УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ НАРУШЕНИЙ СПЛОШНОСТИ СОЕДИНЕНИЙ[1]

А. В. Павлова[2], ***С. Е. Рубцов***[3]

STUDY OF MULTI-LAYER MATERIALS WITH LOSS OF CONTINUITY IN LAYERS CONNECTION

Pavlova A. V., Rubtsov S. E.

The work is devoted to the problem of development of effective methods for calculating composite materials. The new approach to the study of dynamic processes in layered elastic bodies with loss of continuity in layers connection is offered. The given method admits natural generalization for the case of layered media with a system of rigid inclusions, simulating reinforcing elements in composite materials and elements of constructions.

В настоящее время в различных областях техники широкое применение получают композиционные конструкции, материалы, покрытия. Одним из типов композиционных структур являются слоистые структуры, свойства которых изменяются лишь вдоль одной координаты. Проблемам разработки эффективных методов расчета композиционных конструкций посвящено много работ [1–3], демонстрирующих различные подходы. Особый интерес представляет исследование динамических процессов в слоистых упругих телах при наличии нарушений сплошности межслойного контакта. Динамические эффекты в структурно-неоднородных средах с дефектами в связи со своей теоретической и практической значимостью для различных областей деятельности человека стали на сегодняшний день объектом пристального внимания.

Рассматривается динамическая задача о гармонических колебаниях с частотой ω слоистой упругой среды (пространство, полупространство, слой) при наличии трещин в плоскостях раздела упругих свойств. Такого рода дефекты, названные «вирусами» вибропрочности второго класса [4], характерны для слоисто-неоднородных структур.

В отличие от предложенного в [3], данный подход основан на применении формулы Бетти [5], описывающей интегральные соотношения между напряжениями и перемещениями. На основе этих соотношений выписываются системы функционально-матричных уравнений на поверхности среды и линиях раздела слоев. В работе [6] подобный метод применен для построения функционально-матричных соотношений динамических задач для однородной среды с системой трещин, однако во многих случаях для построения адекватной модели волнового процесса необходим учет анизотропии, которой обладают реальные конструкционные материалы и сплавы.

1. Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях разномодульного пространства с плоскопараллельными границами раздела свойств. Полагаем, что в прямоугольной декартовой системе координат плоскость x_1Ox_2 параллельна границам раздела слоев, а ось Ox_3 направлена вверх. На стыках слоев на высотах h_n имеются дефекты типа полостей-трещин, занимающих односвязные области Ω_n с кусочно-гладкими границами Σ_n, $n = \overline{1, N}$. На поверхностях $x_3 \to h_n \pm 0$ указанных плоскостей действуют напряже-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ р2003юг (03-01-96658, 03-01-00694, 03-01-96551), гранта Президента РФ (НШ-2107-2003.1).

[2]Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

[3]Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

ния $\tau_n^{\pm} e^{-i\omega t}$, $\tau_n^{\pm} = \left(\tau_{n1}^{\pm}, \tau_{n2}^{\pm}, \tau_{n3}^{\pm}\right)$, а перемещения точек поверхностей определяются векторами $\mathbf{u}_n^{\pm} e^{-i\omega t}$, $\mathbf{u}_n^{\pm} = \left(u_{n1}^{\pm}, u_{n2}^{\pm}, u_{n3}^{\pm}\right)$, причем

$$\begin{aligned}\tau_n^{+}(x_1, x_2, h_n) = \tau_n^{-}(x_1, x_2, h_n) = \\ = \tau_n(x_1, x_2, h_n), \quad -\infty < x_2, x_2 < \infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_n^{+}(x_1, x_2, h_n) - \mathbf{u}_n^{-}(x_1, x_2, h_n) = \\ = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_n, \\ \mathbf{u}_n, & (x_1, x_2) \in \Omega_n. \end{cases}\end{aligned}$$

Метод сведения краевых задач к системам интегральных уравнений, позволяющий понизить размерность задач, является одним из наиболее эффективных методов исследования задач в динамической теории упругости. Следуя схеме, изложенной в [6], для двух трещин в разномодульном пространстве получим систему функционально-матричных уравнений

