УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ШТАМПА И УПРУГОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ТРЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА[1]

М. И. Чебаков[2]

ABOUT SOME SINGULARITIES OF CONTACT INTERACTION OF A STAMP AND AN ELASTIC LAYER IN PRESENCE OF FRICTION FORCES IN THE CONTACT AREA

Chebakov M. I.

Two plane contact problems about interaction of a stamp with a flat foundation and an elastic layer in presence of the Coulomb friction forces in the contact area are investigated by the asymptotic method of large λ. The lower bound of the layer is either fixed, or there are no normal displacements and tangential stresses, while normal and tangential forces act on the stamp; the stamp-layer system is under the conditions of limit equilibrium, and the stamp does not turn during deformation of the layer.

The results obtained describe the action of geometric and mechanical parameters of the problems on the form of a deformed surface of the layer outside the contact area; the diagram of contact stresses and their moment has been drawn up taking into account friction forces in the contact area.

Асимптотическим методом больших λ [1–3] исследуются две плоские контактные задачи о взаимодействии штампа с плоским основанием с упругим слоем при учете сил кулоновского трения в области контакта. Нижняя грань слоя либо закреплена, либо на ней отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения, а на штамп действуют нормальные и касательные усилия, при этом система штамп-слой находится в условиях предельного равновесия и штамп в процессе деформации слоя не поворачивается.

Получены новые результаты, связанные с влиянием геометрических и механических параметров задач (особенно коэффициента Пуассона и толщины слоя) на форму деформированной поверхности слоя вне области контакта, эпюру контактных напряжений и их момента при учете сил трения в области контакта.

Плоские контактные задачи для слоя с учетом сил трения в зоне контакта ставились и исследовались во многих работах, в том числе [2, 4, 5].

1. Постановка задач

Рассмотрим в декартовых координатах (x, y) упругий слой $0 \le y \le h$. Пусть штамп с плоской подошвой взаимодействует с границей слоя $y = h$, на штамп действуют нормальная сила P и касательная сила $T = \mu P$, в зоне контакта действуют силы кулоновского трения с коэффициентом трения μ, при этом нижняя граница слоя $y = 0$ либо закреплена (задача 1), либо на ней отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения (задача 2). Рассматривается случай предельного равновесия, штамп не поворачивается в процессе деформации слоя.

Поставленные контактные задачи с помощью преобразования Фурье сводятся к следующему интегральному уравнению (ИУ) относительно неизвестных нормальных контактных напряжений под штампом $q(x)$ [5]

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-01-01146).

[2]Чебаков Михаил Иванович, д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом «Механика контактных взаимодействий» НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Ростовского государственного университета.

$$\int\limits_{-a}^{b} q(\xi)k\left(\frac{\xi-x}{h}\right)d\xi = \pi\theta\delta, \qquad (-a \le x \le a), \quad (1.1)$$

ядро которого представимо в виде двух слагаемых

$$k(t) = k_1(t) - \varepsilon k_2(t), \quad \varepsilon = \frac{(1-2\nu)\mu}{2(1-\nu)},$$

$$k_i(t) = \int\limits_0^\infty \frac{L_i(u)}{u}\left\{\begin{matrix}\cos ut\\ \sin ut\end{matrix}\right\}du \ \left\{\begin{matrix}i=1\\ i=2\end{matrix}\right\}. \quad (1.2)$$

Для задачи 1

$$L_1(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2},$$
$$L_2(u) = \frac{2\kappa(\operatorname{ch} 2u - 1) - 4u^2(1-2\nu)^{-1}}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad (1.3)$$

для задачи 2

$$L_1(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u},$$
$$L_2(u) = \frac{\operatorname{sh} 2u - 2(1-2\nu)^{-1}}{\operatorname{sh} 2u + 2u}. \quad (1.4)$$

В формулах (1.1)–(1.3) введены следующие обозначения $\theta = G/(1-\nu)$, $\kappa = 3 - 4\nu$, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, μ — коэффициент трения, δ — перемещение штампа в вертикальном направлении.

