УДК [004.3 + 681.3]: 619.67

АЛГОРИТМ ИНВЕРСИИ ДЕЛИТЕЛЯ

Бабенко В. Н.[1]

ALGORITHM OF INVERSION OF THE DIVIDER

Babenko V. N.

In the article the question on representation of inversion of a rational degree of machine number in the so-called multiplicate form is considered. The algorithm of such representation is offered and the estimation of speed of convergence of computing process is received. The algorithm possesses a regularity that creates excellent preconditions for his display to the equipment (supposes conveyerisation of computing process). The second advantage of algorithm is his profitability.

Keywords: inversion, machine number, infinite product, algorithm, convergence, regularity, display to the equipment, profitability, the device of normalization of a vector.

1. Алгоритм обращения

Обычно для осуществления вычисления на ЭВМ значения величины, описываемой выражением

$$\frac{y}{\sqrt[n]{x}}, \text{ где } n = 1, 2, \ldots,$$

поступают следующим образом: 1) вычисляют значение $z = \sqrt[n]{x}$ (если $n \geqslant 2$); 2) осуществляют на умножителе вычисление частного y/z. В [1] был предложен иной подход, в котором производится вычисление инверсии делителя (алгоритм обращения (теорема 2)) и одновременно с этим вычисляется искомое частное. Однако вследствие ограничений на объем публикуемых статей доказательство теоремы 2 в [1] было опущено. В связи с этим содержание данной статьи следует считать продолжением работы [1], а также развитием результатов, изложенных в ней.

При проведении доказательства указанной теоремы 2 нам придется опираться на теорему 1 [1], которая приводится в виде справки.

Теорема 1. Пусть число x удовлетворяет неравенству $2^{-n} \leqslant x < 2$ и

$$x^{-\alpha} = 1 + \theta 2^t u, \tag{1.1}$$

где $\alpha = 1/n$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, t — целое число,

$$\theta = \begin{cases} 1, \text{ если x} < 1, \\ 0, \text{ если x} = 1, \\ -1, \text{ если x} > 1, \end{cases}$$

$$2^{-1} \leqslant u < 1.$$

Пусть

$$J(\theta, t, u, z) = \left| \frac{1 + \theta 2^t f(u, z) - x^{-\alpha}}{1 + \theta 2^t f(u, z)} \right|$$

— относительная погрешность приближения инверсии $x^{-\alpha}$ двучленом $1 + \theta 2^t f(u, z)$, где

$$f(y, z) = \begin{cases} 2^{-1}, \text{ если } y < z, \\ 1, \text{ если z} \leqslant \text{y}. \end{cases}$$

Если

$$\bar{z} = \frac{3 + \theta 2^{t+1}}{4 + 3\theta 2^t},$$

то справедлива оценка

$$J(\theta, t, u, \bar{z}) \leqslant J(\theta, t, \bar{u}, \bar{z}), \tag{1.2}$$

где $\bar{u} = \bar{z}$,

$$J(\theta, t, \bar{u}, \bar{z}) = \frac{2^{t-2}}{1 + 3\theta 2^{t-2}}, \tag{1.3}$$

причем $J(\theta, t, \bar{u}, \bar{z})$ есть наименьшая точная верхняя грань множества значений функционала $J(\theta, t, u, z)$ на множестве

$$\{(u, z) :\ 2^{-1} \leqslant u < 1,\ 2^{-1} \leqslant z < 1\}.$$

[1]Бабенко Виктор Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры функционального анализа и алгебры Кубанского государственного университета; e-mail: rnibvd@mail.ru

В вычислительной практике кроме рядов для приближенных вычислений применяются так называемые бесконечные произведения [1].

Определение 1. Выражение вида

$$\prod_{i=0}^{\infty} p_i \tag{1.4}$$

называется *бесконечным произведением*, соответственно

$$P_j = \prod_{i=0}^{j} p_i$$

частичным произведением [2].

Пусть $\{P_j\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ — последовательность частичных произведений.

Определение 2. Если существует число P такое, что

$$\lim_{j\to\infty} P_j = P,$$

то бесконечное произведение (1.4) называют сходящимся к P.

В вычислительной математике широкое применение приобрели бесконечные произведения вида [3]

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 + \theta_i 2^{-i}), \text{ где } \theta_i \in \{-1, 0\}.$$

При формировании последнего бесконечного произведения в i-м множителе величина θ_i играет роль управляющего параметра, а порядок двойки определяется его номером. В работе предлагается: 1) расширить множество значений параметра θ_i, 2) использовать указанный порядок в качестве второго управляющего параметра. Рассматриваются бесконечные произведения вида

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 + \theta_i 2^{-t_i}), \text{ где } \theta_i \in \{-1, 0, 1\}.$$

Пусть произвольное число x удовлетворяет неравенству $2^{-n} \leqslant x < 1$. Поставим задачу построения последовательности $\{\mathrm{c}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, где

$$\mathrm{c}_i = \prod_{j=1}^{i} (1 + \theta_{j-1} 2^{-t_{j-1}}),$$

сходящейся к инверсии радикала $\sqrt[n]{x}$. Одно из решений этой задачи дает

Теорема 2. Пусть x произвольное число из полуинтервала $[2^{-n}, 1)$. Последовательность $\{x_i\}$ определим соотношениями

$$x_0 = x,$$

$$x_i = x_{i-1}(1 + \theta_{i-1} 2^{t_{i-1}} f(u_{i-1}, z_{i-1}))^n, \tag{1.5}$$

где

$$\theta_{i-1} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_{i-1} < 1, \\ 0, \text{ если } x_{i-1} = 1, \\ -1, \text{ если } x_{i-1} > 1, \end{cases}$$

$$\theta_{i-1} 2^{t_{i-1}} u_{i-1} = \frac{1 - \sqrt[n]{x_{i-1}}}{\sqrt[n]{x_{i-1}}}, \tag{1.6}$$

$$2^{-1} \leqslant u_{i-1} < 1, \tag{1.7}$$

$$f(u_{i-1}, z_{i-1}) = \begin{cases} 2^{-1}, \text{ если } u_{i-1} < z_{i-1}, \\ 1, \text{ если } z_{i-1} \leqslant u_{i-1}, \end{cases}$$

$$z_{i-1} = \frac{3 + \theta_{i-1} 2^{t_{i-1}+1}}{4 + 3\theta_{i-1} 2^{t_{i-1}}}.$$

