УДК 539.3, 551.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ СВОЙСТВАМИ[1]

Бабешко В. А.[2], Бабешко О. М.[3], Горшкова Е. М.[4], Зарецкая М. В.[5], Павлова А. В.[6], Телятников И. С.[7]

RESEARCH OF BEHAVIOR OF STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS MEDIA WITH CHANGING PROPERTIES

Babeshko V. A., Babeshko O. M., Gorshkova E. M., Zaretskaya E. M., Pavlova A. V., Telyatnikov I. S.

In article the model of dynamic behavior of structurally inhomogeneous media with varying properties is offered. Research of resonance properties of a simplest block structure under external wave's impacts is conducted with application of factorization methods and the method of block-level element. The Wiener–Hopf system of functional equations for the block structure with an interface layer is obtained, the algorithm for its solution is proposed for the determination of displacements and stresses.

Keywords: stress-strain state, interface layer, dynamic behavior, changing properties, resonant frequency.

На сегодняшний день имеется значительное количество исследований и публикаций, посвященных анализу напряжённо-деформированного состояния структурно неоднородных тел. Изучаются механизмы образования и распространения дефектов, процессы, приводящие к нарастанию концентрации напряжений и разрушению. Как правило, рассматриваются дефекты, расположенные в однородных или двухслойных изотропных средах и реже — в средах со сложными физико-механическими свойствами. При этом дефекты имеют каноническую форму или моделируются конечным либо полубесконечным математическим разрезом, на котором перемещения (для трещин) или напряжения (для включений) терпят разрыв. В инженерной практике проблему стараются решить введением значительных коэффициентов запаса прочности. Это связано с тем, что окрестности неоднородностей являются зонами концентрации напряжений, в том числе неограниченных, приводящих к существенным сложностям при проведении численных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (НШ-914.2012.1), РФФИ (12-01-00330, 12-01-00332, 13-01-00132, 13-08-00196), РФФИ и администрации Краснодарского края (13-01-96502, 13-01-96503, 13-01-96504, 13-01-96508, 13-01-96509).

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

[3]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[4]Горшкова Елена Михайловна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: gem@kubsu.ru.

[5]Зарецкая Марина Валерьевна, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: zarmv@mail.ru.

[6]Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

[7]Телятников Илья Сергеевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; ilux_t@list.ru.

расчетов. Для их преодоления развиваются факторизационные методы [1, 2], в частности метод блочного элемента [3,4], способные учитывать большое число факторов, влияющих на напряженно-деформированное состояние материала. Подобные методы могут применяться к исследованию процессов, протекающих в средах и материалах с изменяющимися свойствами при динамических воздействиях.

1. В работах [5, 6] была рассмотрена простейшая модель материала с изменяющимися свойствами — оползнеопасная структура на горизонтальном основании, для которой построена модель поведения. Полученные результаты позволили определить порядок исследования динамического поведения сред или материалов, свойства и структура которых изменяются при длительном внешнем воздействии.

Считается, что материал моделируется линейно деформируемой средой. Внешние динамические воздействия могут содержать в своем спектре гармоники из диапазона резонансных для рельефных сред. В таком случае возникают характерные узловые вертикальные плоскости и зоны ослабления в промежутках между узловыми плоскостями. В областях между узловыми плоскостями, испытывающих значительные резонансные колебания, плотность материала уменьшается. Среда теряет однородность и может рассматриваться как блочная структура.

Резонансные явления, возникающие при сопряжении блоков в структуре, зависят от формы, размеров и граничных условий в местах соприкосновения. При энергетической накачке в некоторой области указанной структуры, например при землетрясении в виде сброса, надвига или смещения, в этой области будут возникать колебания на резонансных частотах [7,8]. Значения дискретных частот этой структуры описываются неравенством вида

$$k_2 \approx \pi\sqrt{\frac{(j+0,5)^2}{a^2}+\frac{(n+0,5)^2}{(b+h)^2}} < \frac{\pi}{2h},$$