Сделаем в уравнении (1.1) замену переменных $x = at$, $\xi = a\tau$, тогда оно преобразуется к виду

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)k\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right)d\tau = \pi f(t), \quad |x| \le 1, \quad (1.5)$$

где введено обозначение

$$\varphi(t) = q(at), \quad f(t) = \theta\delta/a, \quad \lambda = h/a. \quad (1.6)$$

Для задачи 1 в силу закрепления нижней грани $y = 0$ условия статического равновесия полосы очевидны. Проверим эти условия для задачи 2, для чего по аналогии с работой [6] найдем величину R нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в любом сечении слоя $x = x_0$ ($|x_0| > a$)

$$R = \int\limits_0^h \sigma_x(x_0, y)dy.$$

Используя представление нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в слое в виде интеграла Фурье [5], найдем

$$R = -\frac{\mu}{2}\int\limits_{-a}^{a} q(t)\operatorname{sgn}(t - x_0)dt.$$

Из последнего соотношения

$$R = -T/2 \quad (x_0 > a), \quad R = T/2 \quad (x_0 < -a),$$

что говорит о закреплении слоя при $x \to \pm\infty$ и, соответственно, о его равновесии.

2. Метод больших λ

Для решения ИУ (1.5)–(1.6) с ядрами (1.2)–(1.4) используем метод больших λ. Предварительно преобразуем ядра к виду [2]

$$k_1(t) = -\ln|t| + F_1(t),$$
$$k_2(t) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(t) + F_2(t), \quad (2.1)$$

где функции $F_i(t)$ представимы в виде рядов

$$F_1(t) = -\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^{2i}, \ F_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^{2i-1}$$

с коэффициентами

$$d_0 = \int\limits_0^\infty \frac{1 - L_1(u) - e^{-u}}{u}du,$$

$$d_i = \frac{(-1)^i}{(2i)!}\int\limits_0^\infty [1 - L_1(u)]u^{2i-1}du \ \ (i \ge 1),$$

$$b_i = \frac{(-1)^i}{(2i-1)!}\int\limits_0^\infty [1 - L_2(u)]u^{2i-2}du \ \ (i \ge 1).$$

Используя результаты работы [2], можно показать, что решением (1.5), (2.1) является

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}\varphi_n(x), \quad (2.2)$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{X(x)} \sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k} x^k \ (n \geq 0), \qquad (2.3)$$

где

$$X(x) = (1+x)^{1/2+\gamma}(1-x)^{1/2-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \varepsilon,$$

а коэффициенты $\beta_{n,k}$ находятся из следующих рекуррентных соотношений

$$\beta_{0,0} = \frac{1}{\pi}\varepsilon_1 P^*,$$

$$\beta_{n,n} = \frac{1}{\pi}(-1)^n \varepsilon_1 c_n P^* \ (n \geq 1),$$

$$\beta_{n,n-1} = -\frac{2\gamma\varepsilon_1}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} r_{n,n-1} + \\ + \frac{\varepsilon_1}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!} r_{n,n-2} \ (n \geq 1),$$

$$\beta_{n,k} = \frac{\varepsilon_1^2}{\pi^2} \sum_{m=k+1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} Q^*_{m-k-1} r_{n,m} - \\ - \frac{2\gamma\varepsilon_1}{\pi}\frac{(-1)^k}{k!} r_{n,k} + \frac{\varepsilon_1}{\pi}\frac{(-1)^k}{(k-1)!} r_{n,k-1} \\ (0 \leq k \leq n-2, \ n \geq 2). \qquad (2.4)$$

Здесь

$$r_{n,m} = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{i! c_i}{(i-m-1)!} \times \\ \times \sum_{p=0}^{n-i} \beta_{n-i,p} Q_{p+i-m-1},$$

$$\varepsilon_1 = 1/\sqrt{1+\varepsilon^2}, \quad c_{2i} = d_i, \ c_{2i-1} = \varepsilon b_i.$$

$$Q^*_k = \int_{-1}^{1} \tau^k X(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2}(-1)^k (1-4\gamma) \times \\ \times \sqrt{1+\varepsilon^2} F(3/2+\gamma, -k; 3; 2), \qquad (2.5)$$

$$Q_k = \int_{-1}^{1} \frac{\tau^k d\tau}{X(\tau)} = \\ = \pi(-1)^k \sqrt{1+\varepsilon^2} F(1/2-\gamma, -k; 1; 2). \qquad (2.6)$$

