

УДК 539.375

**МАКРОСКОПИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ОБРАЗОВАНИИ ИЗОЛИРОВАННОЙ РАСКРЫВАЮЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЫ***Дунаев В. И.<sup>1</sup>, Георгияди В. Г.<sup>2</sup>, Молдаванов С. Ю.<sup>3</sup>, Лозовой С. Б.<sup>4</sup>***MACROSCOPIC CRITERION OF FRAGILE DESTRUCTION AT FORMATION OF THE ISOLATED REVEALING CRACK**

Dunaev V. I., Georgiyadi V. G., Moldavanov S. U., Lozovoi S. B.

In work influence of a geometrical form of “narrow” defect on sizes of critical loadings necessary to start defect development is investigated. It is established that the limit curves corresponding to the critical defect in the form of an ellipse and bore are coincide. Therefore, it is possible to believe that influence of a geometrical form of “narrow” defects not essentially at construction within the offered model of macroscopic criterion of fragile destruction.

Keywords: fragile failure, macroscopic criterion, isolated crack.

**Введение**

В работах [1, 2] рассматривается статическая задача о хрупком разрушении пластины под действием главных напряжений  $P_1$  и  $P_2$  вследствие образования изолированного дефекта в форме эллипса с полуосями  $a$ ,  $b(a)$ ,  $b \ll a$ . Получен макроскопический критерий хрупкого разрушения в виде кривой эллиптической формы (предельной кривой) в пространстве главных напряжений  $P_1$  и  $P_2$ , определяющих все те комбинации компонентов  $P_1$ ,  $P_2$  (пределов прочности), при которых возможно начало движения трещины с характеризующим её размером  $a_*$ . При этом, независимо от комбинаций критических напряжений  $P_1$  и  $P_2$ , соответствующих точкам, лежащим на предельной кривой, трещина ориентируется либо перпендикулярно растягивающему напряжению, либо вдоль сжимающего напряжения, что соответствует экспериментальным данным для ряда хрупких изотропных мате-

риалов. Показано, что для определения коэффициентов предельной кривой достаточно получить из экспериментов на осевое растяжение и сжатие пределы прочности материала  $P_{T_0}^+$  и  $P_{T_0}^-$  при температуре опыта  $T = T_0$ . Естественно полагать, что аналогичные результаты имеют место при построении макроскопического критерия хрупкого разрушения при образовании изолированного дефекта в форме узкой раскрывающейся трещины (выточки), а форма и геометрические свойства дефекта могут влиять на величины критических нагрузок, необходимых для начала его развития.