$$j, n = 0, 1, \ldots .$$

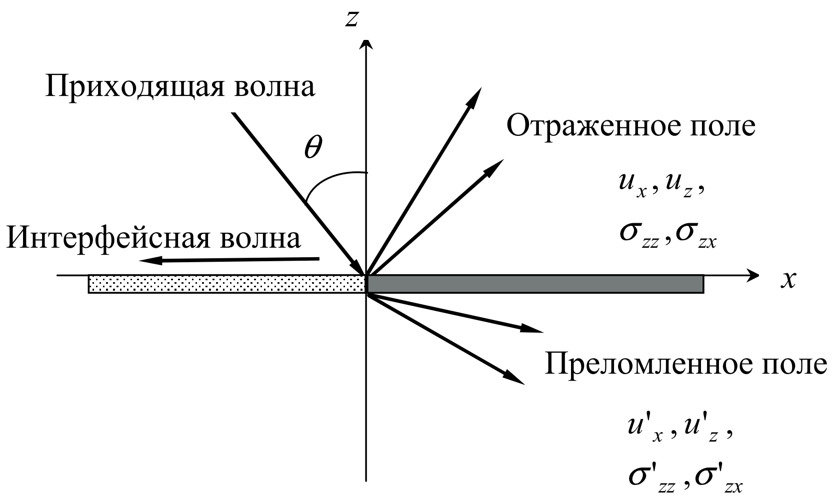
Из приведенной формулы видно, что при любых значениях n и s всегда найдутся такие размеры блока, т.е. ширина и высота a и b, при которых рельефный слой будет иметь конечное число резонансных частот дискретного характера. Этой особенностью колебания указанной структуры отличаются от колебания ограниченного тела, имеющего счетный спектр.

На стадии образования узловых плоскостей упругую среду можно представлять как среду с включениями. Для исследований на этом этапе применяется теория «вирусов вибропрочности» [9, 10]. При некоторых соотношениях механических и геометрических характеристик структуры наличие неоднородностей приводит к локализации деформаций и напряжений в случае вибрации, а также к резонансам, разрушающим материал [6]. Анализ полученных многопараметрических функционально-матричных уравнений [6] позволяет определить диапазоны резонансных частот в среде с включениями.

Дальнейшее влияние резонансных воздействий приводит к изменению свойств среды между включениями. Появляется ослабленный тонкий интерфейсный слой, удерживающий в контакте все остальные части структуры. При этом резонансные частоты изменяются по сравнению с первоначальными. Далее исследуется среда с интерфейсным слоем при наличии приходящих внешних волновых воздействий. Развитие процесса приводит к изменению свойств интерфейсного слоя, образованию трещин в некоторых его областях и его частичному разрушению. На этом этапе исследуется поведение упругого пространства с интерфейсным слоем, содержащим разнотипные составляющие, расположенные по полубесконечным полуплоскостям, которые можно рассматривать как блочную структуру. Ниже представлено исследование состояния среды с интерфейсным слоем путем применения факторизационных методов, основы которых изложены в работах [1–3, 11].

2. Пусть упругое тело состоит из двух однородных изотропных полупространств ($z > 0$ и $z < 0$) с разными физико-механическими свойствами, соединенных тонким интерфейсным слоем толщиной h.

Приходящие из бесконечности волны падают на поверхность слоя и инициируют в среде отраженное волновое поле, а также поля преломленных и интерфейсных (идущих вдоль слоя) волн. Колебания среды предполагаются установившимися с частотой ω. На бесконечности амплитуды отраженных и преломленных волн стремятся к нулю. Требуется определить характеристики волново-



Интерфейсный слой с разнотипными свойствами

го поля, возбуждаемого приходящими волнами в упругой среде.

Установившийся режим колебаний означает, что зависимость от времени перемещений и напряжений в упругом теле описывается множителем $e^{-i\omega t}$. В силу линейности задачи данный множитель в дальнейшем всюду опущен.

Движение упругого тела в декартовой системе координат (x, z) описывается уравнениями Ляме

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla,\mathbf{u})+\mu\Delta u_x+\rho\omega^2 u_x=0, \quad (1)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}(\nabla,\mathbf{u})+\mu\Delta u_z+\rho\omega^2 u_z=0,$$

где $\mathbf{u}=\{u_x,\ u_z\}$ — вектор перемещений;

$$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z}\right\},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$(\nabla,\mathbf{u})$ — скалярное произведение; λ и μ — коэффициенты Ляме.

