

УДК 539.3; 548.735.6; 552.112

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В МИКРОПОЛОСКОВОМ ПЛАЗМОННОМ ВОЛНОВОДЕ

*Селина Н. В.<sup>1</sup>, Векшин М. М.<sup>2</sup>, Тумаев Е. Н.<sup>3</sup>, Яковенко Н. А.<sup>4</sup>,  
Благодырь М. А.<sup>5</sup>*

ANALYTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC FIELD DISTRIBUTION IN THE  
MICROSTRIP PLASMON WAVEGUIDE

Selina N. V., Vekshin M. M., Tumayev E. N., Yakovenko N. A., Blagodyr M. A.

The analytic solution of the wave equation for the electromagnetic field of the eigen modes the microstrip plasmon optical waveguide is obtained. It is shown that general solution of this problem allows the separation of variables. The results of calculations of electromagnetic field distribution in the waveguide coincide with high accuracy of results of the direct finite-difference wave equation solution.

Keywords: electromagnetic field, optical waveguide, surface plasmons, vector wave equation, analytic solution.

### Введение

В настоящее время развитие высокоэффективных технологий передачи и обработки данных привело к необходимости создания интегрально-оптических схем на плазмонах [1]. Использование таких схем в оптоэлектронных приборах направлено на уменьшение их размеров и повышению эффективности. На основе поверхностных плазмонов могут создаваться различные волноводные структуры, которые образуют стандартную компонентную базу элементов интегральной оптики.

В роли перспективных плазмонных волноводов выступают полосковые металлические передаточные линии, такие, например, как наноразмерный полосковый волновод из золота на подложке из оксида кремния. Распределение интенсивности плазмонных полей вдоль волноводов поддерживает распро-

странение плазмонного сигнала на расстояния до единиц сантиметров. Понимание таких процессов и оптимизация волноводов осуществляются на основе решения уравнений Максвелла в этой геометрии. Целью настоящей работы является развитие аналитического подхода к решению векторного волнового уравнения, описывающего свойства плазмонных полосковых волноводов.

### 1. Теоретическое рассмотрение задачи

С целью решения поставленной задачи рассмотрим распространение электромагнитных волн в неоднородной среде. В уравнениях Максвелла для монохроматической электромагнитной волны с частотой  $\omega$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\varepsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{E},$$

<sup>1</sup>Селина Наталья Викторовна, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник кафедры оптоэлектроники Кубанского государственного университета; e-mail: selina\_natalia@mail.ru.

<sup>2</sup>Векшин Михаил Михайлович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры оптоэлектроники Кубанского государственного университета; e-mail: vekshin@phys.kubsu.ru.

<sup>3</sup>Тумаев Евгений Николаевич д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физики и информационных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: tumayev@phys.kubsu.ru.

<sup>4</sup>Яковенко Николай Андреевич д-р техн. наук, профессор кафедры оптоэлектроники Кубанского государственного университета; e-mail: dean@phys.kubsu.ru.

<sup>5</sup>Благодырь Марина Александровна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры технической защиты информации филиала Военной академии связи в г. Краснодаре; e-mail: blagodyr\_marina@mail.ru

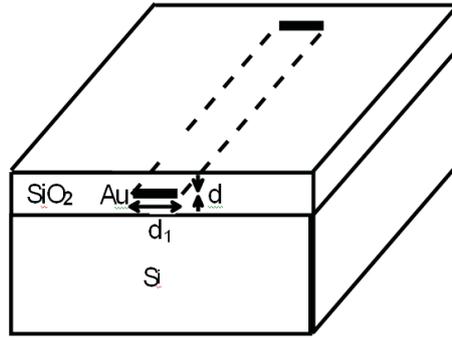


Рис. 1. Оптический плазмонный микрополосковый волновод

диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$  зависит от координат,  $c$  — скорость света в вакууме.

Исключение напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  из уравнений Максвелла дает уравнение для напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$

$$\Delta \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} - \text{grad}(\text{div} \mathbf{E}) = 0.$$

Исключение же напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  дает уравнение для  $\mathbf{H}$

$$\Delta \mathbf{H} + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon} [\nabla \varepsilon \times \text{rot} \mathbf{H}] = 0,$$

где квадратными скобками обозначено векторное произведение.