**1. Энергетическое условие хрупкого разрушения**

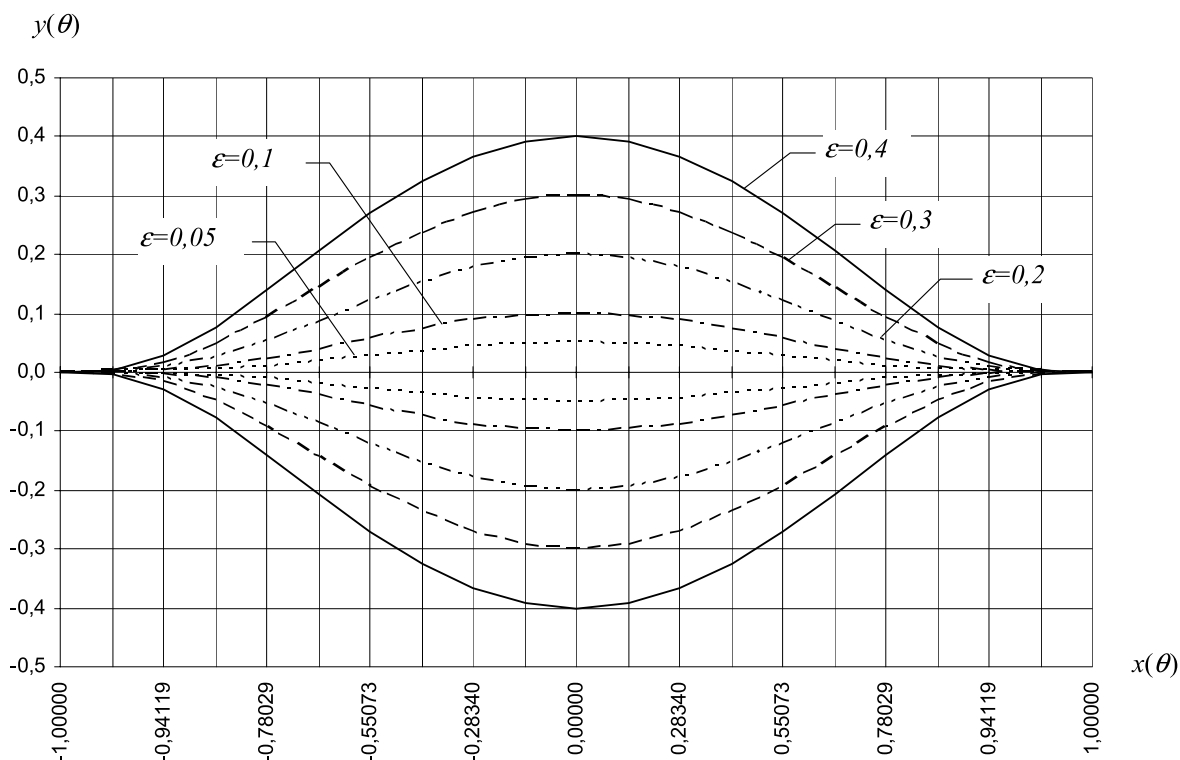
Решение краевых задач термоупругости для тел с дефектом зависит от параметров, характеризующих его геометрические размеры. Для получения зависимости между характерными размерами дефекта и заданны-

<sup>1</sup>Дунаев Владислав Игоревич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры строительной механики и сопротивления материалов Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru.

<sup>2</sup>Георгияди Владимир Георгиевич, ассистент кафедры производства строительных конструкций и строительной механики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru.

<sup>3</sup>Молдаванов Сергей Юрьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры производства строительных конструкций и строительной механики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru.

<sup>4</sup>Лозовой Станислав Борисович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры производства строительных конструкций и строительной механики Кубанского государственного университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru.



ми внешними нагрузками, при которых возможно его развитие, в работах [1, 2] сформулировано и исследовано условие разрушения, которое при однократном статическом нагружении имеет вид

$$\frac{dW}{da} = 0. \tag{1.1}$$

В условии (1.1)  $W = U - \gamma\Sigma$  — полная энергия тела при образовании в нём новой поверхности площадью  $\Sigma$ . В случае плоского напряжённо-деформированного состояния величина  $U$  определяется выражением [1, 2]

$$U = U^{(0)} - U^{(1)} = \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} n_j ds + \alpha_0 T_0 k_1 \oint_{\Sigma} u_i^{(1)} \delta_{ij} n_j ds, \quad i, j = 1, 2. \tag{1.2}$$

Здесь  $U$  — высвобождающаяся внутренняя энергия,  $U^{(0)}$  и  $U^{(1)}$  — внутренняя энергия тела без дефекта и с дефектом соответственно,  $\gamma\Sigma$  — внутренняя энергия, затраченная на образование новой поверхности дефекта  $\Sigma$ ,  $\sigma_{ij}^{(0)}$  — компоненты тензора напряжений в пластине без дефекта,

$n_j$  — компоненты вектора внешней нормали к области, ограниченной поверхностью  $\Sigma$ ,  $u_i^{(1)}$  — компоненты вектора напряжения в пластине с дефектом,  $\alpha_0$  — линейный коэффициент теплового расширения,  $T_0$  — абсолютная температура,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $k_1 = E/(1 - \nu)$  — для плоского напряжённого состояния,  $k_1 = E/(1 - 2\nu)$  — для плоской деформации,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Первое слагаемое в выражении (1.2) описывает потенциальную составляющую, второе — энтропийную составляющую высвобождающейся внутренней энергии.