Состояние упругого тела характеризуется компонентами тензора напряжений σ_{ij}

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}&=\lambda\frac{\partial u_x}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z},\\ \sigma_{xz}&=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right).\end{aligned} \quad (2)$$

На границу падают приходящие из бесконечности продольная и поперечная волны с потенциалами вида $\tilde{\phi}_l(x,z,t)=\phi_l(x,z)\,e^{-i\omega t}$ и $\tilde{\psi}_l(x,z,t)=\psi_l(x,z)\,e^{-i\omega t}$. При этом

$$\begin{aligned}\phi_l(x,z)&=A_1e^{i\kappa_{21}(-x\,\cos\theta_1+z\,\sin\theta_1)},\\ \psi_l(x,z)&=A_2e^{i\kappa_{22}(-x\,\cos\theta_2+z\,\sin\theta_2)},\end{aligned} \quad (3)$$

где κ_{nm} $(m,n=1,2)$ — волновые числа, первый индекс соответствует номеру полупространства (1 — для нижнего, 2 — для верхнего), а второй — типу волны (1 — для продольной, 2 — для поперечной); θ_j — угол падения волны $(j=1,2)$. Стурктура волновых полей для рассматриваемого интерфейсного слоя представлена на рисунке.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma=\{\sigma_x,\sigma_z\}\ \text{ при } z>0;$$

$$\mathbf{u}^*=\{u_x^*,u_z^*\},$$

$$\sigma^*=\{\sigma_{xz}^*,\sigma_{zz}^*\}\ \text{ при } z<0;$$

$$\mathbf{V}=\{\mathbf{u},\sigma\},\quad \mathbf{V}^*=\{\mathbf{u}^*,\sigma^*\}.$$

Условия сопряжения на границе верхней и нижней полуплоскостей описываются матрицами перехода $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^*$, различными для $x<0$ и $x>0$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}&=\mathbf{B}\mathbf{V}^*,\ \text{ при } x<0,\\ \mathbf{V}&=\mathbf{B}^*\mathbf{V}^*,\ \text{ при } x>0.\end{aligned} \quad (4)$$

Матрица $\mathbf{B}$ имеет блочную структуру

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2\\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1\end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{B}_1=\begin{pmatrix}1 & b_{12}\\ b_{21} & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_2=\begin{pmatrix}0 & K_t^{-1}\\ K_n^{-1} & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3=\begin{pmatrix}0 & -\omega^2M_n\\ -\omega^2M_p & 0\end{pmatrix};$$

$$b_{12} = -ikb, \quad b_{21} = \left(1 - 2\xi_0^2\right) b_{12},$$

$$M_n = \rho_0 h, \quad M_p = \rho_0 h \left[1 - 4\left(\frac{\kappa}{\kappa_t^0}\right)^2 \left(1 - \xi_0^2\right)\right],$$

$$\xi_0^2 = 0,5\,(1 - 2\nu_0)\,(1 - \nu_0)^{-1};$$

λ_0, μ_0 — коэффициенты Ляме материала интерфейсного слоя; $K_t = \frac{\rho_0 v_{0t}^2}{h}$ — поперечная жесткость; $K_n = \frac{\rho_0 v_{0l}^2}{h}$ — продольная жесткость; κ — проекция волнового числа на линию интерфейсного слоя; κ_t^0 — волновое число поперечной волны в интерфейсном слое; v_{0t}, v_{0l} — скорости поперечной и продольной волн в интерфейсном слое; ρ_0 — плотность слоя.

Матрица перехода $\mathbf{B}^*$ имеет такой же вид, только с другими числовыми параметрами, помечаемыми звездочкой.

На бесконечности при $z \to +\infty$ амплитуда смещений отраженного поля $\mathbf{u} \to 0$, а при $z \to -\infty$ амплитуда преломленного поля $\mathbf{u}^* \to 0$.

Таким образом, относительно неизвестных перемещений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^*$ поставлена краевая задача (1), (4).

Для вывода интегральных уравнений воспользуемся представлением поля $\mathbf{u}$ в виде суммы скалярного ϕ и векторного $\Psi = \{0, -\psi, 0\}$ потенциалов

$$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (5)$$

В результате (1) распадается на два уравнения

$$\Delta\phi_j + \kappa_{j1}^2\phi_j = 0, \quad \Delta\psi_j + \kappa_{j2}^2\psi_j = 0, \qquad (6)$$

$$j = 1, 2.$$

Решения уравнений Гельмгольца (6) хорошо известны и могут быть получены различными методами, в том числе – применением метода блочного элемента [4].

Суммарные потенциалы в верхнем полупространстве складываются из потенциалов падающего и отраженного полей

$$\phi_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{c}_{21}(\beta)\, e^{-\alpha_{21}z - i\beta x} d\beta + \phi_l,$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{c}_{22}(\beta)\, e^{-\alpha_{22}z - i\beta x} d\beta + \psi_l. \qquad (7)$$

В нижнем полупространстве суммарные потенциалы имеют вид

$$\phi_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{c}_{11}(\beta)\, e^{-\alpha_{11}z - i\beta x} d\beta,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{c}_{12}(\beta)\, e^{-\alpha_{12}z - i\beta x} d\beta, \qquad (8)$$

где $\alpha_{jn} = \sqrt{\beta^2 - \kappa_{jn}^2}$, $j, n = 1, 2$. Подстановка (7) и (8) в (5) дает

$$u_x^*(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \big[-i\beta \mathrm{c}_{11}(\beta)\, e^{\alpha_{11}z} + \alpha_{21}c_{12}(\beta)\, e^{\alpha_{12}z}\big] e^{-i\beta x} d\beta,$$

$$u_z^*(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \big[\alpha_{11}c_{11}(\beta)\, e^{\alpha_{11}z} + i\beta \mathrm{c}_{12}(\beta)\, e^{\alpha_{12}z}\big] e^{-i\beta x} d\beta,$$

$$u_x(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \big[-i\beta \mathrm{c}_{21}(\beta)\, e^{-\alpha_{21}z} + \alpha_{22}c_{22}(\beta)\, e^{-\alpha_{22}z}\big] e^{-i\beta x} d\beta + u_{lx}, \qquad (9)$$

$$u_z(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \big[-\alpha_{211}c_{21}(\beta)\, e^{-\alpha_{21}z} + i\beta \mathrm{c}_{22}(\beta)\, e^{-\alpha_{22}z}\big] e^{-i\beta x} d\beta + u_{lz},$$

где u_{lx} и u_{lz} — компоненты амплитуды приходящего поля.

В плоском случае компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{zx}^*(x, z) = \frac{\mu_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{11} e^{-i\beta x} d\beta,$$

$$\sigma_{zz}^*(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{12} e^{-i\beta x} d\beta, \qquad (10)$$

$$\sigma_{zx}(x, z) = \frac{\mu_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{21} e^{-i\beta x} d\beta + \sigma_{lzx},$$

$$\sigma_{zz}(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta_{22} e^{-i\beta x} d\beta + \sigma_{lzz},$$

где σ_{lzx} и σ_{lzz} – компоненты тензора напряжений, вызванных полем приходящих волн,

$$\Delta_{11} = -2i\beta c_{11}\alpha_{11}e^{\alpha_{11}z} + \left(\alpha_{12}^2+\beta^2\right)c_{12}e^{\alpha_{12}z},$$

$$\Delta_{12} = \left[(\lambda_1+2\mu_1)\,\alpha_{11}^2 - \lambda_1\beta\right]c_{11}e^{\alpha_{11}z} + \\ + 2i\mu_1\beta\alpha_{12}c_{12}e^{\alpha_{12}z},$$

$$\Delta_{21} = -2i\beta c_{21}\alpha_{21}e^{\alpha_{21}z} + \left(\alpha_{22}^2+\beta^2\right)c_{22}e^{\alpha_{22}z},$$

$$\Delta_{22} = \left[(\lambda_2+2\mu_2)\,\alpha_{21}^2 - \lambda_2\beta\right]c_{21}e^{\alpha_{21}z} - \\ - 2i\mu_2\beta\alpha_{22}c_{22}e^{\alpha_{22}z}.$$

Используя введенные ранее обозначения, перепишем граничные условия (4) для всей границы в следующем виде:

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2\\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}^*\\ \sigma^*\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{u}_l^-\\ \sigma_l^-\end{pmatrix}, \\ \qquad \text{если } x<0, \\ \begin{pmatrix}\mathbf{m}_1^+\\ \mathbf{m}_2^+\end{pmatrix}, \text{ если } x>0; \end{cases} \qquad (11)$$

