$, $h_0 = 4,1$, $\alpha = -1$, $t = 0,5$ (рис. 3а). Угловые координаты точек отрыва правой внутренней свободной границы имеют следующие приближенные значения: $\theta_1 = 0,68$, $\theta_2 = 1,23$.

На рис. 3б изображена форма свободной границы жидкости при отрывном раз-

гоне кругового цилиндра, погруженного в жидкость больше, чем наполовину ($Fr = 1$, $\chi = 0$, $w_0 = -2$, $H = 5$, $h_0 = 4,3$, $\alpha = -1$, $t = 0,5$, $\theta_1 = 0,46$).

Литература

1. Норкин М. В., Яковенко А. А. Начальный этап движения эллиптического цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52. №11. С. 2060–2070.
2. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // J. Eng. Math. 2011. Vol. 70. P. 239–254.
3. Норкин М. В. Движение кругового цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны // Изв. РАН. МЖГ. 2012. №3. С. 101–112.
4. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: ЮФУ, 2008. 256 с.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, эллиптический цилиндр, свободная граница, каверна, малые времена, число Фруда, число кавитации.