При этом должно выполняться условие [2]

$$P^* = \int_{-1}^{1} \varphi(t) dt = \frac{\varepsilon_0}{\ln\lambda + D} \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{X(-t)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{X(-t)} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) F\left(\frac{\xi - t}{\lambda}\right) d\xi \right\},$$

$$F(t) = -F_1(t) + \varepsilon F_2(t), \qquad (2.7)$$

где C — постоянная Эйлера, $\psi(x)$ — пси-функция Эйлера,

$$D = -[\ln 2 + C + \frac{1}{2}\psi(1/2+\gamma) + \frac{1}{2}\psi(1/2-\gamma)],$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon/(1+\varepsilon^2).$$

В (2.5)–(2.6) $F(\alpha, -k; n; 2)$ — гипергеометрическая функция. В более общем случае она представима гипергеометрическим рядом, но так как здесь второй аргумент отрицательное целое число, то ряд обрывается и превращается в конечную сумму

$$F(\alpha, -k; n; 2) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha)_i (-k)_i}{i!(n)_i} 2^i,$$

$$(a)_i = a(a+1)\dots(a+i-1), \ (a)_0 = 1$$

и, следовательно, величины Q_k и Q^*_k также являются конечными элементарными суммами.

Таким образом, окончательно решение ИУ (1.5) представляется в виде (2.2), (2.3) с учетом рекуррентных соотношений (2.4).

Отметим, что рекуррентные соотношения (2.4) содержат только арифметические операции, поэтому можно получить в явном виде любое конечное число членов в разложениях (2.2), (2.3) с помощью программ, выполняющих аналитические преобразования (типа Maple). Это позволяет находить решение ИУ с любой степенью точности в области сходимости ряда (2.2).

Выпишем для наглядности коэффициенты $\beta_{n,k}$ для случаев $n = 1$ и $n = 2$, хотя в нижеприведенных результатах числовых расчетов использованы коэффициенты $\beta_{n,k}$ при различных $n > 2$ в зависимости от величины параметра λ и заданной точности

$$\beta_{1,0} = -2\gamma\varepsilon\varepsilon_1 b_1 P^*/\pi, \quad \beta_{1,1} = -\varepsilon\varepsilon_1 b_1 P^*/\pi,$$

$$\beta_{2,0} = -P^* d_1 \varepsilon_1 (1 - 12\gamma^2)/\pi,$$

$$\beta_{2,1} = 8P^* \varepsilon_1 d_1 \gamma/\pi, \quad \beta_{2,2} = 2P^* d_1/\pi.$$

3. Вывод основных соотношений

Для числовых расчетов необходимо найти зависимость вертикального перемещения штампа δ от приложенной нормальной силы P и форму деформированной свободной поверхности вне области контакта.

Для нахождения δ воспользуемся соотношением (2.7), которое преобразуем к виду

$$\delta = \frac{a}{\theta Q_0}\left\{(\ln\lambda + D)\frac{P}{a\varepsilon_1} - \Phi\right\},$$

$$\Phi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{X(-t)}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)F\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right)d\tau. \quad (3.1)$$

В (3.1) подставим значения функции $\varphi(t)$ в виде (2.2), (2.3), получим

$$\Phi = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{-m}\sum_{p=0}^{m}\frac{Q_p}{p!}S_{mp},$$

$$S_{mp} = \sum_{n=0}^{m-p}\frac{(m-n)!c_{m-n}}{(m-n-p)!}\sum_{k=0}^{n}\beta_{n,k}Q_{m-n-p+k}.$$

Найдем момент контактных напряжений.

$$M = \int\limits_{-a}^{a} xq(x)dx = a^2\int\limits_{-1}^{1} t\varphi(t)\,dt.$$

В соответствии с представлением $\varphi(t)$ в виде рядов (2.2)–(2.3) определим

$$M = a^2\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}\sum_{k=0}^{n}\beta_{n,k}Q_{k+1}.$$

Перемещение свободной поверхности вне штампа

$$w(x) = W(x/a)\ \ (|x|>a),$$

$$W(t) = \frac{a}{\pi\theta}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(\tau)k\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right)d\tau\ \ (|t|>1).$$