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \begin{pmatrix}\mathbf{m}_1^-\\ \mathbf{m}_2^-\end{pmatrix}, \text{ если } x<0, \\ \begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2\\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \sigma\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{u}_l^+\\ \sigma_l^+\end{pmatrix}, \\ \qquad \text{если } x>0. \end{cases} \qquad (12)$$

Здесь $\mathbf{u}_l^\pm$ и $\sigma_l^\pm$ соответствуют векторам амплитуд перемещений и напряжений приходящего поля. Верхний индекс «$-$» указывает на область $x<0$, «$+$» — на область $x>0$. Вектора $\left\{\mathbf{m}_1^\pm, \mathbf{m}_2^\pm\right\}$ содержит неизвестные продолжения характеристик для упругого поля в верхней полуплоскости при $x>0$ $(+)$ и в нижней полуплоскости при $x<0$ $(-)$ и имеют вид

$$\mathbf{m}_1^\pm = \begin{pmatrix} m_{11}^\pm\\ m_{12}^\pm\end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_2^\pm = \begin{pmatrix} m_{21}^\pm\\ m_{22}^\pm\end{pmatrix}.$$

Применив к (11) и (12) преобразование Фурье по переменной x и обозначив большими символами соответствующие образы, получим

$$\begin{pmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{\Sigma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2\\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{U}^*\\ \mathbf{\Sigma}^*\end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix}\mathbf{U}_l^-\\ \mathbf{\Sigma}_l^-\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{M}_1^+\\ \mathbf{M}_2^+\end{pmatrix} \qquad (13)$$

или

$$\begin{pmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{\Sigma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_1^* & \mathbf{B}_2^*\\ \mathbf{B}_3^* & \mathbf{B}_4^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{U}^*\\ \mathbf{\Sigma}^*\end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix}\mathbf{U}_l^+\\ \mathbf{\Sigma}_l^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{M}_1^-\\ \mathbf{M}_2^-\end{pmatrix}, \qquad (14)$$

где

$$M_{jn}^+(\beta) = \int\limits_0^\infty m_{jn}^+(x)\,e^{i\beta x}dx,$$

$$M_{jn}^-(\beta) = \int\limits_{-\infty}^0 m_{jn}^-(x)\,e^{i\beta x}dx, \quad j,n=1,2.$$

Чтобы упростить обозначения, введем матрицы коэффициентов и векторы неизвестных

$$\mathbf{C}_j = \begin{pmatrix} c_{j1}\\ c_{j2}\end{pmatrix}, \quad j=1,2;$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} -i\beta & \alpha_{12}\\ \alpha_{11} & i\beta\end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} -i\beta & -\alpha_{22}\\ -\alpha_{21} & i\beta\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_1\beta^2 + (\lambda_1+2\mu_1)\,\alpha_{11}^2 & 2i\mu_1\beta\alpha_{12}\\ -2i\mu_1\beta\alpha_{11} & \mu_1\left(\beta^2+\alpha_{12}^2\right)\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_2\beta^2 + (\lambda_2+2\mu_2)\,\alpha_{21}^2 & 2i\mu_2\beta\alpha_{22}\\ -2i\mu_2\beta\alpha_{21} & \mu_2\left(\beta^2+\alpha_{22}^2\right)\end{pmatrix}.$$

Получим следующую систему функционально-матричных уравнений:

$$\mathbf{W}_2\mathbf{C}_2 - (\mathbf{B}_1\mathbf{W}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{P}_2)\,\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}_1^+ - \mathbf{L}_1^-,$$

$$\mathbf{P}_2\mathbf{C}_2 - (\mathbf{B}_3\mathbf{W}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{P}_1)\,\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}_2^+ - \mathbf{L}_2^-, \qquad (15)$$

$$\mathbf{W}_2\mathbf{C}_2 - (\mathbf{B}_1^*\mathbf{W}_1 + \mathbf{B}_2^*\mathbf{P}_2)\,\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}_1^- - \mathbf{L}_1^+,$$

$$\mathbf{P}_2\mathbf{C}_2 - (\mathbf{B}_3^*\mathbf{W}_1 + \mathbf{B}_1^*\mathbf{P}_1)\,\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}_2^- - \mathbf{L}_2^+.$$

Здесь $\mathbf{L}_n^\pm$ $(n=1,2)$ — элементы приходящего поля

$$\mathbf{U}_l^\pm = \mathbf{L}_1^\pm, \quad \Sigma_l^\pm = \mathbf{L}_2^\pm.$$

Система (13) содержит восемь уравнений с двенадцатью неизвестными и может быть решена обобщенной процедурой Винера–Хопфа. Отраженное поле определяется через коэффициенты $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ с помощью соотношений (9) и (10).