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}_{11}^{-}\mathbf{U}_1^{-} = \mathbf{D}_{11}^{-}\mathbf{T}_1, \\ &\mathbf{L}_{12}^{-}\mathbf{U}_1^{+} - \mathbf{L}_{22}^{-}\mathbf{U}_2^{-} = \mathbf{D}_{12}^{-}\mathbf{T}_1 - \mathbf{D}_{22}^{-}\mathbf{T}_2, \\ &\mathbf{L}_{12}^{+}\mathbf{U}_1^{+} - \mathbf{L}_{22}^{+}\mathbf{U}_2^{-} = \mathbf{D}_{12}^{+}\mathbf{T}_1 - \mathbf{D}_{22}^{+}\mathbf{T}_2, \\ &\mathbf{L}_{23}^{+}\mathbf{U}_2^{+} = \mathbf{D}_{23}^{+}\mathbf{T}_2.\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{T}_n$, $\mathbf{U}_n^{\pm}$ — двумерные преобразования Фурье по переменным x_1, x_2 функций τ_n, $\mathbf{u}_n^{\pm}$. Структура матриц $\mathbf{L}_{n,k}^{\pm}$, $\mathbf{D}_{n,k}^{\pm}$ описана в [6] и здесь не приводится. Элементы этих матриц зависят от параметров преобразования Фурье α_1, α_2, частоты гармонических колебаний ω, параметров сред ρ_k, λ_k, μ_k и высоты расположения полостей h_n, первый индекс указывает на номер полости, второй — на номер слоя.

После ряда алгебраических преобразований систему (1) можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \left(\mathbf{L}_{12}^{+}\right)^{-1}\mathbf{L}_{22}^{+} \\ \left(\mathbf{L}_{22}^{-}\right)^{-1}\mathbf{L}_{12}^{-} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_{11} & \mathbf{l}_{12} \\ \mathbf{l}_{21} & \mathbf{l}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix},$$

где через $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i^{+} - \mathbf{U}_i^{-}$ обозначен Фурье-образ скачка перемещений $\mathbf{u}_i$ на берегах трещины ($i = 1, 2$), элементы $\mathbf{l}_{ij}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_{11} &= \left(\mathbf{L}_{12}^{+}\right)^{-1}\mathbf{D}_{12}^{+} - \left(\mathbf{L}_{11}^{-}\right)^{-1}\mathbf{D}_{11}^{-}, \\ \mathbf{l}_{12} &= \left(\mathbf{L}_{12}^{+}\right)^{-1}\mathbf{L}_{22}^{+}\left(\left(\mathbf{L}_{23}^{+}\right)^{-1}\mathbf{D}_{23}^{+} - \left(\mathbf{L}_{22}^{+}\right)^{-1}\mathbf{D}_{22}^{+}\right), \\ \mathbf{l}_{21} &= \left(\mathbf{L}_{22}^{-}\right)^{-1}\mathbf{L}_{12}^{-}\left(\left(\mathbf{L}_{12}^{-}\right)^{-1}\mathbf{D}_{12}^{-} - \left(\mathbf{L}_{11}^{-}\right)^{-1}\mathbf{D}_{11}^{-}\right), \\ \mathbf{l}_{22} &= \left(\mathbf{L}_{23}^{+}\right)^{-1}\mathbf{D}_{23}^{+} - \left(\mathbf{L}_{22}^{-}\right)^{-1}\mathbf{D}_{22}^{-}.\end{aligned}$$

Функционально-матричные соотношения для модели четырехслойного пространства представимы в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{G}_2^{+} & \mathbf{G}_2^{+}\mathbf{G}_3^{+} \\ \mathbf{G}_2^{-} & \mathbf{I} & \mathbf{G}_2^{+} \\ \mathbf{G}_3^{-}\mathbf{G}_2^{-} & \mathbf{G}_3^{-} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^{0} & \mathbf{G}_2^{+}\mathbf{N}_2^{+} & \mathbf{G}_3^{+}\mathbf{G}_2^{+}\mathbf{N}_3^{+} \\ \mathbf{G}_2^{-}\mathbf{N}_1^{-} & \mathbf{N}_2^{0} & \mathbf{G}_2^{+}\mathbf{N}_3^{+} \\ \mathbf{G}_3^{-}\mathbf{G}_2^{-}\mathbf{N}_1^{-} & \mathbf{G}_3^{-}\mathbf{N}_2^{-} & \mathbf{N}_3^{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{gathered}\mathbf{G}_k^{+} = \left(\mathbf{L}_{k-1,k}^{+}\right)^{-1}\mathbf{L}_{k,k}^{+}, \\ \mathbf{G}_k^{-} = \left(\mathbf{L}_{k,k}^{-}\right)^{-1}\mathbf{L}_{k-1,k}^{-}, \quad k = 2, 3,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_k^{\pm} = \left(\mathbf{L}_{n,k}^{\pm}\right)^{-1}\mathbf{D}_{n,k}^{\pm}, \\ \mathbf{N}_k^{\pm} = \mathbf{P}_{k+1}^{\pm} - \mathbf{P}_k^{\pm}, \\ \mathbf{N}_k^{0} = \mathbf{P}_{k+1}^{+} - \mathbf{P}_k^{-}, \quad k = \overline{1, 3},\end{gathered} \tag{2}$$

$\mathbf{I}$ — единичная матрица размера $3{\times}3$.