## 2. Вычисление высвобождающейся внутренней энергии при образовании раскрывающейся трещины

Пусть односвязное тело до образования в нём изолированного дефекта находится в однородном напряжённом состоянии под действием главных напряжений  $P_1$  и  $P_2$ . Будем считать, что при образовании дефекта тело деформируется теми же напряжениями, приложенными вдали от дефекта (тео-

ретически — на бесконечности). Рассмотрим бесконечную пластину  $D$ , ослабленную криволинейным отверстием (выточкой) с контуром  $\Sigma$  (рисунок), когда на бесконечности приложены напряжения  $P_1$  и  $P_2$ , действующие во взаимно перпендикулярных направлениях. При этом напряжение  $P_1$  составляет с осью  $ox$  угол  $\alpha$ , а контур  $\Sigma$  свободен от внешних напряжений. Параметрическое уравнение контура в рассматриваемой плоскости имеет вид [3]

$$\begin{aligned} x(\theta) &= A \left[ \cos \theta + m \frac{(1-t) \cos \theta}{1-2t \cos 2\theta + t^2} \right], \\ y(\theta) &= A \left[ \sin \theta - m \frac{(1+t) \sin \theta}{1-2t \cos 2\theta + t^2} \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad t &= \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}; \\ m &= \frac{2(1-\varepsilon)^2}{2-\varepsilon}; \quad A = \frac{a}{2-\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{b}{a}; \end{aligned}$$

$a, b$  — характерные размеры дефекта.

Вычислим высвобождающуюся внутреннюю энергию  $U = U^{(0)} - U^{(1)}$  при образовании данного дефекта, когда тело до образования в нём дефекта находится в однородном напряжённо-деформированном состоянии. В плоских задачах теории упругости компоненты тензора напряжений и вектора перемещений определяются двумя функциями  $\phi(z)$  и  $\psi(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$  и их производными [4] следующим образом:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 [\phi'(z) + \bar{\phi}'(z)], \quad (2.2)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 [\bar{z}\phi''(z) + \phi'(z)],$$

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \chi\phi(z) - z\bar{\phi}'(z) - \psi(z),$$

где

$$2\mu = \frac{E}{1-\nu}, \quad \chi = 3 - 4\nu$$

для плоской деформации и

$$\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

для плоского напряжённого состояния.

Задача об определении напряжённо-деформированного состояния плоской пластины с дефектом сводится [4] к нахождению двух функций  $\phi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  комплексного переменного (комплексных потенциалов), удовлетворяющих граничным условиям

$$\phi_1(z) + z\bar{\phi}'_1(z) + \bar{\psi}_1(z) = 0, \quad z \in \Sigma \quad (2.3)$$

или в сопряжённой форме

$$\bar{\phi}_1(z) + \bar{z}\phi'_1(z) + \psi_1(z) = 0, \quad z \in \Sigma. \quad (2.4)$$

Функции  $\phi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \Gamma z + \phi^0(z), \\ \psi_1(z) &= \Gamma' z + \psi^0(z), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{4}(P_1 + P_2), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(P_1 - P_2)e^{-2i\alpha}.$$

Здесь  $\phi^0(z)$ ,  $\psi^0(z)$  — голоморфные в области  $D$  функции, включая и бесконечно удалённую точку.

Функции  $\phi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$ , определяющие однородное напряжённо-деформированное состояние плоскости без дефекта, имеют следующий вид [4]:

$$\phi_0(z) = \Gamma z, \quad \psi_0(z) = \Gamma' z. \quad (2.6)$$

Используя выражения (2.2) и граничные условия (2.3), (2.4), комплексное представление интегралов высвобождающейся внутренней энергии (1.2) можно представить [1, 2]

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\chi+1}{4\mu} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} \oint_{\Sigma} \left( \phi_1(z) [\bar{z}\phi''_0(z) + \psi'_0(z)] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{\phi}_1(z) [\phi'_0(z) + \bar{\phi}'_0(z)] \right) dz \right\} - \\ &- \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)}{2\mu} \operatorname{Re} \left\{ i \oint_{\Sigma} \bar{\phi}_1(z) dz \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

С учётом (2.6) из выражения (2.7) получим

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\chi+1}{4\mu} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left\{ i \oint_{\Sigma} ([2\Gamma\bar{\phi}_1(z) - \Gamma'\phi_1(z)] dz) \right\} - \\ &- \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)}{2\mu} \operatorname{Re} \left\{ i \oint_{\Sigma} \bar{\phi}_1(z) dz \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Заметим, что для вычисления высвобождающейся внутренней энергии  $U$  по формуле

(2.8) достаточно определить функцию  $\phi_1(z)$  из решения задачи о бесконечной плоскости, ослабленной отверстием, когда на бесконечности заданы напряжения  $P_1$  и  $P_2$ .

Функция  $z = \omega(\xi)$ , осуществляющая конформное отображение внешности единичного круга в плоскости  $\xi$  на внешность криволинейного контура  $\Sigma$ , заданного уравнениями (2.1) в плоскости  $z$ , имеет вид [3]

$$z = \omega(\xi) = A \left( \xi + \frac{m\xi}{\xi^2 - t} \right). \quad (2.9)$$

С учётом выражений (2.5) функции  $\phi_1(\xi)$  и  $\psi_1(\xi)$  представимы в следующем виде:

$$\phi_1(\xi) = A\Gamma\xi + \phi^0(\xi),$$

$$\psi_1(\xi) = A\Gamma'\xi + \psi^0(\xi),$$

где  $\phi^0(\xi)$ ,  $\psi^0(\xi)$  — голоморфные в области  $|\xi| > 1$  функции, включая бесконечно удалённую точку.

Для данной задачи функция  $\phi_1(\xi)$  запишется [3]

$$\phi_1(\xi) = A \left\{ \Gamma\xi - \frac{\bar{\Gamma}'}{\xi} - B \frac{\xi}{\xi^2 - t} \right\}, \quad (2.10)$$

где

$$B = \frac{m}{(1-t^2)^2 - 2mt(1+t^2)} \times \left\{ \Gamma(1-t^2)^2 + t^2m(1+t^2)\bar{\Gamma}' + \Gamma't \left[ (1-t^2)^2 - tm(1+t^2) \right] \right\}.$$

Переходя в интегралах (2.8) к новой переменной по формуле (2.9), получаем

$$U = -\frac{\chi+1}{4\mu} \times \left\{ i \oint_{\Omega} \left( \left[ 2\Gamma\overline{\phi_1(\sigma)} - \Gamma'\phi_1(\sigma) \right] \omega'(\sigma) d\sigma \right) \right\} - \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)}{2\mu} \operatorname{Re} \left\{ i \oint_{\Omega} \overline{\phi_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma \right\}. \quad (2.11)$$

Здесь  $\sigma = e^{i\beta}$ ,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  — произвольная точка единичной окружности  $\Omega$  в плоскости  $\xi$ .

Подынтегральные функции (2.11) с учётом выражений (2.1), (2.9), (2.10) регулярны внутри единичной окружности и на самой единичной окружности  $\Omega$  за исключением полюсов в точках  $\pm\sqrt{t}$ , лежащих внутри  $\Omega$ . Поэтому интегралы (2.11) вычисляются при помощи вычетов. При этом получаем

$$U = U(a, \varepsilon(a), \alpha(a)) = \frac{(\chi+1)\pi A^2}{16\mu} \times \left\{ P_1^2 \left[ 3 + \frac{(1-\varepsilon)^2(\varepsilon^2-2\varepsilon+2)(3\varepsilon^2-4\varepsilon+4)}{(2-\varepsilon)^2(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} - \frac{(1-\varepsilon)^2(4-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(2-\varepsilon)(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} \cos 2\alpha + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)^2(4-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(2-\varepsilon)^2(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} \cos 4\alpha \right] - 2P_1P_2 \left[ 1 - \frac{(1-\varepsilon)^2(\varepsilon^2-2\varepsilon+2)(\varepsilon^2+4\varepsilon-4)}{(2-\varepsilon)^2(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)^2(4-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(2-\varepsilon)^2(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} \cos 4\alpha \right] + P_2^2 \left[ 3 + \frac{(1-\varepsilon)^2(\varepsilon^2-2\varepsilon+2)(3\varepsilon^2-4\varepsilon+4)}{(2-\varepsilon)^2(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} + \frac{(1-\varepsilon)^2(4-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(2-\varepsilon)(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} \cos 2\alpha + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)^2(4-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(2-\varepsilon)^2(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} \cos 4\alpha \right] \right\} + \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)\pi A^2}{4\mu} \times \left\{ P_1 \left[ 1 + \frac{(1-\varepsilon)^2(\varepsilon^2-2\varepsilon+2)}{2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3} - \frac{2(1-\varepsilon)^2(4-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(2-\varepsilon)(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} \cos 2\alpha \right] + P_2 \left[ 1 + \frac{(1-\varepsilon)^2(\varepsilon^2-2\varepsilon+2)}{2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3} + \frac{2(1-\varepsilon)^2(4-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(2-\varepsilon)(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon^3)} \cos 2\alpha \right] \right\}, \quad (2.12)$$

где

$$\varepsilon(a) = \frac{b(a)}{a}.$$

Полагая в (2.12)  $\varepsilon = 1$  ( $b(a) = a$ ),  $P_1 = P_2 = P$  (что соответствует задачи об об-

разовании круглого дефекта при осесимметричном нагружении), получаем

$$U = \frac{2\pi a^2 P^2}{E} + \frac{4\pi a^2 \alpha_0 T_0 k_1 P}{E}. \quad (2.13)$$

Первое слагаемое в (2.13) совпадает с известным выражением для высвобождающейся потенциальной энергии при образовании изолированного дефекта в форме круга при осесимметричном нагружении [5], а второе слагаемое впервые рассматривается в работах [1, 2]. Аналогично при  $\varepsilon = 0$  ( $b(a) = 0$ ) получаем выражения для высвобождающейся внутренней энергии при образовании изолированного внутреннего дефекта в виде математического разреза [1, 2, 5].

### 3. Макроскопический критерий хрупкого разрушения при образовании изолированного дефекта в виде выточки

Состояние тела, при котором распространение дефекта (трещины) возможно, называется предельным состоянием равновесия, а условие наступления такого предельного состояния называют макроскопическим критерием разрушения. В случае однократного статического нагружения это энергетическое условие (1.1). При дополнительных предположениях о форме и расположении дефекта из условия (1.1) следует макроскопический критерий хрупкого разрушения в виде

$$F(P_1, P_2, E, \nu, T_0, \alpha_0, a_*) = 0, \quad (3.1)$$

который соответствует предельной кривой в пространстве главных напряжений  $P_1$  и  $P_2$ , определяющей такие комбинации пределов прочности, при которых возможно распространение дефекта с характеризующим его размером  $a_*$ .

Дифференцируя (2.12) по  $a$ , с учётом обозначений

$$b' = \frac{db}{da}, \quad \alpha' = \frac{d\alpha}{da}$$

в соответствии с условием (1.1) при  $\varepsilon^2 \ll 1$  и  $b'\varepsilon^2 \ll 1$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{da} = & \frac{(\alpha + 1)\pi}{16\mu} \times \\ & \times a \left\{ P_1^2 \left[ \frac{4(4 - 23\varepsilon) + b'(4 - 11\varepsilon)}{8(1 - 6\varepsilon)} - \right. \right. \\ & - 2 \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{4(1 - 5\varepsilon)} b' \right) \cos 2\alpha + \\ & + 2\alpha' a \sin 2\alpha + \frac{\varepsilon + b'(1 - 5\varepsilon)}{4(1 - 6\varepsilon)} \cos 4\alpha - \\ & \left. - \frac{a\varepsilon}{1 - 6\varepsilon} \alpha' \sin 4\alpha \right] + \\ & + P_2^2 \left[ \frac{4(4 - 23\varepsilon) + b'(4 - 11\varepsilon)}{8(1 - 6\varepsilon)} + \right. \\ & + 2 \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{4(1 - 5\varepsilon)} b' \right) \cos 2\alpha - \\ & - 2\alpha' a \sin 2\alpha + \frac{\varepsilon + b'(1 - 5\varepsilon)}{4(1 - 6\varepsilon)} \cos 4\alpha - \\ & \left. - \frac{a\varepsilon}{1 - 6\varepsilon} \alpha' \sin 4\alpha \right] - \\ & - 2P_1 P_2 \left[ \frac{\varepsilon + b'(1 - 4\varepsilon)}{2(1 - 6\varepsilon)} + \frac{\varepsilon + b'(1 - 5\varepsilon)}{4(1 - 6\varepsilon)} \cos 4\alpha - \right. \\ & \left. - \frac{a\varepsilon}{1 - 6\varepsilon} \alpha' \sin 4\alpha \right] \Big\} + \\ & + \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi + 1) \pi}{4\mu} \times \\ & \times a \left\{ P_1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{4(1 - 5\varepsilon)} b' \right) \cos 2\alpha + \alpha' a \sin 2\alpha \right] + \right. \\ & + P_2 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{4(1 - 5\varepsilon)} b' \right) \cos 2\alpha + \alpha' a \sin 2\alpha \right] \Big\} - \\ & - \frac{d}{da} (\gamma(a) \Sigma(a)) = 0. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Здесь  $\Sigma(a)$  — длина контура  $\Sigma$ .

Для изотропных материалов условие хрупкого разрушения (3.1) при каждом фиксированном  $a_* > 0$  представляет кривую в пространстве переменных  $P_1$  и  $P_2$ , которая должна быть симметрична относительно прямой  $P_1 = P_2$ . Это выполняется при следующем условии:

$$\alpha' a \sin 2\alpha = \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{4(1 - 5\varepsilon)} b' \right) \cos 2\alpha. \quad (3.3)$$

Условие (3.3) при  $b'\varepsilon \ll 1$  имеет вид

$$\alpha' a \sin 2\alpha = \cos 2\alpha. \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) совпадает с аналогичным соотношением [1,2], получаемым при построении макроскопического критерия хрупкого разрушения при образовании дефекта в форме «узкого» эллипса. Интегрируя уравнение (3.4), получаем

$$|\cos 2\alpha| = \frac{C_0^2}{a^2}, \quad a > 0 \quad (3.5)$$

или

$$\alpha(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} \arccos \frac{C_0^2}{a^2}, & 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{2} \left[ \pi - \arccos \frac{C_0^2}{a^2} \right], & \frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где  $C_0$  — произвольная постоянная.

С учётом равенства (3.3) после преобразования запишем условие (3.2) в виде

$$P_1^2 + P_2^2 - 2 \frac{\Theta_1}{\Theta_2} P_1 P_2 + \frac{1 - 6\varepsilon}{\Theta_2} \times \\ \times \left( 32\alpha_0 T_0 k_1 (P_1 + P_2) - \frac{512\mu}{(\chi + 1)\pi} \frac{\gamma}{a} \right). \quad (3.6)$$

Здесь  $\Sigma(a) \cong 4a$ ,  $\gamma(a) \equiv \gamma = \text{const}$ ,

$$\Theta_1 = 4(\varepsilon + b'(1 - 4\varepsilon)) + \\ + 2(\varepsilon + b'(1 - 5\varepsilon)) \cos 4\alpha - 8a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha',$$

$$\Theta_2 = 4(4 - 23\varepsilon) + b'(4 - 11\varepsilon) + \\ + 2(\varepsilon + b'(1 - 5\varepsilon)) \cos 4\alpha - 8a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'.$$

Предполагая, что для каждого материала существует характерный размер образующегося дефекта  $a = a_* = \text{const}$  при любых комбинациях пределов прочности в пространстве главных напряжений  $P_1, P_2$ , из выражения (3.6) получим макроскопический критерий хрупкого разрушения (предельную кривую) при однократном статическом нагружении

$$P_1^2 + P_2^2 - 2\nu_* P_1 P_2 + \\ + \left( 1 - \nu_* - \frac{5b'\varepsilon}{\Theta_2} \Big|_{a=a_*} \right) \times \\ \times \left( 2\alpha_0 T_0 k_1 (P_1 + P_2) - \frac{32\mu}{(\chi + 1)\pi} \frac{\gamma}{a_*} \right). \quad (3.7)$$

Здесь введено обозначение

$$\nu(a) = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}, \quad \nu_* = \nu(a_*),$$