Из-за неоднородности интерфейсного слоя отраженное поле существенно усложняется. Для краевых задач такого рода при нахождении отраженного и преломленного поля обычно используется процедура Винера–Хопфа. К сожалению, проблема неоднородности условий на границе раздела осложняется также превращением мод. Таким образом, обычная процедура Винера – Хопфа, разработанная для скалярных уравнений, должна быть обобщена на многомерный случай. Путь к решению заключается в возможности факторизfwbb матрицы–функции в виде суммы и произведения.

3. Вернемся к системе интегральных уравнений (15). Дадим факторизованные представления для приходящего поля $\mathbf{L}_n^{\pm}$ $(n = 1, 2)$ в различных полуплоскостях. Положим

$$\mathbf{L}_n^{\pm} = \begin{pmatrix} L_{n1}^{\pm} \\ L_{n2}^{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{n1}^{\pm} \\ J_{n2}^{\pm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{n1}^{\pm} \\ I_{n2}^{\pm} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где

$$L_{11}^{+} = J_{11}^{+} + I_{11}^{+} = \int_0^{\infty} u_{xi} e^{i\beta x} dx = \int_0^{\infty} (j_{11} + i_{11})\, e^{i(\beta+\kappa)x} dx,$$

$$L_{12}^{+} = J_{12}^{+} + I_{12}^{+} = \int_0^{\infty} u_{zi} e^{i\beta x} dx = \int_0^{\infty} (j_{12} + i_{12})\, e^{i(\beta+\kappa)x} dx,$$

$$L_{21}^{+} = J_{21}^{+} + I_{21}^{+} = \int_0^{\infty} \sigma_{lzz} e^{i\beta x} dx = \int_0^{\infty} (j_{21} + i_{21})\, e^{i(\beta+\kappa)x} dx,$$

$$L_{22}^{+} = J_{22}^{+} + I_{22}^{+} = \int_0^{\infty} \sigma_{lzx} e^{i\beta x} dx = \int_0^{\infty} (j_{22} + i_{22})\, e^{i(\beta+\kappa)x} dx.$$

Аналогично вводятся обозначения с верхним индексом «$-$» для интервала $(-\infty, 0)$.

Факторизованные функции для поля приходящих волн на границе $J_{jn}^{\pm}$, $j, n = 1, 2$ (для продольной приходящей волны), $I_{jn}^{\pm}$ (для поперечной приходящей волны) могут быть найдены преобразованием Фурье следующих выражений:

$$\begin{gathered} j_{11} = iA_1\kappa, \quad j_{12} = -iA_1\kappa_{21}\cos\theta_1, \\ j_{21} = -A_1\omega^2\rho\left[1 - 2\frac{\kappa_{21}^2}{\kappa_{22}^2}\sin^2\theta_1\right], \\ j_{12} = -A_1\omega^2\rho\frac{\kappa_{21}^2}{\kappa_{22}^2}\sin 2\theta_1, \\ i_{11} = iA_2\kappa_{22}\cos\theta_1, \quad i_{12} = -iA_2\kappa, \\ i_{21} = -A_2\omega^2\rho\sin 2\theta_2, \quad i_{22} = -A_2\omega^2\rho\cos 2\theta_1. \end{gathered} \tag{17}$$

Из соотношений (16) и (17) находим $\mathbf{L}_n^{\pm}$ для приходящего поля.

Введя обозначения $\mathbf{W}_j\mathbf{P}_j^{-1} = \mathbf{Q}_j \quad (j = 1, 2)$ и проделав несложные преобразования, можно получить приведенную систему функциональных уравнений

$$\begin{gathered} \mathbf{Q}_2\left[(\mathbf{B}_3^*\mathbf{Q}_1 + \mathbf{B}_1^*)\,\mathbf{N}_2^{-1}\left(\mathbf{X}_2^{-} - \mathbf{X}_2^{+}\right) + \mathbf{X}_2^{+} - \mathbf{L}_2\right] - \\ -(\mathbf{B}_1^*\mathbf{Q}_1 + \mathbf{B}_2^*)\,\mathbf{N}_2^{-1}\left(\mathbf{X}_2^{-} - \mathbf{X}_2^{+}\right) = \mathbf{X}_1^{+} - \mathbf{L}_1; \end{gathered}$$

$$\mathbf{N}_1^{-1}\left(\mathbf{X}_1^{-} - \mathbf{X}_1^{+}\right) = \mathbf{N}_2^{-1}\left(\mathbf{X}_2^{-} - \mathbf{X}_2^{+}\right),$$

где $\mathbf{L}_j = \mathbf{L}_j^{+} + \mathbf{L}_j^{-} \quad (j = 1, 2)$,

$$\mathbf{N}_1 = (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1^*)\,\mathbf{Q}_1 + \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^*,$$

$$\mathbf{N}_2 = (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_3^*)\,\mathbf{Q}_1 + \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1^*,$$

$\mathbf{X}_j^{\pm}$ $(j = 1, 2)$ — образы Фурье суммарного поля в верхней полуплоскости для $x > 0$ и $x < 0$ соответственно, состоящих из отраженного и приходящего полей

$$\mathbf{X}_j^{\pm} = \mathbf{M}_j^{\pm} + \mathbf{J}_j^{\pm} + \mathbf{I}_j^{\pm}.$$

Таким образом, граничная задача сведена к системе четырех функциональных уравнений Винера–Хопфа с восьмью неизвестными $\mathbf{X}_1^{+}$, $\mathbf{X}_1^{-}$, $\mathbf{X}_1^{+}$, $\mathbf{X}_2^{-}$:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{Q})\,\mathbf{X}^{-} = \mathbf{X}^{+} + \mathbf{Q}\mathbf{L}, \tag{18}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица,

$$\mathbf{X}^{\pm} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{\pm} \\ \mathbf{X}_2^{\pm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mathbf{N}_1\mathbf{G}^{-1} & \mathbf{N}_1\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_2 \\ -\mathbf{N}_2\mathbf{G}^{-1} & \mathbf{N}_2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q}_2\left(\mathbf{B}_3^*\mathbf{Q}_1 + \mathbf{B}_1^* - \mathbf{B}_1^*\mathbf{Q}_1 - \mathbf{B}_2^*\right).$$

Решение системы (18) относительно $\mathbf{X}^-$ и $\mathbf{X}^+$ требует факторизации матрицы $\mathbf{I}+\mathbf{Q}$ в виде произведения. Эта матрица имеет сложную структуру, ее элементы состоят из многозначных аналитических функций. Для приложений факторизация может быть реализована приближенно с применением различных методов для некоторых специальных случаев.

Применим метод Винера–Хопфа к решению системы (18). Представим $\mathbf{I}+\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_+\mathbf{Q}_-$ и перепишем систему в виде

$$\mathbf{Q}_+\mathbf{Q}_-\mathbf{X}^- = \mathbf{X}^+ + \left(\mathbf{Q}_+\mathbf{Q}_- - \mathbf{I}\right)\mathbf{L}. \tag{19}$$

Умножим (19) слева на $\mathbf{Q}_+^{-1}$. Получим

$$\mathbf{Q}_-\mathbf{X}^- = \mathbf{Q}_+^{-1}\mathbf{X}^+ + \left(\mathbf{Q}_- - \mathbf{Q}_+^{-1}\right)\mathbf{L}. \tag{20}$$

Факторизуем $\mathbf{Z} = \left(\mathbf{Q}_- - \mathbf{Q}_+^{-1}\right)\mathbf{L}$ в виде суммы

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^+ + \mathbf{Z}^-,$$

где

$$\mathbf{Z}^+ \equiv \left[\left(\mathbf{Q}_- - \mathbf{Q}_+^{-1}\right)\mathbf{L}\right]^+ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mathbf{Z}(\varsigma)}{\varsigma-\beta}d\varsigma,$$

β находится выше контура Γ,

$$\mathbf{Z}^- \equiv \left[\left(\mathbf{Q}_- - \mathbf{Q}_+^{-1}\right)\mathbf{L}\right]^- = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mathbf{Z}(\varsigma)}{\varsigma-\beta}d\varsigma,$$