Матрицы $\mathbf{G}_k^{\pm}$, $\mathbf{P}_k^{\pm}$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{G}_k^{\pm} = \frac{1}{\left(\alpha^2\sigma_{1k}\sigma_{2k} + s_k^2\right)} \begin{pmatrix} g_{11}^k & g_{12}^k & \pm g_{13}^k \\ g_{21}^k & g_{22}^k & \pm g_{23}^k \\ \pm g_{31}^k & \pm g_{32}^k & g_{33}^k \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{gathered} g_{11}^k = \alpha_1^2\sigma_{1k}\sigma_{2k}e^{i\sigma_{1k}H_k} + \left(\alpha_2^2\sigma_{1k}\sigma_{2k} + s_k^2\right)e^{i\sigma_{2k}H_k}, \\ g_{12}^k = g_{21}^k = \alpha_1\alpha_2\sigma_{1k}\sigma_{2k}\left(e^{i\sigma_{1k}H_k} - e^{i\sigma_{2k}H_k}\right), \\ g_{13}^k = s_k\alpha_1\sigma_{2k}\left(e^{i\sigma_{1k}H_k} - e^{i\sigma_{2k}H_k}\right), \\ g_{22}^k = \alpha_2\sigma_{1k}\sigma_{2k}e^{i\sigma_{1k}H_k} + \left(\alpha_1^2\sigma_{1k}\sigma_{2k} + s_k^2\right)e^{i\sigma_{2k}H_k}, \\ g_{23}^k = s_k\alpha_2\sigma_{2k}\left(e^{i\sigma_{1k}H_k} - e^{i\sigma_{2k}H_k}\right), \\ g_{31}^k = s_k\alpha_1\sigma_{1k}\left(e^{i\sigma_{1k}H_k} - e^{i\sigma_{2k}H_k}\right), \\ g_{32}^k = s_k\alpha_2\sigma_{1k}\left(e^{i\sigma_{1k}H_k} - e^{i\sigma_{2k}H_k}\right), \\ g_{33}^k = s_k e^{i\sigma_{1k}H_k} + \alpha^2\sigma_{1k}\sigma_{2k}e^{i\sigma_{2k}H_k}, \\ H_k = h_k - h_{k-1}; \end{gathered}$$

$$\mathbf{P}_k^{\pm} = \frac{i}{\mu\sigma_{2k}\left(\alpha^2\sigma_{1k}\sigma_{2k} + s_k^2\right)} \times \begin{pmatrix} \pm p_{11}^k & \pm p_{12}^k & p_{13}^k \\ \pm p_{21}^k & \pm p_{22}^k & p_{23}^k \\ p_{31}^k & p_{32}^k & \pm p_{33}^k \end{pmatrix},$$

$$p_{11}^k = \alpha_1^2\sigma_{2k}^2 + 2\alpha_2^2\sigma_{1k}\sigma_{2k} + s_k\left(\sigma_{2k}^2 - \alpha_2^2\right),$$

$$p_{12}^k = p_{21}^k = \alpha_1\alpha_2\left(\sigma_{2k}^2 + s_k - \sigma_{1k}\sigma_{2k}\right),$$

$$p_{13}^k = -p_{31}^k = \alpha_1\sigma_{2k}\left(\sigma_{1k}\sigma_{2k} - s_k\right),$$

$$p_{22}^k = \alpha_2^2\sigma_{2k}^2 + 2\alpha_1^2\sigma_{1k}\sigma_{2k} + s_k\left(\sigma_{2k}^2 - \alpha_1^2\right),$$

$$p_{23}^k = -p_{32}^k = \alpha_2\sigma_{2k}\left(\sigma_{1k}\sigma_{2k} - s_k\right),$$

$$p_{33}^k = 0,5\gamma_{2k}^2\sigma_{1k}\sigma_{2k};$$

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad \sigma_{ik} = \pm\sqrt{(\gamma_{ik})^2 - \alpha^2},$$

$$\gamma_{ik} = \frac{\omega}{\omega v_{ik}}, i = 1, 2,$$

$$v_{1k} = \sqrt{\frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\rho_k}}, \quad v_{2k} = \sqrt{\frac{\mu_k}{\rho_k}},$$

