УДК 517.95

НЕГЛАДКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РОССБИ

Свидлов А. А.[1]***, Бирюк А. Э.***[2]***, Дроботенко М. И.***[3]

UNSMOOTH SOLUTION OF ROSSBY EQUATION

Svidlov A. A., Biryuk A. E, Drobotenko M. I.

The work represents the proof of existence and uniqueness of the first initial boundary value problem solution of Rossby equation with the time smoothness which is lesser than it was considered before.

Keywords: planetary waves equation, Rossby equation, generalized solution.

В геофизической гидродинамике изучаются волны в океане, возникновение которых обуславливается вращением Земли. Эти волны носят название планетарных. Движение планетарных волн в так называемом приближении β-плоскости описывается линейным уравнением Россби [2], которое рассматривалось в работах Успенского С.В., Демиденко Г.В., Монина А.С. и др. [3–7]. Можно рассматривать и нелинейные варианты уравнения Россби, включив нелинейность в правую часть, подобно тому, как это сделано в работе [6].

В статье [1] было дано определение обобщенного решения первой начально-краевой задачи для уравнения Россби и доказаны его существование и единственность. По аналогии с упомянутой выше статьей можно дать и определение обобщенного решения для смешанной начально-краевой задачи. При этом от обобщенных решений требовалась достаточно высокая гладкость по времени. Целью данной работы является рассмотрение обобщенных решений с меньшей гладкостью по времени.

1. Обозначения

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел; $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; Q — такая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-ляпуновской границей ∂Q , что вложение $H^1(Q) \subset L_2(Q)$ компактно (достаточным условием компактности этого вложения является выполнение условие конуса [8]); $\bar{Q}$ — замыкание области Q; $C^k(Q)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на Q со значениями в $\mathbb{R}$; $C^k(\bar{Q})$ — подмножество таких функций из $C^k(Q)$, что все производные от нулевого до k-го порядка включительно непрерывно продолжаются на ∂Q;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2};$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right);$$

$\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к ∂Q;

$$H^k(Q) = W_2^k(Q), \quad k \in \mathbb{N}_0;$$

$$T > 0, \quad T \in \mathbb{R};$$

$C^k([0, T], V)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве V; $L_1([0, T], V)$ — множество суммируемых функций, определенных на $[0, T]$

[1]Свидлов Александр Анатольевич, преподаватель кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: svidlov@mail.ru.

[2]Бирюк Андрей Эдуардович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: abiryuk@kubsu.ru.

[3]Дроботенко Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей алгебры и геометрии Кубанского государственного университета; e-mail: mdrobotenko@mail.ru.

со значениями в банаховом пространстве V; Γ_2 — такое открытое множество в ∂Q, что множество $\Gamma_1 = \partial Q \setminus \Gamma_2$ является замыканием некоторого открытого подмножества в ∂Q; $H^1_{\Gamma_1}(Q) = \{v \in H^1(Q) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$ — подпространство функций из $H^1(Q)$, имеющих нулевой след на Γ_1.

Пусть $(\mathbf{x}, t) \mapsto u(\mathbf{x}, t)$ — функция определенная на $Q \times T$. В дальнейшем для заданного $t \in [0, T]$ через $u(t)$ будем обозначать функцию $\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x}, t)$.

2. Гладкое обобщенное решение смешанной начально-краевой задачи

Рассмотрим смешанную начально-краевую задачу для уравнения Россби:

$$\Delta u_t + u_{x_1} = f, \quad \mathbf{x} \in Q, \quad T \geqslant t > 0, \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2.2}$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \tag{2.3}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} u\right|_{\Gamma_2} = 0, \tag{2.4}$$

где $u_0 \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$, $f \in C([0, T], L_2(Q))$.

Определение 1. Классическим решением задачи (2.1)–(2.4) будем называть функцию $u \in C^1([0, T], C^2(\bar{Q}))$, удовлетворяющую уравнению (2.1), начальному (2.2) и граничным условиям (2.3),(2.4).

Определение 2. Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.4) будем называть функцию $u \in C^1\big([0, T], H^1_{\Gamma_1}(Q)\big)$, для которой выполняются следующие условия:

1) для любой функции $h \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$ при любом $t \in [0, T]$ справедливо интегральное тождество

$$\int_Q \left(\nabla u_t(\mathbf{x}, t) \nabla h(\mathbf{x}) - u_{x_1}(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} = = -\int_Q f(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}; \tag{2.5}$$

2) $u(0) = u_0$.

Отметим, что первая начально-краевая задача для уравнения Россби, рассмотренная в [1], — частный случай смешанной задачи (при $\Gamma_2 = \phi$).

Связь между классическим и обобщенным решением задачи (2.1)–(2.4) устанавливается леммами 1 и 2.

Лемма 1. Классическое решение задачи (2.1)–(2.4) является также и обобщенным.

Лемма 2. Пусть

$$u_0 \in C^2(\bar{Q}) \text{ и } \left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} u_0\right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Если обобщенное решение u принадлежит множеству $C^1\big([0, T], C^2(\bar{Q})\big)$, то оно является классическим.

Доказательства приведенных лемм практически полностью повторяют доказательства лемм 1, 2 из [1].

3. L_1-обобщенное решение смешанной начально-краевой задачи

Для того, чтобы снизить требования на гладкость обобщенного решения смешанной начально-краевой задачи, дадим другое определение обобщенного решения.

Определение 3. L_1-обобщенным решением задачи (2.1)–(2.4) будем называть такую функцию $u \in L_1\big([0, T], H^1_{\Gamma_1}(Q)\big)$, что для любой функции $h \in C^1\big([0, T], H^1_{\Gamma_1}(Q)\big)$, $h(T) = 0$, справедливо интегральное тождество

$$\int_0^T \int_Q \nabla u(\mathbf{x}, t) \nabla h_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_Q u_{x_1}(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt + \int_Q \nabla u_0(\mathbf{x}) \nabla h(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = = \int_0^T \int_Q f(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt. \tag{3.1}$$

Тождество (3.1) перепишем в следующем виде:

$$\int_0^T (u(t), h_t(t))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} dt + \int_0^T (u_{x_1}(t) - f(t), h(t))_{L_2(Q)} dt = = -(u_0, h(0))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}, \tag{3.2}$$

где $(\cdot, \cdot)_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}$ — скалярное произведение в пространстве $H^1_{\Gamma_1}(Q)$, определенное формулой

$$(\varphi, \psi)_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} = \int_Q \nabla \varphi(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Установим связь между L_1-обобщенным решением задачи (2.1)–(2.4) и ее обобщенным решением.

Лемма 3. Обобщенное решение задачи (2.1)–(2.4) является L_1-обобщенным.

Доказательство. Пусть u — обобщенное решение задачи (2.1)–(2.4). Тогда $u \in C^1\left([0,T], H^1_{\Gamma_1}(Q)\right)$, $u(0) = u_0$ и для любой $h \in C^1\left([0,T], H^1_{\Gamma_1}(Q)\right)$, удовлетворяющей условию $h(T) = 0$ при любом фиксированном $t \in [0,T]$, из (2.5) следует равенство

$$(u_t(t), h(t))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} = (u_{x_1}(t) - f(t), h(t))_{L_2(Q)}.$$

Интегрируя последнее равенство по t, получим

$$\int_0^T (u_t(t), h(t))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} dt = \\ = \int_0^T (u_{x_1}(t) - f(t), h(t))_{L_2(Q)} dt. \quad (3.3)$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям

$$\int_0^T (u(t), h_t(t))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} dt + \\ + \int_0^T (u_t(t), h(t))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} dt = \\ = -(u(0), h(0))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}, \quad (3.4)$$

из (3.3), с учетом $u(0) = u_0$, получим интегральное тождество (3.2). Лемма доказана. □

Лемма 4. Пусть $u \in C^1\left([0,T], H^1_{\Gamma_1}(Q)\right)$ — L_1-обобщенное решение задачи (2.1) – (2.4). Тогда оно является обобщенным решением.

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа.

1. Докажем сначала, что $u(0) = u_0$. Используя формулу (3.4), преобразуем интегральное тождество (3.2) к виду

$$\int_0^T -(u_t(t), h(t))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} dt + \\ + \int_0^T (u_{x_1}(t) - f(t), h(t))_{L_2(Q)} dt = \\ = (u(0) - u_0, h(0))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}. \quad (3.5)$$

Через h_k будем обозначать функции

$$h_k(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, 0) - u_0(\mathbf{x}))\psi_k(t),$$

где непрерывно дифференцируемая функция ψ_k удовлетворяет условиям:

$$\operatorname{supp} \psi_k \subset \left[0, \frac{T}{k+1}\right], \quad 0 \leqslant \psi_k(t) \leqslant 1$$

для всех $t \in [0,T]$ и $\psi_k(0) = 1$. Очевидно, что $h_k(T) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Подставив в (3.5) h_k вместо h

$$-\int_0^T \psi_k(t)(u_t(t), u(0) - u_0)_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} dt + \\ + \int_0^T \psi_k(t)(u_{x_1}(t) - f(t), u(0) - u_0)_{L_2(Q)} dt + \\ = \|u(0) - u_0\|^2_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}, \quad (3.6)$$

и, перейдя в (3.6) к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$\|u(0) - u_0\|^2_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} = 0,$$

т.е. $u_0 = u(0)$.

2. Теперь докажем, что выполняется интегральное тождество (2.5). С учетом равенства $u_0 = u(0)$ интегральное тождество (3.5) принимает вид

$$\int_0^T \big(-(u_t(t), h(t))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} + \\ + (u_{x_1}(t) - f(t), h(t))_{L_2(Q)}\big) dt = 0.$$

Полагая $h(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$, где $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$, $\psi \in C^1([0,T])$, $\psi(T) = 0$, получим

$$\int_0^T \psi(t) F(t) dt = 0. \quad (3.7)$$

Здесь

$$F(t) = -(u_t(t), \varphi)_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} + \\ + (u_{x_1}(t) - f(t), \varphi)_{L_2(Q)}.$$

Нетрудно видеть, что F — непрерывная функция. Из произвольности ψ в равенстве (3.7) следует, что функция $F(t) = 0$ на $[0,T]$. Таким образом, справедливо интегрального тождества (2.5). Лемма доказана. □

4. Единственность L_1-обобщенного решения

4.1. Вспомогательные результаты

Для доказательства основного результата (теоремы 2) приведем лемму 5, лемму 6 Гронуолла-Беллмана и определение обобщенного решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона.

Лемма 5. Пусть $g_1, g_2 \in L_1([0,T])$ и для любой $\psi \in C^1([0,T])$, удовлетворяющей условию $\psi(T) = 0$, имеет место интегральное тождество

$$\int_0^T g_1(t)\psi'(t)dt = -\int_0^T g_2(t)\psi(t)dt, \quad (4.1)$$

тогда для почти всех $t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$g_1(t) = \int_0^t g_2(s)ds. \quad (4.2)$$

Доказательство. Из интегрального тождества (4.1) следует, что функция g_2 является обобщенной производной функции g_1. Тогда по теореме об абсолютной непрерывности функции из пространства $W_1^1(0,T)$ [9, гл.2, §6] для почти всех $t \in [0,T]$ должно выполнится равенство

$$g_1(t) = C + \int_0^t g_2(s)ds, \quad (4.3)$$

где C – некоторая константа.

Покажем, что $C = 0$. Подставляя (4.3) в (4.1) и интегрируя по частям, получим

$$-\int_0^T g_2(t)\psi(t)dt = \\ = \int_0^T \left(C + \int_0^t g_2(s)ds\right)\psi'(t)dt = \\ = C\psi(0) - \int_0^T g_2(t)\psi(t)dt.$$

Откуда

$$C\psi(0) = 0,$$

т.е. $C = 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6.(Гронуолла-Беллмана) Пусть функция $u \in C([0,T])$ удовлетворяют при всех $t \in [0,T]$ неравенствам

$$0 \leqslant u(t) \leqslant a + \int_0^t bu(s)ds,$$

где $a, b \geqslant 0$. Тогда для всех $t \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$u(t) \leqslant a \exp(bt).$$

Доказательство. Представим функцию u в виде: $u(t) = \xi(t)\exp(bt)$. Очевидно, что ξ непрерывна на $[0,T]$. Обозначим через τ точку, в которой ξ принимает наибольшее значение. Тогда из условий леммы следует

$$\xi(\tau)\exp(b\tau) \leqslant \\ \leqslant a + \int_0^\tau b\xi(s)\exp(bs)ds \leqslant \\ \leqslant a + \xi(\tau)\int_0^\tau b\exp(bs)ds,$$

поэтому

$$\xi(\tau)\exp(b\tau) \leqslant a + \xi(\tau)\left(\exp(b\tau) - 1\right),$$

откуда

$$\xi(\tau) \leqslant a.$$

Лемма доказана. $\square$

Определение 4. Пусть функция $\psi \in L_2(Q)$. *Обобщенным решением* смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \psi \text{ в } Q, \\ \varphi|_{\Gamma_1} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\varphi\right|_{\Gamma_2} = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

называется функция $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$, для всех $h \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$ удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_Q \nabla\varphi(\mathbf{x})\nabla h(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -\int_Q \psi(\mathbf{x})h(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (4.5)$$

Определим оператор

$$\Delta_3^{-1} : L_2(Q) \to H^1_{\Gamma_1}(Q)$$

следующим образом: $\Delta_3^{-1}\psi = \varphi$, если φ — обобщенное решение задачи (4.4). Оператор Δ_3^{-1} определен корректно, так как справедлива

Теорема 1. [10] *Обобщенное решение краевой задачи (4.4) для уравнения Пуассона существует, единствено и удовлетворяет неравенству*

$$\|\varphi\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|\psi\|_{L_2(Q)},$$

где C — не зависящая от ψ константа.

4.2. Теорема о единственности

Теорема 2. Задача (2.1)–(2.4) может иметь не более одного L_1-обобщенного решения.

Доказательство. Достаточно доказать единственность решения L_1-обобщенного решения однородной ($f = 0$ и $u_0 = 0$) задачи (2.1)–(2.4).

Пусть u является L_1-обобщенным решением однородной задачи (2.1) – (2.4). Докажем, что $u = 0$. Доказательство будем проводить в четыре этапа.

1. Покажем, что для произвольной функции $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$ при почти всех $t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$(u(t),\varphi)_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} = \\ = \left(\int_0^t u_{x_1}(s)ds, \varphi\right)_{L_2(Q)}. \quad (4.6)$$

Для однородной задачи (2.1)–(2.4) интегральное тождество (3.2) принимает вид

$$\int_0^T (u(t), h_t(t))_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}dt = \\ = -\int_0^T (u_{x_1}(t), h(t))_{L_2(Q)}dt. \quad (4.7)$$

Выберем h в (4.7) так, чтобы $h(\mathbf{x},t) = \varphi(\mathbf{x})\psi(t)$, где $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$, а $\psi \in C^1([0,T])$, $\psi(T) = 0$, получим

$$\int_0^T \psi'(t)(u(t),\varphi)_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}dt = \\ = -\int_0^T \psi(t)(u_{x_1}(t),\varphi)_{L_2(Q)}dt. \quad (4.8)$$

Введем обозначение $g_{1,\varphi}(t) = (u(t),\varphi)_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}$ и $g_{2,\varphi}(t) = (u_{x_1}(t),\varphi)_{L_2(Q)}$. Функции $g_{1,\varphi}$, $g_{2,\varphi}$ принадлежат пространству $L_1([0,T])$. Перепишем тождество (4.8) в виде

$$\int_0^T g_{1,\varphi}(t)\psi'(t)dt = -\int_0^T g_{2,\varphi}(t)\psi(t)dt.$$

Применим к полученному равенству лемму 5, тогда для почти всех $t \in [0,T]$ имеет место равенство

$$(u(t),\varphi)_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} = \int_0^t (u_{x_1}(s),\varphi)_{L_2(Q)}ds. \quad (4.9)$$

По теореме Бохнера [11] имеет место равенство

$$\int_0^t (u_{x_1}(s),\varphi)_{L_2(Q)}ds = \left(\int_0^t u_{x_1}(s)ds, \varphi\right)_{L_2(Q)},$$

поэтому из (4.9) следует равенство (4.6).

2. Докажем теперь, что для почти всех $t \in [0,T]$ равенство (4.6) выполняется для всех $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$.

Обозначим через T_φ множество точек отрезка $[0,T]$, для которых равенство (4.6) не выполняется для функции $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$. Пусть $S \subset H^1_{\Gamma_1}(Q)$ — счетное всюду плотное в $H^1_{\Gamma_1}(Q)$ множество. Через T_S будем обозначать множество точек отрезка $[0,T]$, для которых равенство (4.6) выполняется не для всех $\varphi \in S$. Очевидно, $T_S = \bigcup\limits_{\varphi\in S} T_\varphi$. По доказанному мера T_φ равна нулю. Так как S счетно, то мера T_S также равна нулю.

Пусть $t \in [0,T]$, $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$. Определим функционал

$$J(\varphi) = (u(t),\varphi)_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} - \left(\int_0^t u_{x_1}(s)ds, \varphi\right)_{L_2(Q)}.$$

Равенство $J(\varphi) = 0$ эквивалентно выполнению равенства (4.6). Пусть $t \in [0,T] \setminus T_S$, тогда $J(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in S$. В силу непрерывности функционала J и плотности S в $H^1_{\Gamma_1}(Q)$ равенство $J(\varphi) = 0$ выполняется для всех $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$, т.е. для почти всех $t \in [0,T]$ равенство (4.6) выполнено для всех $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(Q)$.

3. Докажем, что функция u принадлежит пространству $C([0,T], H^1_{\Gamma_1}(Q))$ и удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\|_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} \leqslant \\ \leqslant \left\|\Delta_3^{-1}\right\| \int_0^t \|u(s)\|_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}\,ds. \quad (4.10)$$

Сравнивая равенство (4.6) с интегральным тождеством (4.5), приходим к выводу, что для $t \in [0,T]\setminus T_S$ функция $u(t)$ является обобщенным решением смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона с правой частью $\int_0^t u_{x_1}(s)ds$, т.е. справедливо равенство

$$u(t) = -\Delta_3^{-1}\int_0^t u_{x_1}(s)ds. \quad (4.11)$$

Правая часть равенства (4.11) не изменится если переопределить значения функции u

на множестве нулевой меры. Поэтому функцию u на множестве T_S можно изменить так, чтобы равенство (4.11) выполнялось для всех $t \in [0, T]$.

Из равенства (4.11) следуют неравенства

$$\|u(t_2) - u(t_1)\|_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} \leqslant \leqslant \left\|\Delta_3^{-1}\right\| \left\| \int_{t_1}^{t_2} u_{x_1}(s) ds \right\|_{L_2(Q)}, \quad (4.12)$$

где $t_1 \leqslant t_2$ — произвольные точки из $[0, T]$, и

$$\|u(t)\|_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} \leqslant \leqslant \left\|\Delta_3^{-1}\right\| \left\| \int_0^t u_{x_1}(s) ds \right\|_{L_2(Q)}, \quad (4.13)$$

где t — любая точка из $[0, T]$.

В силу абсолютной непрерывности интеграла Бохнера [11] и ограниченности оператора Δ_3^{-1} из неравенства (4.12) следует непрерывность функции u, а следовательно, и непрерывность $\|u(\cdot)\|_{H^1_{\Gamma_1}(Q)}$.

Из неравенства (4.13) следует неравенство

$$\|u(t)\|_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} \leqslant \left\|\Delta_3^{-1}\right\| \int_0^t \|u_{x_1}(s)\|_{L_2(Q)} \, ds,$$

из которого в свою очередь следует неравенство (4.10).

4. Применим к неравенству (4.10) лемму 6. Получим, что $\|u(t)\|_{H^1_{\Gamma_1}(Q)} = 0$ на $[0, T]$, поэтому однородная задача имеет только тривиальное решение. Теорема доказана. □

Литература

1. *Свидлов А.А.* О первой начально-краевой задаче для уравнения Россби. // Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2008, №3. С. 48-52.
2. *Бреховских Л. М.*, Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М., Наука,1982. 335 с.
3. *Успенский С. В.*, Демиденко Г. В. О поведении при $t \to \infty$ решений некоторых задач гидродинамики. //ДАН СССР. 1985. Т.280. №5. С. 1072-1075.
4. *Тикиляйнен А. А.* Об одной задаче, связанной с теорией планетарных волн. // ЖВМ и МФ. 1988. Т.28. №4. С. 534-548.
5. *Монин А. С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.
6. *Biryuk A.* Lower bounds for derivatives of solutions for nonlinear Schrödinger equations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 2009, V. 139. P. 237-251.
7. *Свешников А. Г.*, Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007. 735 с.
8. *Adams R.A.* Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975. 286 p.
9. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М., Высшая школа, 1977. 434 с.
10. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

Ключевые слова: уравнение планетарных волн, уравнение Россби, обобщенное решение.

Статья поступила 20 января 2013 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар