

УДК 539.3

**РАЗВИТИЕ НОВЫХ НАУКОЕМКИХ МЕТОДОВ МОНИТОРИНГА
И ПРОГНОЗА СОСТОЯНИЯ ТЕРРИТОРИЙ В СЕЙСМООПАСНЫХ
И ОПОЛЗНЕОПАСНЫХ ЗОНАХ¹**

*Бабешко В. А.², Евдокимова О. В.³ Рядчиков И. В.⁴, Лозовой В. В.⁵,
Федоренко А. Г.⁶, Колесников М. Н.⁷, Телятников И. С.⁸, Грищенко Д. В.⁹,
Шишкин А. А.¹⁰, Уафа С. Б.¹¹, Власова М. С.¹², Смирнова М. В.¹³,
Горшкова Е. М.¹⁴*

THE DEVELOPMENT OF THE NEW SCIENCE INTENSIVE METHODS OF THE TERRITORIES
CONDITION IN SEISMIC- AND LANDSLIDE-DANGEROUS AREAS MONITORING AND FORECAST

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Ryadchikov I. V., Lozovoy V. V., Fedorenko A. G., Kolesnikov M. N., Telyatnikov I. S., Grishchenko D. V., Shishkin A. A., Uafa S. B., Vlasova M. S., Smirnova M. V., Gorshkova E. M.

The body of mathematics is developing by constructing of block elements taking the areas in the form of both rectangular parallelepipeds and more complicated ball-shaped ones, also truncated, which is necessary in modeling shape formed media that is typical for mountain area. The rules are developed which make it possible to join block elements of a classic shape and of more complicated configurations. The joining of non-uniformly scaled block elements is explored, which was applied for the territory seismicity rating.

Keywords: block elements, factorization, matrix-functions, exterior forms, plates.

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение №14.В37.21.0646 от 20 августа 2012 г.).

²Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования КубГУ, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

³Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

⁴Рядчиков Игорь Викторович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Кубанского государственного университета; e-mail: ryadchikov@kubsu.ru.

⁵Лозовой Виктор Викторович, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: niva_kgu@mail.ru.

⁶Федоренко Алексей Григорьевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

⁷Колесников Максим Николаевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kolesnikov@kubsu.ru.

⁸Телятников Илья Сергеевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: ilux_t@list.ru.

⁹Грищенко Дмитрий Вадимович, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: icmm@fpm.kubsu.ru.

¹⁰Шишкин Алексей Александрович, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

¹¹Уафа Самир Баширович, студент геологического факультета Кубанского государственного университета; e-mail: uafa70@mail.ru.

¹²Власова Мария Сергеевна, магистрант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

¹³Смирнова Мария Владимировна, магистрант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

¹⁴Горшкова Елена Михайловна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Кубанского государственного университета; e-mail: gem@kubsu.ru.

Методы факторизации, развитые в [1, 2] для исследования краевых задач, порождаемых системами дифференциальных уравнений в частных производных, применяются для изучения ряда блочных структур.

1. Рассматривается неограниченная многосвязная область Ω с составной границей Γ , которая образуется в трехмерном пространстве гладкими границами Γ_n областей Ω_n , $n = 1, 2, \dots, N$.

Таким образом,

$$\Omega = \cup \Omega_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Предполагая, что функции φ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ несут информацию о свойствах среды, поставим в указанной области краевую задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, исследовавшуюся в более общей постановке в [1]

$$\mathbf{Q}(\partial x_n, \partial x_k) \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega(R^3), \quad (1)$$

$$\mathbf{R}(\partial x_k) \varphi = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial \Omega. \quad (2)$$

Оператор \mathbf{Q} представим матрицей вида

$$\mathbf{Q}(\partial x_n, \partial x_k) = \|a_{mrnk} \partial x_n \partial x_k + b_{mrk} \partial x_k + c_{mr}\|.$$

Здесь приняты обозначения (суммирование по повторяющимся индексам):

$$a_{mrnk} f_n f_k = \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{mrnk} f_n f_k,$$

$$\mathbf{R}(\partial x_k) = \|h_{mrk} \partial x_k + p_{mr}\|, \quad \partial x = \partial / \partial x,$$

$$h_{mrk} = h_{mrk}(\Gamma),$$

$$\varphi = \{\varphi_r\}, \quad r = 1, 2, \dots, M, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

$$\mathbf{f} = \{f_r\}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

$$\mathbf{Q}(\alpha) \equiv -\mathbf{Q}(-i\alpha_n, -i\alpha_k), \quad n, k = 1, 2, 3,$$

$$Q = \det \mathbf{Q}(\alpha).$$

Для вещественных α_k

$$\det \|a_{mrnk} \alpha_n \alpha_k\| \neq 0.$$

Предполагается, что граничные условия удовлетворяют условию дополненности для эллиптических систем [3].

Для применения в случае неограниченной области изложенного в [1, 2] подхода, основанного на использовании геометрии многообразий, необходимо компактифицировать неограниченную область. Это достигается известными приемами: либо применим гомеоморфизм трехмерного пространства трехмерной сфере с присоединенной бесконечно удаленной точкой, в результате которого неограниченная область отображается в ограниченную, либо путем введения окрестности бесконечно удаленной точки. Для прикладных целей предпочтительнее второй вариант, поэтому считаем, что вводится окрестность бесконечно удаленной точки, описываемая внешностями сфер, радиусы которых стремятся к бесконечности. В случае первого типа областей бесконечно удаленная точка является внутренней, в случае второго — граничной.

При сделанных построениях, вводя топологию, порождаемую евклидовым пространством, будем рассматривать область как ориентированную цепь с ориентированной границей.

Краевая задача исследуется в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s(\Omega)$, содержащих также классические, вводимых нормами

$$\|\varphi\|_s^2 = \sum \|\varphi_r\|_s^2,$$

$$\|\varphi_r\|_s^2 = \iint \int_{-\infty}^{\infty} |F\varphi_r|^2 (1 + |\alpha|)^{2s} d\alpha, \quad r = 1, 2, \dots, M,$$

$$|\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad d\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3, \quad (3)$$

$$d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$F\varphi_r = \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(x) e^{i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x},$$

$$\varphi_r = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \iint F\varphi_r e^{-i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\alpha,$$

$$\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$\mathbf{f} \in \mathbf{H}_\lambda(\Gamma), \quad \lambda > s + 0,5.$$

Для исследования краевой задачи по аналогии с [1] вводится векторная внешняя форма $\omega(\alpha, \mathbf{x})$, компоненты которой ω_m имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_m(\alpha, \mathbf{x}) &= \\ &= R_m dx_1 \wedge dx_2 + Q_m dx_1 \wedge dx_3 + P_m dx_2 \wedge dx_3, \end{aligned}$$

$$P_m = \sum_r e^{i(\alpha, x)} [a_{mr11}(\partial x_1 \varphi_r - i\alpha_1 \varphi_r) - a_{mr12}i\alpha_2 \varphi_r + a_{mr13} \partial x_3 \varphi_r + b_{mr1} \varphi_r],$$

$$Q_m = - \sum_r e^{i(\alpha, x)} [a_{mr22}(\partial x_2 \varphi_r - i\alpha_2 \varphi_r) - a_{mr23}i\alpha_3 \varphi_r + a_{mr12} \partial x_1 \varphi_r + b_{mr2} \varphi_r], \quad (4)$$

$$R_m = \sum_r e^{i(\alpha, x)} [a_{m33}(\partial x_3 \varphi_r - i\alpha_3 \varphi_r) - a_{mr13}i\alpha_1 \varphi_r - a_{mr23}i\alpha_2 \varphi_r + b_{mr3} \varphi_r].$$

Вводя топологию, порождаемую евклидовым пространством, будем рассматривать область Ω как ориентированную цепь с границей, ориентация которой индуцируется ориентацией области [4]. Остановимся на случае установившихся гармонических колебаний неограниченной среды. Известно, что в этом случае для обеспечения единственности решение должно удовлетворять условию излучения в той или иной форме: условию Зоммерфельда, требующему от решения выполнения предельного дифференциального соотношения на бесконечности, принципу предельного поглощения Игнатовского, состоящему в переходе к системе без поглощения через систему с искусственным внутренним трением, принципу предельной амплитуды, требующему рассмотрения установившихся колебаний как предельного во времени решения задачи Коши, условию излучения энергии Мандельштама. На примере динамических смешанных задач для неоднородной полосы детальный анализ всех этих условий выполнил И.И. Ворович [5–7]. Им установлено, что при всех аномальных ситуациях, связанных с физикой распространения волн в сложных средах и областях, остаются эквивалентными принципы Игнатовского и Мандельштама. Следуя этому, применение метода факторизации позволяет осуществить отбор единственных решений предельно просто подобно одномерному случаю. Действительно, в этом случае нули определителя $Q(\alpha)$ обнаруживаются также и на вещественной оси [4]. Произведя разделение этих нулей по принадлежности к верхней полуплоскости α_{3k}^+ , если

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \alpha_{3k}^+ &\geq 0; \quad \operatorname{Im} \alpha_{3k}^+ \geq 0, \\ -\infty &\leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \infty, \end{aligned}$$

и к нижней для α_{3k}^- , если

$$\operatorname{Re} \alpha_{3k}^- \leq 0; \quad \operatorname{Im} \alpha_{3k}^- \leq 0,$$

и используя результаты работы [2] автоматически удовлетворяем требуемым условиям излучения. В случае многозначных функций при вычислении нулей дисперсионного (характеристического) уравнения необходим выбор нужных ветвей.

Используя теорему Стокса в области Ω и допуская, что вектор-функция φ обращает в тождество систему дифференциальных уравнений (1), приходим к выражению вида

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\sigma} \iint Q^{-1}(\alpha) \mathbf{D}(\alpha) \times \\ &\times \iint_{\Gamma} e^{-i(\alpha, \mathbf{x})} \boldsymbol{\omega}(\alpha, \boldsymbol{\xi}) d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge d\alpha_3, \end{aligned}$$

$$Q^{-1}(\alpha) = Q^{-1}(\alpha) \mathbf{D}(\alpha),$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

Напомним, что, как и в [2], внешняя форма содержит как соотношения, описывающие заданные граничные условия, так и нуждающиеся в определении функции или их нормальные производные со значениями на границе. В том случае, если комбинация производных и функций в граничных условиях (2) не совпадает с естественными, входящими в (4), то производится их формирование путем прибавления и вычитания необходимых членов до получения левых частей (2) без изменения значения $\boldsymbol{\omega}$.

Допустим, что рассматриваемый фрагмент формы среды представляет собой объект, структура которого определяется совокупностями сферических блочных элементов, в том числе, занимающих сферические усеченные области. Пример подобных блочных элементов приведен ниже.

2. Пусть два шара радиусов A и B , $A < B$, рассматриваемых в декартовой системе координат с центрами на оси oz , занимают области Ω_1 и Ω_2 пространства Ω соответственно. Расстояние между центрами принято h . Обозначим через Ω_3 область, пересечения шаров, т.е.

$$\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Построим блочный элемент в этой области для внутренней граничной задачи для дифференциального уравнения Гельмгольца вида

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\psi - \\ & - [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + k^2] \psi(x_1, x_2, x_3) = \\ & = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Известно, что псевдодифференциальные уравнения блочного элемента позволяют рассматривать все возможные варианты граничных условий для дифференциального уравнения в частных производных, т.е. рассматриваются граничные условия, как Дирихле или Неймана, так и смешанные.

В сферической системе координат r, θ, φ уравнение (5) для построенного с помощью вариации сферической границы сложного тела имеет вид

$$(\Delta + k^2)\psi = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$r, \theta, \varphi \in \Omega_3,$$

Решения граничных задач для уравнений (5),(6) ищутся в пространствах медленно растущих обобщенных функций \mathbf{H}_s .

Для исследования этого уравнения дифференциальным методом факторизации введем двойное и тройное преобразования и обращения Фурье – Бесселя в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3(\lambda, l, m)g = & \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(r, \theta, \varphi) J_{l+0,5}(\lambda r) \times \\ & \times Y_l^{m-}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi r dr = G(\lambda, l, m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3^{-1}(r, \theta, \varphi)G = & \\ = & \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l \int_0^\infty G(\lambda, l, m) J_{l+0,5}(\lambda r) \times \\ & \times Y_l^{m+}(\theta, \varphi) \lambda d\lambda = g(r, \theta, \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2(l, m)g = & \\ = & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\theta, \varphi) Y_l^{m-}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ & = G(l, m), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2^{-1}(\theta, \varphi)G = & \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l G(l, m) Y_l^{m+}(\theta, \varphi) = \\ & = g(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

Здесь $J_\nu(\lambda r)$ – функция Бесселя, $Y_l^m(\theta, \psi)$ – сферическая функция

$$\begin{aligned} Y_l^{m\pm}(\theta, \varphi) = & \\ = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{\pm im\varphi}. \end{aligned}$$

Следуя алгоритму применения дифференциального метода факторизации [4], введем две сферические системы координат с началами в центрах шаров на оси z исходной декартовой системы координат с параметрами r, θ, φ и ρ, γ, σ в областях Ω_1, Ω_2 соответственно. Эти системы координат обеспечивают для выбранного многообразия с краем касательное расслоение границы. Применяя к уравнению (6) преобразования (7), построим внешнюю форму, которая в координатах r, θ, φ принимает вид

$$\begin{aligned} \omega = & g \left\langle \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \psi \frac{\partial P_l^{|m|}(\cos \theta)}{\partial \theta} \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left\{ P_l^{|m|}(\cos \theta) \right\}^{-1} \right] r \sin \theta d\varphi \wedge dr - \right. \\ & - \left. \left[\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - im\psi \right] r d\theta \wedge dr + \right. \\ & + \left. \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial r^{-0,5} J_{l+0,5}(\lambda r)}{\partial r} \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left\{ r^{-0,5} J_{l+0,5}(\lambda r) \right\}^{-1} \right] r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \right\rangle, \\ g(\theta, \varphi, r) = & Y_l^{m+}(\theta, \varphi) r^{-0,5} J_{l+0,5}(\lambda r). \end{aligned}$$

Аналогичный вид имеет форма в системе ρ, γ, σ .

Осуществим переход к функциональному уравнению. Оно представимо в форме

$$K(\lambda)\Psi(l, m, \lambda) = \int_{\partial\Omega} \omega, \quad K(\lambda) = \lambda^2 - k^2 \quad (8)$$

Обозначим границу рассматриваемого тела в виде

$$\partial\Omega_3 = \partial\Omega_{10} \cup \partial\Omega_{20},$$

где $\partial\Omega_{10}$ представляет поверхность сферы радиуса A границы $\partial\Omega_3$, а $\partial\Omega_{20}$ — поверхность сферы радиуса B указанной границы.

3. Применяя традиционный алгоритм построения псевдодифференциальных уравнений, используем введенные сферические локальные системы координат для каждой границы $\partial\Omega_\nu$, $\nu = 1, 2$. Преобразуем правую часть в (8), положив

$$\int_{\partial\Omega_3} \omega = \int_{\partial\Omega_{10}} \omega_{2k-1} + \int_{\partial\Omega_{20}} \omega_{2k},$$

$$k = 1, 2, \dots, 6,$$

$$\int_{\partial\Omega_3} \omega = \int_{\partial\Omega_{10}} \omega_{2k-1} + \int_{\partial\Omega_{30}} \omega_{2k},$$

$$\partial\Omega_{30} = \partial\Omega_2 - \partial\Omega_{20}.$$

Здесь $\partial\Omega_{30}$ является дополнением границы $\partial\Omega_{20}$ в $\partial\Omega_2$.

Заметим, что в дальнейшем будут рассматриваться внешние и внутренние граничные задачи для уравнения (3) в разных областях, которые образуются границами $\partial\Omega_{10}$, $\partial\Omega_{20}$, $\partial\Omega_{30}$. Ради сокращения записи значения решений на этих границах везде будут обозначаться ψ_1 , ψ_2 соответственно, хотя их численные значения для различных граничных задач являются разными.

Для рассматриваемой области внешние формы, преобразованные к локальным координатам, на каждой границе имеют вид

$$\omega_1 = g_1 \left(r^{-0,5} J_{l+0,5}(\lambda r) \frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \psi_1 \frac{\partial r^{-0,5} J_{l+0,5}(\lambda r)}{\partial r} \right) A^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi,$$

$$g_1(\theta, \varphi, l, m) = Y_l^{m-}(\theta, \varphi),$$

$$g_2(\gamma, \sigma, s, n) = Y_s^{n-}(\gamma, \sigma),$$

$$\omega_2 = g_2 \left(f_1^\rho \frac{\partial\psi_2}{\partial\rho} - \psi_2 \frac{\partial f_1^\rho}{\partial\rho} \right) B^2 \sin\gamma d\gamma \wedge d\sigma,$$

$$\omega_3 = g_1 \left(f_1^r \frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \psi_1 \frac{\partial f_1^r}{\partial r} \right) A^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi,$$

$$\omega_4 = g_2 \left(\rho^{-0,5} J_{l+0,5}(\lambda\rho) \frac{\partial\psi_2}{\partial\rho} - \psi_2 \frac{\partial\rho^{-0,5} J_{l+0,5}(\lambda\rho)}{\partial\rho} \right) B^2 \sin\gamma d\gamma \wedge d\sigma,$$

$$f_1(r, \theta, l, \lambda) = \Gamma(l+0,5) \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^k s_q(r) \times \\ \times (l+0,5+t) \cos^q(\pi-\theta) [C_t^{l+0,5} \cos(\pi-\theta)] \times \\ \times J_{l+0,5+t}(\lambda r) J_{l+0,5+t}(\lambda h),$$

$$f_2(r, \theta, l, \lambda) = \Gamma(l+0,5) \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^k s_q(r) \times \\ \times (l+0,5+t) \cos^q(\pi-\theta) [C_t^{l+0,5} \cos(\pi-\theta)] \times \\ \times H_{l+0,5+t}^{(1)}(\lambda r) J_{l+0,5+t}(\lambda h),$$

$$f_\nu(r, \theta, l, \lambda) \equiv f_\nu^r, \quad f_\nu(\rho, \gamma, s, \tau) \equiv f_\nu^\rho, \quad \nu = 1, 2,$$

$$s_q(r) \equiv s_q(r, l, \lambda) = \frac{(-1)^q \Gamma(l+1+0,5)}{q! \Gamma(l+0,5-q+1)} \times \\ \times \left(\frac{4}{\lambda \sqrt{r^2+h^2}} \right)^\nu \left(\frac{2rh}{r^2+h^2} \right)^{q-l+0,5},$$

где $[C_t^{l+0,5} \cos(\pi-\theta)]$ — многочлены Гегенбауэра.

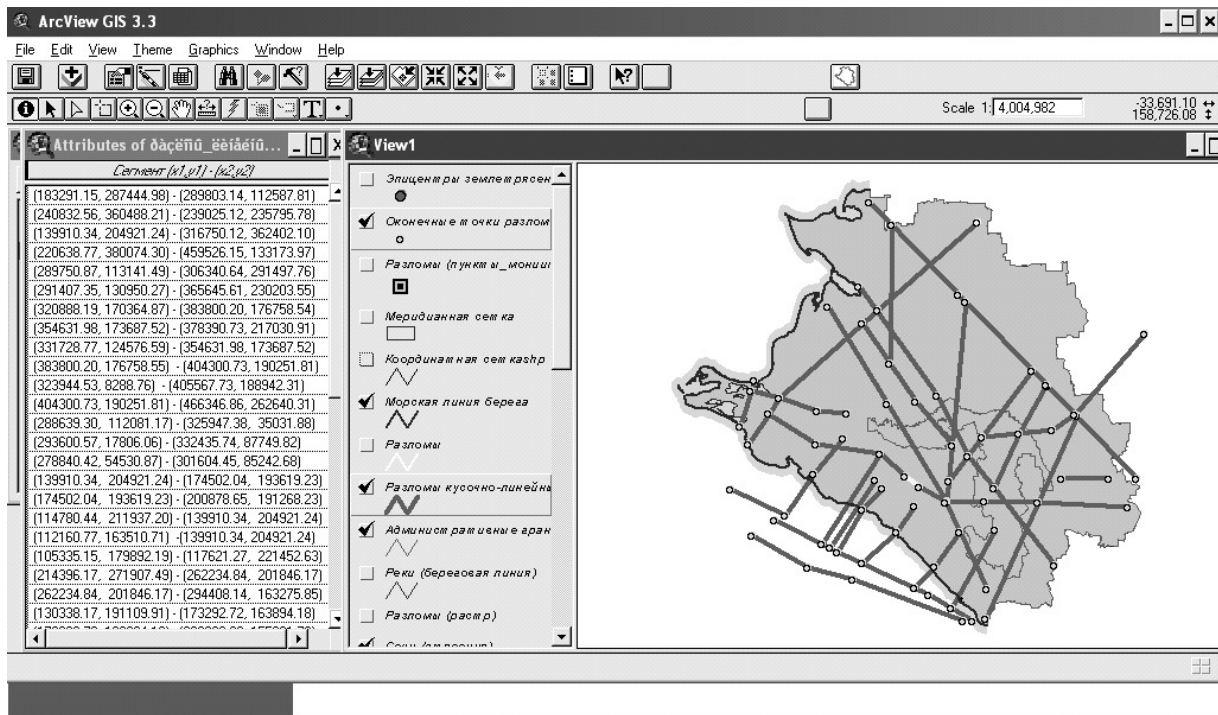
Ради простоты рассмотрим тот случай, когда имеет место соотношение

$$h - A < B < h,$$

означающее, что оси цилиндров находятся вне области Ω_3 .

Требование автоморфизма приводит к следующим псевдодифференциальным уравнениям

$$\mathbf{B}_2^{-1}(\theta, \varphi) \left[(r^{-0,5} J_{l+0,5}(kr))^{-1} \times \right. \\ \times \left\{ \int_0^{2\pi} \int_\pi^{\pi-\theta_0} g_1 \left\langle r^{-0,5} J_{l+0,5}(kr) \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \psi_1 \frac{\partial r^{-0,5} J_{l+0,5}(kr)}{\partial r} \right\rangle A^2 \sin\theta d\theta d\varphi + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \int_{\gamma_0}^\pi g_2(\gamma, \sigma, l, m) \left\langle f_1(\rho, \gamma, l, k) \frac{\partial\psi_2}{\partial\rho} - \right. \right. \\ \left. \left. - \psi_2 \frac{\partial f_1(\rho, \gamma, l, k)}{\partial\rho} \right\rangle B^2 \sin\gamma d\gamma d\sigma \right] = 0, \\ \theta, \varphi \in \partial\Omega_{10}.$$



Решение псевдодифференциального уравнения позволяет построить искомые блочные элементы, необходимые при формировании рассматриваемого фрагмента с использованием формулы (8).

4. Особое значение имеет случай, когда моделируемая блочными элементами область является разноразмерной. Этот случай изучался в работе [8].

Применим этот подход для случая моделирования блочной структуры, описывающей взаимодействие блоков литосферных плит сейсмоопасной территории, содержащих разломы сложной формы. Пример положения разломов на территории Краснодарского края приведен на рисунке.

В качестве примера рассмотрим скалярный случай вертикальных колебаний пластин, моделирующих литосферные плиты с разломами на трехмерном основании верхней мантии. Здесь имеет место взаимодействие двумерных и трехмерных блочных элементов. Тогда функциональное уравнение граничной задачи, представленное для описанной ранее пластины как для многообразия с краем, расщепляется для каждого блока и

дается соотношением [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})U_{3b} &\equiv \\ &\equiv (\varepsilon_{3b}(\alpha_{1b}^2 + \alpha_{2b}^2)^2 - \varepsilon_{4b})U_{3b} = \\ &= - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{5b} \mathbf{F}_2(g_{3b} + t_{3b}), \quad (9) \end{aligned}$$

$$b = 1, 2, \dots, B.$$

Здесь ω_b — участвующая в представлении внешняя форма, имеющая вид

$$\begin{aligned} \omega_b = \varepsilon_{3b} e^{i(\alpha, x)} &\left\{ - \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \right. \right. \\ &- \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \left. \right] dx_1 + \\ &+ \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \right] dx_2 \left. \right\}, \end{aligned}$$

\mathbf{F}_2 — оператор двумерного преобразования Фурье.

Граница блока, как указано выше, может иметь разного характера свойства контакта с соседними блоками или быть свободной. Характер контакта следует учесть в представлении псевдодифференциального уравнения.

Для его построения отыскиваются нули коэффициента при U_{3b} функционального уравнения (9) и затем выполняется требование автоморфизма применительно к функциональному уравнению путем вычисления формы-вычета Лере [9].

В результате получаются псевдодифференциальные уравнения.

Допустим, одна из частей границы блока, Ω_{br} , является прямой. Тогда построенная на этой части группа псевдодифференциальных уравнений принимает вид [8]

$$\omega_b = \varepsilon_{3b} e^{i(\alpha, \mathbf{x})} \times \left\{ - \left[i\alpha_2 M D^{-1} - Q D^{-1} - (\alpha_2^2 + \nu \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2^r} + i\alpha_2 [\alpha_2^2 + (2 - \nu)\alpha_1^2] u_{3r} \right] \right\} dx_1,$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \left\langle - \int_{\partial\Omega_{br}} \left\{ i\alpha_{21-} D^{-1} M_r - D^{-1} Q_r - (\alpha_{21-}^2 + \nu \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2^r} + i\alpha_{21-} [\alpha_{21-}^2 + (2 - \nu)\alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1^r x_1^r} dx_1^r + \int_{\partial\Omega_b \setminus \partial\Omega_{br}} \omega_b + \varepsilon_{5b} \mathbf{F}_2(g_{3b} + t_{3b}) \right\rangle = 0, \quad (10)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{21-}, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_{br},$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \left\langle - \int_{\partial\Omega_{br}} \left\{ i\alpha_{22-} D^{-1} M_r - D^{-1} Q_r - (\alpha_{22-}^2 + \nu \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2^r} + i\alpha_{22-} [\alpha_{22-}^2 + (2 - \nu)\alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1^r x_1^r} dx_1^r + \int_{\partial\Omega_b \setminus \partial\Omega_{br}} \omega_b + \varepsilon_{5b} \mathbf{F}_2(g_{3b} + t_{3b}) \right\rangle = 0,$$

$$\alpha_2 = \alpha_{22-}, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_{br}.$$

Здесь \mathbf{F}_1^{-1} — обратный оператор к одномерному преобразованию Фурье, момент изгиба на границе

$$M = -D \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right), \quad D = \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)};$$

перерезывающая силы на границе

$$Q = -D \left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right).$$

В подынтегральных функциях должно быть принято

$$\begin{aligned} \alpha_{21-} &= -i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 - \sqrt{\varepsilon_{4b}/\varepsilon_{3b}}}, \\ \alpha_{22-} &= -i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 + \sqrt{\varepsilon_{4b}/\varepsilon_{3b}}}. \end{aligned} \quad (11)$$

соответственно. Если граница не является прямой, можно считать что рассматривается малая зона этой границы. Аналогичный вид имеют другие группы псевдодифференциальных уравнения на других участках границы. Характерными являются свойства главного оператора, он содержит все типы граничных условий, которые может иметь на границе пластина при вертикальных колебаниях. Выписав все псевдодифференциальные уравнения для каждого участка границы и для каждого блока, внося в них соответствующие граничные условия и решив извлеченные из псевдодифференциальных интегральные уравнения, получим представление решений в каждом плоском блоке из соотношений.

$$u_{3b} = \mathbf{F}_2^{-1}[\mathbf{R}_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})]^{-1} \times \left\langle - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{5b} \mathbf{F}_2(g_{3b} + t_{3b}) \right\rangle. \quad (12)$$

Изложенный подход применяется для оценки состояния сейсмичности на территории олимпийского строительства в Сочи и Красной Поляне.

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Обобщенная факторизация в краевых задачах в многосвязных областях // ДАН. 2003. Т. 392. № 2. С. 163–167.
3. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962. 208 с.
4. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть II. М.: Наука, 1985. 464 с.
5. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости в неограниченных областях. М.: Наука, 1979. 320 с.

6. *Ворович И. И.* Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // ДАН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–820.
7. *Ворович И. И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // ДАН СССР, 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
8. *Бабешко В. А., Ритцер Д., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Федоренко А. Г.* К теории прогноза сейсмичности на основе механической концепции, топологический подход // ДАН 2013. Т. 450. № 2. С. 166–170.
9. *Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418. № 3. С. 321–323.

Ключевые слова: блочные элементы, факторизация, матрицы-функции, внешние формы, литосферные плиты.

Статья поступила 16 сентября 2013 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар
Южный научный центра РАН, г. Ростов-на-Дону

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Рядчиков И. В., Лозовой В. В., Федоренко А. Г., Колесников М. Н., Телятников И. С., Грищенко Д. В., Шишкин А. А., Уафа С. Б., Власова М. С., Смирнова М. В., Горшкова Е. М., 2013