В декартовых координатах  $(x, y, z)$  последнее уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \\ & - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

В случае рассматриваемого волновода, не содержащего анизотропных слоев, и имеющего правильную прямоугольную форму поперечного сечения, для описания свойств волноводных мод подходит полувекторное волновое уравнение [2]

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \kappa^2 H = 0, \quad (1.1)$$

где  $\kappa^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$ ,  $H = H_x$  — поперечная компонента магнитного поля,  $\omega$  — частота излу-

чения,  $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$  — распределение диэлектрической проницаемости в поперечном сечении волноводной структуры,  $\beta$  — константа распространения волноводной моды.

На рис. 1 показан оптический микрополосковый волновод. Он состоит из пленки золота толщиной  $d$  и шириной  $d_1$ , помещенной в однородную диэлектрическую среду оксида кремния.

Исключая угловые сегменты из области сечения волновода диэлектрическую проницаемость для такой геометрии можно записать в едином аналитическом виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) = & \varepsilon_0 \theta(|x| - d/2) \theta(|y| - d_1/2) + \\ & + \varepsilon_1 \theta(d/2 - |x|) \theta(|y| - d_1/2) + \\ & + \varepsilon_1 \theta(d_1/2 - |y|) \theta(|x| - d/2), \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_0$  — комплексная диэлектрическая проницаемость золота на частоте, соответствующей длине волны 1,55 мкм,  $\varepsilon_1$  — вещественная диэлектрическая проницаемость окиси кремния на той же частоте,  $\theta(x)$  — функция Хевисайда.

Представим диэлектрическую проницаемость золота  $\varepsilon_0$  в виде двух слагаемых:  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{02}$  и проведем для каждого из них преобразование

$$\begin{aligned} \varepsilon_{01} \theta(|x| - d/2) \theta(|y| - d_1/2) = \\ = \varepsilon_{01} \theta(|x| - d/2) - \\ - \varepsilon_{01} \theta(d_1/2 - |y|) \theta(|x| - d/2). \end{aligned}$$

Окончательно выражение для диэлектрической проницаемости примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) = \\ = \theta(|x| - d/2) (\varepsilon_{01} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_{01}) \theta(d_1/2 - |y|)) + \\ + \theta(|y| - d_1/2) (\varepsilon_{02} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_{02}) \theta(d, 2 - |x|)). \end{aligned}$$

Перенесем первое и третье слагаемое правой части уравнения (1.1) в левую часть:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \kappa^2 H.$$

Обе части уравнения обозначим функцией  $-\kappa_1^2 H$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x} \right) &= \\ &= - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \kappa^2 H = -\kappa_1^2 H. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Перенесем второе и третье слагаемое правой части уравнения (1.1) в левую часть

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \kappa^2 H.$$

Обе части уравнения обозначим функцией  $-\kappa_2^2 H$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \kappa^2 H = \\ &= -\kappa_2^2 H. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для того, чтобы определить связь между функциями  $\kappa_1^2$  и  $\kappa_2^2$ , сложим попарно левые и средние части уравнений (1.2)–(1.3), получим, что в обоих случаях сумма равна  $-\kappa^2 H$ . Следовательно,  $\kappa^2$  равно  $\kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$ . В области  $|x| > d/2$ ,  $|y| < d_1/2$  мы имеем планарный волновод, в этой геометрии поле не зависит от координаты  $x$ , поэтому  $\kappa_1^2 = 0$ , а в области  $|x| < d/2$ ,  $|y| > d_1/2$  —  $\kappa_2^2 = 0$ . Отсюда следует, что  $\kappa_1^2$  отлично от нуля при выполнении неравенства  $|x| < d/2$ , а  $\kappa_2^2$  — в области  $|y| < d_1/2$ . Следовательно,  $\kappa^2$  можно представить в виде

$$\kappa^2 = \kappa_1^2 \theta(|x| - d/2) + \kappa_2^2 \theta(|y| - d_1/2).$$

Сравнивая выражения для  $\varepsilon(x, y)$  и  $\kappa^2$ , и учитывая независимость функций Хевисайда от различных переменных, приходим к равенствам

$$\kappa_1^2 = \kappa_{10}^2 + \left( (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\omega^2}{c^2} + \kappa_{20}^2 \right) \theta(|x| - d/2),$$

$$\kappa_2^2 = \kappa_{20}^2 + \left( (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\omega^2}{c^2} + \kappa_{10}^2 \right) \theta(|y| - d_1/2).$$

Здесь  $\kappa_{10}^2$  и  $\kappa_{20}^2$  — константы, причем

$$\kappa_{10}^2 + \kappa_{20}^2 = \kappa_0^2, \quad \kappa_0^2 = \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2.$$

Таким образом, функция  $\kappa_2^2$  испытывает скачок на границах волновода, перпендикулярных оси  $y$ , а функция  $\kappa_1^2$  — на границах волновода, перпендикулярных оси  $x$ . Определив правые части уравнений (1.2) и (1.3), можно приступить к решению этих уравнений.

В [3] получено решение уравнения (1.2), которое при замене  $\varepsilon_0$  на  $\varepsilon_0 - \kappa_{20}^2 \frac{c^2}{\omega^2}$ , запишется в виде

$$\begin{aligned} H(x, y) &= H_0(y) \times \\ &\times \exp \left\{ - \int \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \kappa_{10} \operatorname{tg} [a(x, y)] dx \right\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $a(x, y)$  определяется интегральным уравнением

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \int \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \kappa_{10} dx + \\ &+ \int_{x_0}^x \left( \frac{\varepsilon_0 \beta^2}{\varepsilon \kappa_{10}} - \kappa_{10} \right) \sin^2 [a(x, y)] \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) dx}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что при  $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = 0$

$$H(x, y) = H_0(y) \cos(\kappa_{10} x),$$

$$|x| < d/2, \quad |y| < d_1/2.$$

Найдем решение уравнения (1.2), полагая первой средой в порядке проведения интегрирования оксид кремния, а второй — металл. Правая часть уравнения (1.2) при этом запишется в виде

$$\kappa_1^2 = \kappa_{11}^2 + \left( (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \frac{\omega^2}{c^2} + \kappa_{21}^2 \right) \theta(|x| - d/2),$$

где

$$\kappa_{11}^2 + \kappa_{21}^2 = \kappa_{01}^2, \quad \kappa_{01}^2 = \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2.$$

Проводя интегрирование по переменной  $L - x$ , при  $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = 0$  получим выражение для магнитного поля

$$H(x, y) = H_L(y) \cos[\kappa_{11}(L - x)],$$

$$|x| > d/2, \quad |y| < d_1/2.$$

Рассмотрим подробнее уравнение (1.4). Учитывая (1.2) и дважды дифференцируя по  $x$ , получаем

$$- \frac{\partial \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \kappa_{10} \operatorname{tg}(a) \right)}{\partial x} + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \kappa_{10} \operatorname{tg}(a) \right)^2 = -\kappa_1^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение вида  $f'(x) - \alpha(x)f(x) = g(x)$ . В предположении, что

$$\alpha(x) = f(x) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \kappa_{10} \operatorname{tg}(a)$$

его решение имеет вид [4]

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \kappa_{10} \operatorname{tg}(a) = \exp\left(\int \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \kappa_{10} \operatorname{tg}(a) dx\right) \times \\ \times \int \kappa_1^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \exp\left(-\int \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \kappa_{10} \operatorname{tg}(a) dx\right) dx.$$

В левой части этого уравнения стоит функция

$$\frac{\partial \ln [H(x, y)]}{\partial x},$$

в правой же — интеграл

$$\frac{1}{H(x)} \int \kappa_1^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} H(x) dx.$$

Для первого решения (1.2), интегрируя в области  $|x| < d/2$ ,  $|y| < d_1/2$ , где

$$H(x, y) = H_0(y) \cos(\kappa_{10}x),$$

находим, что интеграл в правой части равен

$$\kappa_{10} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{tg}(x\kappa_{10}).$$

Для второго решения уравнения (1.2) в области  $|x| > d/2$ ,  $|y| < d_1/2$ , где

$$H(x, y) = H_L(y) \cos(\kappa_{11}(L - x)),$$

интеграл, деленный на  $H(x)$ , равен  $\kappa_{11} \operatorname{tg}(\kappa_{20}(L - x))$ . Так как размер подложки много больше толщины пленки, то в предельном случае можно считать размер подложки бесконечно большим. Поскольку оба решения справедливы и непрерывны, а также, имея в виду комплексный характер  $\kappa_{11}$ , и устремляя  $L$  к бесконечности, получаем дисперсионное уравнение

$$\kappa_{10} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{tg}(\kappa_{10}d/2) = i\kappa_{11}. \quad (1.5)$$

Решая уравнение (1.3), соответственно получим

$$\kappa_{20} \operatorname{tg}(\kappa_{20}d_1/2) = \\ = \lim_{L \rightarrow \infty} \kappa_{21} \operatorname{tg}(\kappa_{21}(d_1/2 - L)) = i\kappa_{21}. \quad (1.6)$$

Имея три уравнения относительно  $\kappa_{10}$ ,  $\kappa_{20}$ ,  $\beta$ , найдем эти три величины.

Проведенные вычисления показали, что поперечную компоненту магнитного поля можно записать в виде  $H = H_1(x)H_2(y)$ . Действительно, в области  $|y| < d_1/2$  поперечная компонента магнитного поля равна  $H_0F(x) \cos(\kappa_{20}y)$ , а в области  $|x| < d/2$  равна  $H_0F_1(y) \cos(\kappa_{10}x)$ . Окончательно из [3] получаем решение уравнений (1.2)–(1.3)

$$F(x) = \begin{cases} \cos(\kappa_{10}x), & 0 \leq |x| \leq d/2, \\ \left| \frac{g - \sin^2(\kappa_{10}d/2)}{g - \sin^2(f(x))} \right|^{1/2} \times \\ \times \cos(f(x)), & |x| > d/2, \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$f(x) = \operatorname{arctg}\{\xi \operatorname{tg} \Omega\},$$

$$\Omega = \frac{\frac{\kappa_{11}^2}{\kappa_{10}\varepsilon} (|x| - d/2) + \xi \operatorname{arctg}(\xi \operatorname{tg}(y_0))}{\xi},$$

$$g = \frac{\kappa_{11}^2 \varepsilon_0}{(\beta^2 \varepsilon_0 - \kappa_{10}^2 \varepsilon_1) (\varepsilon - \varepsilon_0)},$$

$$\xi = \sqrt{\frac{g+1}{g}}, \quad y_0 = \kappa_{10}d/2.$$

Функция  $F_1(y)$  записывается аналогично, но с другим коэффициентом

$$g = \frac{\kappa_{21}^2}{\frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon - \varepsilon_0) - \kappa_{20}^2 + \kappa_{10}^2},$$

и заменой  $y_0 = \kappa_{10}d/2$  на  $x_0 = \kappa_{20}d_1/2$  и  $\kappa_1$  на  $\kappa_2$ .

## 2. Численный расчет и обсуждение результатов

Проанализируем формулы (1.5)–(1.7) аналитически и графически. Сначала рассмотрим дисперсионные уравнения (1.5)–(1.6). Проведенные нами вычисления соответствуют рассмотрению двух одномерных трехслойных структур. Полученное в ходе расчета уравнение (1.5) совпадает с дисперсионным уравнением для структуры «диэлектрик – металл – диэлектрик» [1, 3]. Рассчитанное по этому уравнению значение эффективного показателя преломления близко к показателю преломления оксида кремния, однако оно имеет мнимую часть, характеризующую потери в металле. Уравнение (1.6) в свою очередь совпадает с дисперсионным уравнением для диэлектрического волновода [5], и расчет с эффективным показателем

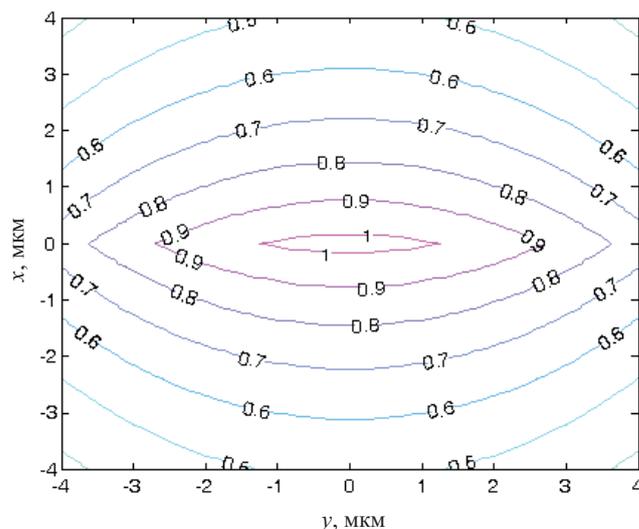


Рис. 2. Распределение напряженности магнитного поля фундаментальной моды в поперечном сечении плазмонного микрополоскового волновода

Расчетные значения потерь энергии в плазмонном микрополосковом волноводе на единицу его длины

$d, \text{нм}$	10	20	30	40	50	60
Потери, дБ/см	1,36	2,04	29,9	92,4	100,6	128,8

преломления в области металла определяет значение  $\beta$ . Этот параметр характеризует потери волновода.

В случае плазмонного волновода потери связаны с поглощением в металле и характеризуются пробегом плазмонного сигнала. Дисперсионное уравнение (1.5) соответствует увеличению пробега плазмонной волны с уменьшением толщины металла в отличие от второго возможного для среды «диэлектрик – металл – диэлектрик» дисперсионного уравнения, соответствующего антисимметричной по  $x$  поперечной компоненте магнитного поля, пробег плазмонов для которого уменьшается с уменьшением толщины пленки. В случае уравнения (1.5) пробег составляет единицы сантиметров для толщины металлической пленки 10 нм и определяет малые потери плазмонного волновода. В таблице приведены значения потерь волновода на единицу его длины в зависимости от толщины золотой пленки.

Далее рассмотрим уравнение (1.7). На рис. 2 показана зависимость поперечной компоненты магнитного поля от координат. Параметры уравнения (1.7) рассчитаны из уравнений (1.5)–(1.6) с показателями пре-

ломления диэлектрика  $n_d = 1,4558$  и металла  $n_m = \sqrt{-131,9475 + 12,65i}$  для длины волны 1,55 мкм, при размерах пленки  $d = 20$  нм и  $d_1 = 8$  мкм. Можно видеть, что поле спадает при удалении от пленки, как в направлении  $x$ , так и в направлении  $y$ . Эффективный размер моды по уровню  $1/e = 12$  мкм (по оси «X»); 15 мкм (по оси «Y»). Ширина канала 8 мкм позволяет осуществить стыковку с минимальными потерями со стандартным одномодовым волокном SMF-28, имеющим эффективный радиус моды 9–10 мкм. В таблице приведены численные значения потерь в расчете на единицу длины волновода.

### 3. Выводы

Таким образом, применение полученного в [3] результата для трехслойной среды (планарного волновода) возможно в более сложном двумерном случае, то есть для канального волновода. Такое обобщение позволяет анализировать распространение электромагнитной волны в микрополосковом волноводе. Аналитический расчетный результат показал, что плазмонный волновод, состоящий

из тонкой золотой микрополоски на подложке из оксида кремния, имеет при толщине пленки в 10–15 нм малые потери на единицу длины волновода. Уменьшение толщины пленки приводит к уменьшению потерь. Этот результат совпадает с численным расчетом, который можно провести прямым конечно-разностным решением векторного волнового уравнения. Преимущество аналитического решения перед численными методами связано с простотой вычислений, большей общностью и возможностью проанализировать влияние параметров плазмонного волновода на распространение электромагнитных волн.

### *Литература*

1. *Климов В. В.* Наноплазмоника, Физматлит. 2010. 481 с.
2. *Xu S. L., Huang W. P., Stern M. S., Chaudhuri S. K.* Full-vectorial mode calculations by finite difference method // IEE Proceedings (Optoelectronics). 1994. Vol. 141. No. 5. P. 281–286.
3. *Селина Н. В., Векшин М. М., Тумаев Е. Н., Яковенко Н. А.* Аналитический подход к расчету электромагнитного поля в системе «металл – диэлектрик – металл» // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. № 3. С. 43–48.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1971. 576 с.
5. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир. 1984. 512 с.

Ключевые слова: электромагнитное поле, оптический волновод, поверхностные плазмоны, векторное волновое уравнение, аналитическое решение.

---

Статья поступила 5 июня 2012 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Филиал Военной академии связи в г. Краснодаре

© Селина Н. В., Векшин М. М., Тумаев Е. Н., Яковенко Н. А., Благодарь М. А., 2013