С учетом (2.1) $W(t)$ может быть записано в виде

$$W(t) = -\frac{a}{\pi\theta}\left\{W_1(t) + \frac{\pi\varepsilon}{2}W_2(t) + W_3(t)\right\},$$

$$W_1(t) = \int\limits_{-1}^{1}\varphi(\tau)\ln|\tau-t|\,d\tau - P^*\ln\lambda,$$

$$W_2(t) = \int\limits_{-1}^{1}\varphi(\tau)\,\mathrm{sgn}(\tau-t)d\tau,$$

$$W_3(t) = \int\limits_{-1}^{1}\varphi(\tau)F\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right)d\tau.$$

Используя (2.2), (2.3), с точностью до членов порядка $O(\lambda^{-(N+1)})$ найдем

$$W_1(t) = \sum_{k=0}^{N}\lambda^{-k}\sum_{m=0}^{k}\beta_{k,m}t_m(t) - \\ - \frac{P\ln\lambda}{a} + O(\lambda^{-(N+1)}), \quad (3.2)$$

$$t_m = \int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau^m}{X(\tau)}\ln|\tau-t|d\tau,$$

$$W_2(t) = \{P^*,\ \text{если } t<-1;\ -P^*,\ \text{если } t>1\},$$

$$W_3(t) = \sum_{k=0}^{N}\lambda^{-k}\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{t^m}{m!}q_{km} + O(\lambda^{-(N+1)}),$$

$$q_{mk} = \sum_{n=0}^{k-m}\frac{c_{k-n}(k-n)!}{(k-n-m)!}\sum_{p=0}^{n}\beta_{n,p}Q_{k+p-n-m}.$$

4. Числовые расчеты и выводы

Проведены расчеты контактных напряжений $q(x)$ $(-a\le x\le a)$, момента контактных напряжений M, вертикальных перемещений штампа δ и вертикальных перемещений поверхности вне зоны контакта $w(x)$.

Введем обозначения

$$q^*(t) = q(ta)a/P, \quad M^* = M/Pa,$$

$$\delta^* = \delta G/P, \quad w^*(t) = Pw(ta)/(Ga),$$

где $w(x)$ — вертикальные перемещения точек поверхности слоя $y=h$.

В табл. 1 и 2 соответственно для задач 1 и 2 приведены значения величин δ^*, M^*, t_*, $q^*(t_*)$, $q^*(-0,9)$, $q^*(0,9)$, $w^*(-1,1)$ и $w^*(1,1)$, где $x_* = at_*$ — точка зоны контакта с минимальными контактными напряжениями, при некоторых значениях параметров h, ν и $\mu = 0,9$.

На рис. 1 представлено распределение безразмерных контактных напряжений $q^*(t)$ в

Таблица 1

λ	ν	δ^*	M^*	t_*	$q^*(t_*)$	$q^*(-0,9)$	$q^*(0,9)$	$w^*(-1,1)$	$w^*(1,1)$
					$\mu = 0,9$				
2	0,1	0,326	−0,210	0,417	0,332	0,883	0,455	0,175	0,229
2	0,45	0,136	0,0401	−0,304	0,369	0,583	0,704	0,0863	0,0610
2	0,423	0,152	0,0008	−0,175	0,373	0,630	0,659	0,0962	0,0767
3	0,1	0,432	−0,197	0,228	0,320	0,889	0,504	0,246	0,342
3	0,45	0,189	0,0208	−0,141	0,346	0,650	0,725	0,124	0,113
4	0,1	0,511	−0,198	0,193	0,311	0,899	0,513	0,310	0,427
4	0,45	0,232	0,00691	−0,0819	0,335	0,684	0,725	0,161	0,158
					$\mu = 0,5$				
2	0,1	0,322	−0,123	0,244	0,349	0,804	0,545	0,194	0,221
2	0,45	0,135	0,0222	−0,188	0,373	0,615	0,682	0,0797	0,0656

Таблица 2

λ	ν	δ^*	M^*	t_*	$q^*(t_*)$	$q^*(-0,9)$	$q^*(0,9)$	$w^*(-1,1)$	$w^*(1,1)$
					$\mu = 0,9$				
2	0,1	0,332	−0,183	0,308	0,340	0,850	0,491	0,182	0,233
2	0,45	0,204	0,0952	−0,361	0,339	0,543	0,811	0,154	0,118
2	0,37	0,229	0,0007	−0,178	0,355	0,646	0,695	0,160	0,143
3	0,1	0,440	−0,181	0,179	0,322	0,870	0,523	0,257	0,350
3	0,45	0,263	0,0518	−0,192	0,332	0,624	0,782	0,199	0,181
4	0,1	0,522	−0,188	0,164	0,312	0,887	0,526	0,321	0,435
4	0,45	0,308	0,0280	−0,121	0,328	0,665	0,762	0,238	0,229
					$\mu = 0,5$				
2	0,1	0,330	−0,107	0,169	0,348	0,788	0,570	0,201	0,227
2	0,45	0,202	0,0530	−0,217	0,348	0,608	0,755	0,143	0,124

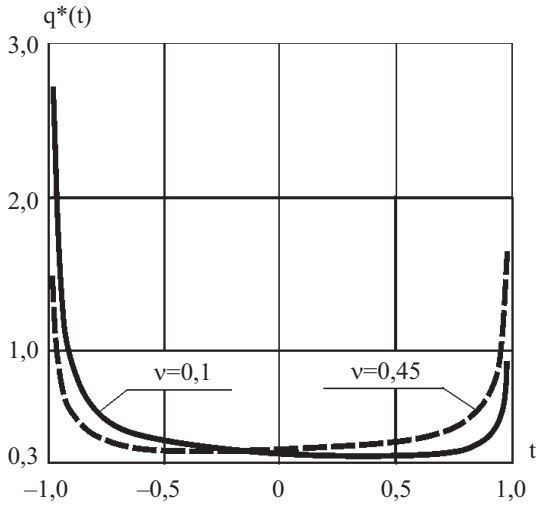


Рис. 1

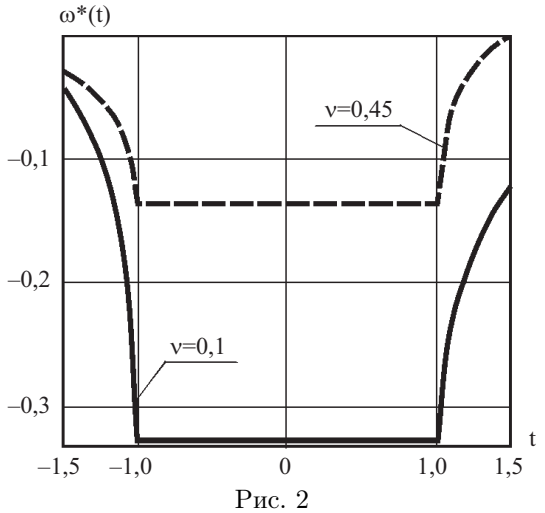


Рис. 2

зоне контакта для задачи 1 при $\lambda = 2,0$, $\mu = 0,9$, $\nu = 0,1$ (сплошная линия) и $\nu = 0,45$ (пунктирная линия).

Рис. 2 иллюстрирует поведение функции $w^*(t)$ при $\lambda = 2,0$, $\mu = 0,9$, $\nu = 0,1$ (сплошная линия) и $\nu = 0,45$ (пунктирная линия).

Результаты расчетов, приведенные в таблицах и на рисунках, позволяют сделать ряд принципиально важных выводов: при изменении коэффициента Пуассона ν от минимального до максимального значения момент контактных напряжений может менять свой знак, при этом точка x^* минимальных контактных напряжений перемещается справа налево и может менять свой знак. В соответствии с характером распределения напряжений при изменении коэффициента Пуассона меняется и характер деформации свободной поверхности в окрестности штампа: если ν мало, то в окрестности точки $x = a$ деформация больше, чем в окрестности точки $x = -a$, если ν близко к 0,5, то наоборот. Всегда найдется такое значение ν, при котором картина распределения контактных напряжений и деформация свободной поверхности будут почти симметричными, а момент контактных напряжений будет равен нулю. Кроме того, перемещение штампа δ практически не зависит от коэффициента трения μ.

Литература

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Александров В. М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления и трения // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.
3. *Чебаков М. И.* О дальнейшем развитии метода больших λ в теории смешанных задач // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 561–565.
4. *Попов Г. Я.* К решению плоской контактной задачи теории упругостипри наличии сил сцепления или трения // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1963. Т. 16. № 2. С. 15–32.
5. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
6. *Александров В. М., Сметанин Б. И.* О симметричных и несимметричных контактных задачах теории упругости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 136–141.

Статья поступила 18 июня 2004 г.
Ростовский государственный университет
© Чебаков М. И., 2004