Рассмотрим решения (3.5) при образовании дефекта критических размеров, т.е. при  $a = a_*$ . Этому значению  $a_*$  соответствуют различные комбинации величин критических напряжений  $P_1$  и  $P_2$ . Тогда  $C_0$  при  $a = a_*$  может быть определено, если известно (например, из эксперимента) положение трещин для какой-либо одной комбинации  $P_1$  и  $P_2$ . Известно, что для хрупких материалов (чугун, горные породы, пластмассы и т. д.) при одноосном сжатии трещина располагается параллельно действию сжимающей силы, а при одноосном растяжении — перпендикулярно к направлению действия растягивающей силы. Тогда, например, при  $P_2 = 0, P_1 = P^- < 0$ , следует положить  $\alpha(a_*) = 0$ , где  $P^-$  — предел прочности при одноосном сжатии. Аналогично при  $P_2 = 0, P_1 = P^+ > 0$  следует положить  $\alpha(a_*) = \frac{\pi}{2}$ , где  $P^+$  — предел прочности материала при одноосном растяжении. Для реализации таких значений  $\alpha(a_*)$  необходимо принять в решениях (3.5)  $C_0 = a_*$

$$\alpha(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} \arccos \frac{a_*^2}{a^2}, \\ 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < a_* < a, \\ \frac{1}{2} \left[ \pi - \arccos \frac{a_*^2}{a^2} \right], \\ \frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Как следует из равенств (3.8), независимо от комбинации критических напряжений  $P_1$  и  $P_2$ , соответствующих точкам, лежащим на кривой разрушения (3.7), трещина всегда будет ориентирована или перпендикулярно к линии действия растягивающего напряжения, или вдоль сжимающего напряжения, т.е. величина  $\alpha(a_*)$  всегда принимает одно из двух значений: 0 или  $\frac{\pi}{2}$ . Выбор ориентации трещины в каждом конкретном случае может быть сделан на основании известных экспериментальных данных.

Оценим выражение

$$\frac{5b'\varepsilon}{\Theta_2}. \quad (3.9)$$

При  $a = a_*$  (3.9) имеет вид

$$\frac{5b'\varepsilon}{16 - 20\varepsilon + 6b' - 21b'\varepsilon}$$

Пусть  $b' \geq 0$ , т.е. трещина «раскрывается» при развитии. Выражение

$$16 - 90\varepsilon + 6b' - 21b'\varepsilon = 10 - 90\varepsilon + b'(6 - 21\varepsilon) \geq 0,$$

$$\varepsilon < 1/6$$

(последнее условие не является ограничительным, т.к. для реальных трещин величина  $\varepsilon = b/a$  значительно меньше 1/6).

Получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{5b'\varepsilon}{16 - 90\varepsilon + 6b' - 21b'\varepsilon} = \\ &= \frac{5b'(90 + 21b')\varepsilon}{(90 + 21b')(16 + 6b' - (90 + 21b')\varepsilon)} \leq \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{2(1 - 6\varepsilon)}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

В силу оценки (3.10) критерий (3.7) с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  имеет вид

$$\begin{aligned} P_1^2 + P_2^2 - 2\nu_* P_1 P_2 + \\ + 2\alpha_0 T_0 k_1 (1 - \nu_*) (P_1 + P_2) - \\ - \frac{32\mu(1 - \nu_*)}{(\chi + 1)\pi} \frac{\gamma}{a_*} = 0. \quad (3.11) \end{aligned}$$

В соответствии с постулатами А.А. Ильюшина и Д. Друкера предельная кривая должна быть выпуклой [6]. Из выражения (3.11) находим, что  $\nu_* \in (-1, 1)$ . При таких значениях  $\nu_*$  кривая (3.11) представляет собой эллипс в пространстве главных напряжений  $P_1$  и  $P_2$ .

При одних и тех же значениях величины  $\nu_*$  выражение (3.11) совпадает с критерием, полученным в работах [1, 2] для дефекта эллиптической формы, следовательно, геометрическая форма «узкого» дефекта не влияет на величины критических нагрузок, необходимых для начала его развития.

Для построения предельной кривой достаточно экспериментально определить пределы прочности материала при осевом растяжении  $P_{T_0}^+$  и сжатии  $P_{T_0}^-$  при температуре опыта  $T = T_0$ . Действительно, полагая в (3.12)  $P_2 = 0$ ,  $P_1 = P_{T_0}$ , получаем

$$P_{T_0}^2 + 2\alpha_0 T_0 k_1 (1 - \nu_*) P_{T_0} - \frac{32\mu(1 - \nu_*)}{(\chi + 1)\pi} \frac{\gamma}{a_*} = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$P_{T_0}^\pm = -\alpha_0 T_0 (1 - \nu_*) k_1 \pm \sqrt{\psi_9},$$

$$\begin{aligned} \psi_9 = [\alpha_0 T_0 (1 - \nu_*) k_1]^2 + \\ + 32\mu(1 - \nu_*) \gamma [\pi(\chi + 1) a_*]^{-1}. \end{aligned}$$

Также имеют место равенства

$$P_{T_0}^+ + P_{T_0}^- = 2\alpha_0 T_0 (1 - \nu_*) k_1, \quad (3.12)$$

$$P_{T_0}^+ P_{T_0}^- = -32\mu(1 - \nu_*) \gamma [\pi(\chi + 1) a_*]^{-1}.$$

При этом условие  $k_1 \neq 0$  всегда выполняется для хрупких материалов, т.к. для них  $\nu < 0,5$ .

Пусть  $\alpha_0 \neq 0$ ,  $T_0 \neq 0$ . Вычисляя из первого равенства (3.12)

$$2\nu_* T_0 = 2 + \frac{P_{T_0}^+ + P_{T_0}^-}{2\alpha_0 T_0 k_1}$$

и учитывая второе равенство (3.12), запишем критерий (3.11) в виде

$$\begin{aligned} P_1^2 + P_2^2 - \left(2 + \frac{P_{T_0}^+ + P_{T_0}^-}{\alpha_0 T_0 k_1}\right) P_1 P_2 - \\ - (P_{T_0}^+ + P_{T_0}^-) (P_1^2 + P_2^2) + P_{T_0}^+ P_{T_0}^- = 0. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты предельной кривой (3.11) могут быть определены, если известны пределы прочности материала при растяжении и сжатии и критерий имеет вид (3.13).

Отметим, что первое и второе равенства (3.12) позволяют определить величину  $\gamma$  через критические напряжения  $P_{T_0}^+$  и  $P_{T_0}^-$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{a_*} &= -\frac{P_{T_0}^+ P_{T_0}^- \pi (\chi + 1)}{32\mu(1 - \nu_*)} = \\ &= \frac{\alpha_0 T_0 \pi (\chi + 1) k_1}{16\mu} \frac{P_{T_0}^+ P_{T_0}^-}{P_{T_0}^+ + P_{T_0}^-}. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Для оценки критического размера дефекта  $a_*$  (величины порядка линейного размера макрочастицы материала) можно использовать подход, предложенный А.А. Ильюшиным [7]. Тогда из выражения (3.14) теоретически определяется величина  $\gamma$ .

### *Литература*

1. Дунаев И. М., Дунаев В. И. Об энергетическом условии разрушения твёрдых тел // ДАН. 2000 Т. 372. №1. С. 43–45.
2. Дунаев И. М., Дунаев В. И. Энергетическое условие разрушения твёрдых тел // Механика твёрдого тела. 2003. №6. С. 69–81.
3. Панасюк В. В., Буйна Е. В. К вопросу о предельном равновесии пластин с острыми концентраторами напряжений // Концентрация напряжений. Львов. Вып. 2. 1968. С. 115–125.
4. Мухомливили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения. Т. 2. Разрушение. М.: Мир, 1975. 764 с.
6. Огибалов П. М., Лопаткин В. А., Кишкин Б. П. Механика полимеров. М.: Из-во МГУ, 1975. 527 с.
7. Ильюшин А. А., Ленский Б. С. Сопротивление материалов. М.: Физ.-мат. лит., 1959. 371 с.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, макроскопический критерий, изолированная трещина.

---

Статья поступила 26 августа 2013 г.

Кубанский государственный технологический университет, г. Краснодар

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Дунаев В. И., Георгияди В. Г., Молдаванов С. Ю., Лозовой С. Б., 2013