β находится ниже контура Γ. Подставив результат в (20), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_-\mathbf{X}^- - \left[\left(\mathbf{Q}_- - \mathbf{Q}_+^{-1}\right)\mathbf{L}\right]^- &= \\ = \mathbf{Q}_+^{-1}\mathbf{X}^+ - \left[\left(\mathbf{Q}_- - \mathbf{Q}_+^{-1}\right)\mathbf{L}\right]^+&.\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, на контуре Γ имеет место совпадение двух функций, одна из которых регулярна ниже Γ, а другая — выше Γ в комплексной плоскости. Согласно свойствам аналитического продолжения комплексных функций, они представляют некоторую функцию $\mathbf{L}(\beta)$, регулярную во всей комплексной плоскости. Согласно следствию из теоремы Лиувилля $\mathbf{L}(\beta)$ является постоянной.

Тогда в рассматриваемом случае функции в левой и правой части (21) в силу своих интегральных представлений стремится к нулю на бесконечности согласно теореме Римана–Лебега для интегралов Фурье, следовательно $\mathbf{L}(\beta) \equiv 0$. Приравнивая к нулю обе части равенства, получим решение (18) в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^- &= \mathbf{Q}_-^{-1}\left[\left(\mathbf{Q}_- + \mathbf{Q}_+^{-1}\right)\mathbf{L}\right]^-,\\ \mathbf{X}^+ &= -\mathbf{Q}_+\left[\left(\mathbf{Q}_- + \mathbf{Q}_+^{-1}\right)\mathbf{L}\right]^+.\end{aligned} \tag{22}$$

Окончательно коэффициенты $\mathbf{C}_i$ для отраженного и преломленного полей определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{C}_j = \mathbf{P}_j\mathbf{S}_j, \quad (j=1,2),$$

где

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{N}_1^{-1}\left(\mathbf{X}_1^- - \mathbf{X}\right)_1^+,$$

$$\mathbf{S}_2 = \left(\mathbf{B}_3^*\mathbf{Q}_1 + \mathbf{B}_1^*\right)\mathbf{N}_2^{-1}\left(\mathbf{X}_2^- - \mathbf{X}_2^+\right) + \mathbf{X}_2^- - \mathbf{L}_2^+.$$

Подставляя полученные выражения в определения потенциалов в верхнем и нижнем полупространстве (9) и (10), получим поля перемещений и напряжений в обоих полупространствах.

Построенная теория может найти применение при исследовании и ликвидации оползневых явлений с применением вибросейсмоисточников, а также в смежных областях: при решении проблем оценки прочности сооружений, проблем рыхления или уплотнения грунтов, в теории прочности изделий из композиционных материалов.

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424, №1. С. 36–39.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Капустин М. С., Шестопалов В. Л.* Дифференциальный метод факторизации в задачах геоэкологии // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6, №1. С. 5–11.
3. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Павлова А. В., Мухин А. С., Лозовой В. В., Федоренко А. Г.* О приложениях теории блочных структур в науках о Земле, сейсмологии, строительстве, материаловедении // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. №4. С. 27–34.
4. *Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В., Бабешко О. М., Лозовой В. В., Бабешко В. А., Федоренко А. Г.* О полуограниченных блочных элементах // Экологический

вестник научных центров ЧЭС. 2009. №4. С. 14–19.

5. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Горшкова Е. М., Иванов П. Б., Кашков Е. В., Плужник А. В., Рядчиков И. В.* Блочные элементы в проблеме моделирования оползневых явлений // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. №3. С. 7–15.
6. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Горшкова Е. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Колесников М. Н., Павлова А. В., Плужник А. В.* Об особенностях исследования оползневых структур на горизонтальном основании // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. 2012. №3. С. 5–11.
7. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
8. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. *Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей трещин // ДАН. 2002. Т. 382, №5. С. 625–628.
10. *Бабешко В. А., Бужан В. В., Вильямс Р.* К проблеме локализации вибрационного процесса в упругом твердом теле совокупностью плоских жестких включений // ДАН. 2002. Т. 382, №6. С. 765–767.
11. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В., Федоренко А. Г.* О дифференциальном методе факторизации в приложениях // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. №2. С. 5–12.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, интерфейсный слой, динамическое поведение, изменяющиеся свойства, резонансная частота.

Статья поступила 19 июля 2013 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар