УДК 539.3

НЕОДНОРОДНЫЙ ИНТЕРФЕЙСНЫЙ СЛОЙ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ УПРУГИМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ [1]

В. В. Бужан[2], ***Р. Вильямс***[3], ***Е. М. Горшкова***[4]

INHOMOGENEOUS INTERFACE LAYER BETWEEN ELASTIC HALF-SPACES

V. V. Buzhan, R. Williams, E.M. Gorshkova

The work considers a dynamic problem for a thin inhomogeneous layer between two elastic half-spaces with different physical-mechanical properties. The layer simulates a welded joint or a glued connection. The problem is reduced to the system of matrix-functional equations. Numerical analysis of the system determinant has been carried out; velocities of interface waves have been investigated depending on the frequency.

Рассматривается задача для тонкого неоднородного слоя между двумя упругими полуограниченными телами. Случай, когда свойства материалов совпадают, может служить достаточно точной моделью для сварного шва, который был подробно изучен в работах [1, 2]. Данное ограничение позволило найти точное решение задачи. Для модели клеевого соединения данное ограничение уже неприемлемо, так как склеиваемые образцы могут отличаться и по физическим, и по механическим свойствам. В этом случае не удаётся строить точные решения и приходится использовать приближенные методы.

Гармонические колебания сплошной среды описываются дифференциальными уравнениями Ламе в перемещениях $\mathbf{u}(x,y,t) = \mathbf{u}(x,y)e^{-i\omega t}$. Условия на границе $y=0$ связывают перемещения и напряжения $\boldsymbol{\tau}(x,y,t) = \tau(x,y)e^{-i\omega t}$ посредством матрицы перехода $\mathbf{B}$:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yx} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ \tau'_{yy} \\ \tau'_{yx} \end{pmatrix}, \quad x<0,$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yx} \end{pmatrix} = \mathbf{B}' \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ \tau'_{yy} \\ \tau'_{yx} \end{pmatrix}, \quad x>0.$$

Здесь u_i и τ_{ij} — компоненты вектора перемещений и тензора напряжений (штрих соответствует нижней полуплоскости). С помощью метода интегрального преобразования Фурье данная задача сводится к системе интегральных уравнений типа Винера–Хопфа

$$\mathbf{T}(\alpha)\mathbf{X}_1^- = \mathbf{X}_1^+ + \mathbf{Q}_1(\alpha)\mathbf{L}_1,$$

где

$$\mathbf{T}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1-\Lambda f_{21} & \Lambda f_{11} \\ -\in_0^2 \Lambda f_{11} & 1-\in_0^2 \Lambda f_{12} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \left(\frac{h\omega}{v_{20}}\right)^2 \Big/ \Delta,$$

$$f_{21} = \frac{k_{22}^4}{\Delta_2\rho_2}\alpha_{21} + \frac{k_{12}^4}{\Delta_1\rho_1\alpha_{11}}, \quad f_{12} = \frac{k_{22}^4}{\Delta_1\rho_1}\alpha_{12},$$

$$f_{11} = i\alpha\Big\{\frac{k_{12}^4}{\Delta_1\rho_1}\left[\alpha^2+\alpha_{12}^2-2\alpha_{11}\alpha_{12}\right] - \\ - \frac{k_{22}^4}{\Delta_2\rho_2}\left[\alpha^2+\alpha_{22}^2-2\alpha_{21}\alpha_{22}\right]\Big\},$$

$$\alpha_{ij} = \sqrt{\alpha^2-k_{ij}^2},$$

$$\in_0 = \frac{\nu_{20}}{\nu_{10}},$$

$$\Delta_i = (2\alpha^2-k_{i2}^2)^2 - 4\alpha^2\alpha_{i1}\alpha_{i2}, \quad \Delta = f_{11}^2 + f_{12}f_{21},$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ Р2003ЮГ (03-01-00694, 03-01-96662).

[2]Бужан Виталий Викторович, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник НИИ проблем механики и геоэкологии при КубГУ.

[3]Вильямс Ричард (Williams Richard), профессор университета Теннесси, США.

[4]Горшкова Елена Михайловна, старший научный сотрудник НИИ проблем механики и геоэкологии при КубГУ.

ν_{10}, ν_{20} — скорости P- и S-волн в сварном шве; ρ_1 и ρ_2 — плотность материала в нижней и верхней полуплоскости; k_{ij} — волновые числа (первый индекс означает полупространство: 1 — нижнее, 2 — верхнее, а второй — тип волны: 1 — продольная, 2 — поперечная); $\mathbf{X}_1^{\pm}$ — векторы неизвестных; α — параметр преобразования Фурье; выражения для $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{L}_1$ представлены в [1].

Для решения систем интегральных уравнений существуют как аналитические, так и численные методы. Но использование последних предполагает большие объёмы вычислений. Кроме того, наличие осциллирующего ядра, как в данном случае, может существенно затруднить сходимость вычислительного процесса. Но некоторые ограничения, наложенные на условия задачи, позволяют обойти эти трудности. В частности, если условия на границе идеальны (полуплоскости соединены жестко, без проскальзывания), система расщепляется на отдельные уравнения, которые могут быть решены аналитически. Аналогичных результатов можно достигнуть, если предположить, что среды обладают одинаковыми физическими и механическими свойствами, а материал тонкого слоя разнится по своим упругим свойствам вдоль границы соединения. Данный случай соответствует модели сварного шва и достаточно подробно изучен [1, 2]. Если допустить, что материалы двух соединенных сред различны, то матрица системы окажется полностью заполненной и задача не расщепляется. В этом случае прибегают к факторизации (разделению на классы аналитичности) в виде произведения матрицы системы. На сегодняшний день известен только один класс матриц, допускающих точную факторизацию — функционально-коммутативные матрицы. Для остальных типов матриц используется приближённая факторизация [3]. Суть метода состоит в приближении элементов матрицы рациональными функциями. Полученную в результате аппроксимации $\boldsymbol{\lambda}$-матрицу [4] с помощью элементарных преобразований приводят к треугольному или диагональному виду. К полученной матрице уже можно применить точные методы факторизации.

Матрица системы $\mathbf{T}(\alpha)$ не является функционально-коммутативной. При больших α она также не вырождается в функционально-коммутативную:

$$\mathbf{T} = \overline{\Lambda}\begin{pmatrix} -d_{12}|\alpha| & d_{11}\alpha \\ -\in_0^2 d_{11}\alpha & -\in_0^2 d_{12}|\alpha| \end{pmatrix} \times \times \left\{1 + 0(|\alpha|^{-1})\right\}, \quad (1)$$

$$\ell_0 = \frac{i}{\overline{\Lambda} d_{12}}, \quad m_0 = \frac{\ell_0}{\in_0^2},$$

$$c = d_{11}^2 + d_{12}^2, \quad \overline{\Lambda} = \left(\frac{h\omega}{\nu_{20}}\right)^2 / c,$$

$$d_{11} = \frac{1}{2} i \left\{ \frac{k_{12}^2 k_{11}^2}{\rho_1}[k_{11}^2 - k_{12}^2]^{-1} - - \frac{k_{22}^2 k_{21}^2}{\rho_2}[k_{21}^2 - k_{22}^2]^{-1} \right\},$$

$$d_{12} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{k_{21}^2}{\rho_2}\left[k_{21}^2 - k_{22}^2\right]^{-1} + \frac{k_{12}^4}{\rho_1}\left[k_{11}^2 - k_{12}^2\right]^{-1} \right\}$$

и поэтому не допускает приближенной факторизации. Однако с помощью линейных преобразований

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} i\ell_0 & \ell_0 \\ \ell_0 & i\ell_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

с определителями $\det \tilde{\mathbf{P}} = -2\ell_0^2$ и $\det \tilde{\mathbf{Q}} = 2$ матрица (1) может быть сведена к диагональной:

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{Q}} \sim \begin{pmatrix} 2(|\alpha| - b\alpha) & 0 \\ 0 & 2(|\alpha| + b\alpha) \end{pmatrix},$$

$$b = i\frac{d_{11}}{d_{12}}, \quad |b| < 1.$$

Основным критерием приближенной факторизации матрицы является ее стремление к единичной при $|\alpha| \to \infty$. С этой целью необходимо ввести в рассмотрение нормализатор — специальную функционально-коммутативную матрицу, которая в данном случае строится по следующему правилу:

$$\mathbf{N}(\alpha) = \mathbf{N}_+(\alpha)\mathbf{N}_-(\alpha),$$

$$\mathbf{N}_{\pm}(\alpha) = \begin{pmatrix} n_{\pm}(\alpha, 1) & 0 \\ 0 & n_{\pm}(\alpha, 2) \end{pmatrix},$$

$$n_{\pm}(\alpha, k) = \sqrt{2}(\alpha \pm i\alpha)^{\tilde{Q}_{\pm(k)}}(1 - b^2)^{\frac{1}{4}},$$

$$Q_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{\pi} \operatorname{arcth}(b\delta_k),$$

$$\delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1.$$

Отсюда при $|\alpha| \to \infty$

$$\mathbf{H}(\alpha) = \mathbf{N}_{+}^{-1}(\alpha)\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{T}(\alpha)\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{N}_{-}^{-1}(\alpha)\mathbf{I}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{I} = \|\delta_{ij}\|_{ij=1,}^{2}$; $\delta_{i\,j}$ — символ Кронекера.

Тогда к полученной матрице (2) может быть применена процедура приближенной факторизации. Для этого необходимо аппроксимировать элементы матрицы $\mathbf{H}$ полиномами Бернштейна:

$$\mathbf{H}(\alpha) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \approx \mathbf{P}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12} \\ \mathrm{P}_{21} & \mathrm{P}_{22} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

$$\mathrm{P}_{ij} = \left(\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{A}^2 + \alpha^2}\right)^{\mathrm{N}} \times \left[\sum_{u=0}^{\mathrm{N}-1} h_{ij}\left(\mathrm{A}\sqrt{\frac{n}{\mathrm{N}-n}}\right) C_{\mathrm{N}}^{n}\left(\frac{\alpha}{\mathrm{A}}\right)^{2n} + \delta_{ij}\left(\frac{\alpha}{\mathrm{A}}\right)^{2\mathrm{N}}\right].$$

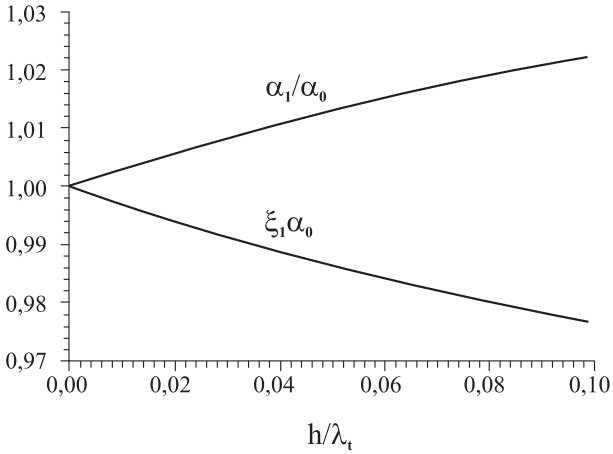
Полиномиальная матрица из (3) может быть сведена к треугольному виду с помощью линейных преобразований $\mathbf{C}_k(\alpha)$ с определителем, равным ± 1:

$$\mathbf{N}(\alpha) = \prod_{k=1}^{s} \mathbf{C}_{s+1-k}(\alpha)\mathbf{P}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\alpha) & \mathbf{S}(\alpha) \\ 0 & \mathbf{T}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Методы построения матриц $\mathbf{C}_k$ и факторизации матрицы $\mathbf{N}$ подробно описаны в [3,5].

Для исследования скоростей интерфейсных волн проведён численный анализ определителя матрицы системы $\mathbf{T}(\alpha)$ при изменяющихся значениях нормализованной частоты h/λ_t, где λ_t — длина поперечной волны в интерфейсном слое. На рисунке представлены графики нормализованных коэффициента пропорциональности $\xi_1\alpha_0$ (пунктир) и нуля α_1/α_0 определителя $\mathbf{T}(\alpha)$ — (α_0 — нуль $\Delta(\alpha)$). Расчёты проводились для следующих параметров модели:

Нижнее полупространство: $v_{12} =$ 3,24 км/с, $v_{11} = 6,2$ км/с, $\rho_1 = 2,7$ кг/м^3; верхнее полупространство: $v_{22} = 3,28$ км/с, $v_{21} = 6,08$ км/с, $\rho_2 = 7,84$ кг/м^3; слой: $v_{20} = 2,69$ км/с, $v_{10} = 4,64$ км/с, $\rho_0 = 3,14$ кг/м^3, толщина — 10^{-4} м, частота —1 МГц.



Из анализа диаграмм видно, что с ростом частоты скорость интерфейсной волны падает.

Литература

1. *Бабешко В. А., Рохлин С. И., Хуанг В., Бужан В. В.* К проблеме дефектоскопии сварных швов // ДАН. 1994. Т. 337. № 6. С. 732-736.
2. *Бабешко В. А., Горшкова Е. М., Рохлин С. И.* К проблеме оценки прочности сварного шва // ДАН СССР. 1997. Т. 353. № 3. С. 327–329.
3. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей М.: Наука. 1979. 320 с.
4. *Ланкастер Р.* Теория матриц М.: Наука. 1978. 280 с.
5. *Бабешко В. А., Бужан В. В., Вильямс Р.* К проблеме локализации вибрационного процесса в упругом твердом теле совокупностью плоских жестких включений // ДАН. 2002. Т. 382. № 6. С. 765–767.

Статья поступила 5 марта 2003 г.
Кубанский государственный университет, University of Tennessee (Knoxwille, USA)
© 2003 Бужан В. В., Вильямс Р., Горшкова Е. М.