$$s_k = 0,5\left(\gamma_{2k}\right)^2 - \alpha^2.$$

Одним из ключевых моментов разработанного метода является возможность получения рекуррентных соотношений при построении систем функционально-матричных уравнений для произвольного числа слоев и трещин. Так, система (1) функционально-матричных уравнений для N трещин в слоистом пространстве примет вид

$$\begin{gathered}
\mathbf{L}_{11}^-\mathbf{U}_1^- = \mathbf{D}_{11}^-\mathbf{T}_1,\\
\mathbf{L}_{12}^-\mathbf{U}_1^+ - \mathbf{L}_{22}^-\mathbf{U}_2^- = \mathbf{D}_{12}^-\mathbf{T}_1 - \mathbf{D}_{22}^-\mathbf{T}_2,\\
\mathbf{L}_{12}^+\mathbf{U}_1^+ - \mathbf{L}_{22}^+\mathbf{U}_2^- = \mathbf{D}_{12}^+\mathbf{T}_1 - \mathbf{D}_{22}^+\mathbf{T}_2,\\
\cdots\\
\mathbf{L}_{NN+1}^+\mathbf{U}_N^+ = \mathbf{D}_{NN+1}^+\mathbf{T}_N.
\end{gathered} \tag{3}$$

С учетом введенных обозначений (2) последние соотношения могут быть представлены в матричной форме

$$\mathbf{QU} = \mathbf{YT}. \tag{4}$$

Матрицы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Y}$ имеют блочную структуру, причем,

$$\mathbf{Q}_{ii} = \mathbf{I}, \mathbf{Q}_{ij} = \Psi_{j-i+1}^+ \text{ для } j > i,$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \Psi_{i-j+1}^- \text{ для } j < i,$$

$$\mathbf{Y}_{ii} = \mathbf{N}_N^0, \quad \mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij}\mathbf{N}_{j-i+1}^+ \text{ для } j > i,$$

$$\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij}\mathbf{N}_{i-j+1}^+ \text{ для } j < i, \quad i, j = \overline{1, N};$$

$$\Psi_j^- = \prod_{l=1}^{j-1}\mathbf{G}_{j-l+1}^-, \quad \Psi_j^+ = \prod_{l=2}^{j}\mathbf{G}_l^+;$$

$$\mathbf{U} = \left(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_N\right)^T,$$

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_N\right)^T.$$

При наличии полостей внутри упругого слоя следует лишь задать одинаковые параметры соседних слоев. Очевидно, предложенный подход может быть применен и для других моделей упругой среды.

2. Рассмотрим задачу о колебаниях пакета из N слоев, жестко сцепленного с упругим полупространством. Механические свойства полупространства определяются плотностью ρ_1 и упругими параметрами Ляме λ_1, μ_1, а каждого из слоев — характеристиками ρ_k, λ_k, μ_k соответственно, $k = \overline{2, N+1}$. В плоскостях раздела упругих сред на высотах h_n $(n = \overline{1, N})$ имеются полости-трещины. На верхней границе $x_3 = h_{N+1}$ действуют напряжения $\tau_{N+1}e^{-i\omega t}$, перемещения точек поверхности определяются вектором $\mathbf{u}_{N+1}^- e^{-i\omega t}$. В терминах работы [6] рассматриваемая задача описывает вирус $V\left(2/h_1; S_1/\ldots h_{N+1}; \infty\right)$.

Система матрично-функциональных уравнений (3) для этого случая будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{T}. \tag{5}$$

Размерность матриц $\tilde{\mathbf{Q}}$, $\tilde{\mathbf{Y}}$ — $(N+1)\times(N+1)$, а структура их аналогична структуре матриц $\mathbf{Q}$, $\boldsymbol{\Upsilon}$ соответственно, только в $\tilde{\mathbf{Q}}$, $\tilde{\mathbf{Y}}$ появляются дополнительные нижняя строка и правый столбец с элементами

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{i,N+1} = -\Psi_{N-i+2}^+,$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{N+1,j} = \Psi_{N-j+2}^-, \quad i, j = \overline{1, N},$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{N+1,N+1} = -\mathbf{I};$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{i,N+1} = -\Psi_{N-i+2}^+\mathbf{R}_{N+1}^+,$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{N+1,j} = \Psi_{N-j+2}^-\mathbf{N}_j^-, \quad i, j = \overline{1, N},$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{N+1,N+1} = -\mathbf{N}_{N+1}^-;$$

$$\mathbf{R}_k^+ = \left(\mathbf{L}_{k-1,k}^+\right)^{-1}\mathbf{D}_{k,k}^+;$$

$$\mathbf{U} = \left(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_{N+1}^-\right)^T,$$

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_{N+1}\right)^T.$$

Матрица $\mathbf{R}_k^+$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}_k^+ = \frac{i}{\mu\sigma_{2k}\left(\alpha^2\sigma_{1k}\sigma_{2k} + s_k^2\right)}\begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k & r_{13}^k\\ r_{21}^k & r_{22}^k & r_{23}^k\\ r_{31}^k & r_{32}^k & r_{33}^k\end{pmatrix},$$

$$r_{1,j}^k = p_{1,j}^k e^{i\sigma_{1k} H_k}, \quad r_{l,j}^k = p_{l,j}^k e^{i\sigma_{2k} H_k},$$
$$l = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Предложенный подход можно рассматривать применительно к решению задач для пакета упругих слоев.

3. Рассмотрим задачу о колебаниях пакета из $N+1$ слоев на недеформируемом основании при наличии дефектов в плоскостях раздела механических свойств (ρ_k, λ_k, μ_k, $k = \overline{1, N+1}$) на высотах h_n, $n = \overline{1, N}$. На нижней границе $x_3 = h_0$ действуют напряжения $\tau_0 e^{-i\omega t}$, перемещения точек поверхности определяются вектором $\mathbf{u}_0^+ e^{-i\omega t}$. Система матрично-функциональных уравнений (3) для этого случая будет иметь вид

$$\tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}\mathbf{U} = \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\mathbf{T}. \tag{6}$$

Появление нижней границы в рассматриваемой модели среды приводит к увеличению размерности матриц $\tilde{\mathbf{Q}}$, $\tilde{\mathbf{Y}}$ — $(N+2)\times(N+2)$, при этом эти матрицы $\tilde{\mathbf{Q}}$, $\tilde{\mathbf{Y}}$ получают дополнительные верхнюю строку и левый столбец с элементами

$$\tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}_{11} = \mathbf{I}, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}_{1,j} = \Psi_{j-1}^+,$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_{11} = \mathbf{P}_1^+, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_{1,j} = \Psi_{j-1}^+ \mathbf{N}_{j-1}^+, \quad j = \overline{2, N+1};$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}_{1,N+2} = -\Psi_N^+, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}_{j,1} = \Psi_{j-1}^-, \quad j = \overline{2, N+2};$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_{1,N+2} = -\Psi_N^+ \mathbf{R}_{N+1}^+,$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_{j,1} = \Psi_{N-j+1}^- \mathbf{R}_1^-, \quad j = \overline{2, N+2};$$

$$\mathbf{R}_k^- = \left(\mathbf{L}_{k,k}^-\right)^{-1} \mathbf{D}_{k-1,k}^-;$$

$$\mathbf{U} = \left(\mathbf{U}_0^+, \mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_{N+1}^-\right)^T,$$

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_{N+1}\right)^T.$$

В этом случае

$$\Psi_j^- = \prod_{l=1}^{j} \mathbf{G}_{j-l+1}^-, \quad \Psi_j^+ = \prod_{l=1}^{j} \mathbf{G}_l^+.$$

Применяемый для вывода систем (4)–(6) метод, в отличие от других подходов, позволяет получить общее представление матрицы-функции системы интегральных уравнений — символа соответствующего оператора. Исследование свойств этих матриц дает возможность изучить влияние на развитие напряженного состояния таких факторов, как расстояния между соседними трещинами, глубины залегания трещин и физико-механических свойств слоистой среды. Меняя физические и геометрические характеристики неоднородной среды, можно в широких пределах исследовать амплитудные и фазовые характеристики волновых процессов, изучить закономерности и эволюцию напряженно-деформированного состояния на докритической стадии нагрузок.

Предложенный подход допускает естественное обобщение на случай слоистых сред с системой жестких включений, моделирующих армирующие элементы в композитных материалах и элементах конструкций, а также произвольных комбинаций неоднородностей обоих типов.

Литература

1. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* К задаче о трещине на границе раздела упругих полосы и полупространства // Изв. РАН. МТТ. 2001. №1. С. 86–93.
2. *Бакулин В.Н., Гусев Е. Л., Марков В. Г., Емельянов А. И.* Оптимальное проектирование и численный расчет конструкций с применением композиционных и традиционных материалов // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. №9. С. 71–77.
3. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 500–507.
4. *Бабешко В.А.* Среды с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) // Известия РАН. МТТ. 2000. №3. С.5–9.
5. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
6. *Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р.* Задача о вибрации упругого полупространства, содержащего систему внутренних полостей // Доклады РАН. 2002. Т. 382. №5. С. 625–628.

Статья поступила 2 сентября 2004 г.
Кубанский государственный университет