Тогда последовательность $\{\mathrm{c}_i\}, i = 1, 2, \ldots$, где

$$\mathrm{c}_i = \prod_{j=1}^{i} (1 + \theta_{j-1} 2^{-t_{j-1}}). \tag{1.8}$$

сходится к $x^{-1/n}$, причем справедлива оценка скорости сходимости

$$\left| \mathrm{c}_i - \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1} \right| < 2^{-2i} \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение последовательность $\{\delta_i\}$, элементы которой определим соотношением

$$\delta_i = \frac{\theta_i \left(1 - \sqrt[n]{x_i}\right)}{\sqrt[n]{x_i}}. \tag{1.10}$$

По определению последовательность $\{\delta_i\}$ ограничена снизу нулем. Кроме того, она монотонно убывает. Действительно, воспользовавшись (1.6), можно записать

$$\delta_{i-1} = 2^{t_{i-1}} u_{i-1}. \tag{1.11}$$

С другой стороны, осуществив подстановку (1.5) в (1.10), получим

$$\delta_i = \frac{\theta_i \left(1 - \sqrt[n]{x_{i-1}}(1 + \xi_{i-1})\right)}{\sqrt[n]{x_{i-1}}(1 + \xi_{i-1})} = \\ = \left| \frac{\sqrt[n]{x_{i-1}}(1 + \xi_{i-1}) - 1}{\sqrt[n]{x_{i-1}}(1 + \xi_{i-1})} \right|,$$

где

$$\xi_{i-1} = \theta_{i-1} 2^{t_{i-1}} f(u_{i-1}, z_{i-1}).$$

Из последнего выражения благодаря теореме 1 и замечанию 1, следует неравенство

$$\delta_i \leqslant \frac{2^{t_{i-1}-2}}{1 + 3\theta_{i-1} 2^{t_{i-1}-2}}.$$

Сопоставляя (1.7), (1.11) и последнее неравенство, приходим к следующему выводу. Для любого i выполняется неравенство $\delta_i < \delta_{i-1}$. Итак, установлено, что $\{\delta_j\}$ есть монотонно убывающая ограниченная снизу нулем последовательность, следовательно, она сходится к нулю. Отсюда, благодаря (1.10), следует, что последовательность $\{x_i\}$ сходится к единице

$$\lim_{i\to\infty} x_i = 1. \qquad (1.12)$$

Следуя формулам (1.5) и (1.8), можно записать

$$x_i = x c_i^n. \qquad (1.13)$$

Подставив x_i в (1.12), получим

$$x \lim_{i\to\infty} c_i^n = 1.$$

Наконец, умножив обе части последнего равенства на x^{-1}, приходим к завершению доказательства сходимости последовательности $\{c_i\}$ к $x^{-1/n}$:

$$\lim_{i\to\infty} c_i = x^{-1/n}.$$

Приступая к доказательству оценки скорости сходимости (1.9), которое проведем по индукции, установим рекуррентную формулу, связывающую предыдущую и последующую невязки δ_{i-1} и δ_i соответственно:

$$\delta_i = \left|\frac{1-\sqrt[n]{x_i}}{\sqrt[n]{x_i}}\right| = \left|\frac{1-\sqrt[n]{x_{i-1}}(1+\xi_{i-1})}{\sqrt[n]{x_{i-1}}(1+\xi_{i-1})}\right| =$$
$$= \left|\frac{1-\sqrt[n]{x_{i-1}}-\sqrt[n]{x_{i-1}}\xi_{i-1}}{\sqrt[n]{x_{i-1}}}\right| \frac{1}{1+\xi_{i-1}} =$$
$$= \left|\frac{1-\sqrt[n]{x_{i-1}}}{\sqrt[n]{x_{i-1}}} - \xi_{i-1}\right| \frac{1}{1+\xi_{i-1}} =$$
$$= |\theta_{i-1}\delta_{i-1} - \xi_{i-1}| \frac{1}{1+\xi_{i-1}}.$$

Итак,

$$\delta_i = \left|\delta_{i-1} - \frac{\xi_{i-1}}{\theta_{i-1}}\right| \frac{1}{1+\xi_{i-1}}. \qquad (1.14)$$

Оценим невязку, образующуюся, после выполнения первого шага алгоритма. Напомним условия выполнения первого шага 1: $2^{-n} \leqslant x < 1$. Если $x = 2^{-n}$, то, следуя формулам алгоритма, получим

$$\delta_0 = \left|\frac{1-\sqrt[n]{x_0}}{\sqrt[n]{x_0}}\right| = 1 = 2^1 \cdot \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $t_0 = 1$, $u_0 = 1/2$. Далее $z_0 = 7/10$, $f(u_0, z_0) = 2^{-1}$, $\sqrt[n]{x_1} = 1$, $\delta_1 = 0$. Получена точная инверсия. Если же $2^{-n} < x < 1$, то выполняется неравенство $\delta_0 = 2^{t_0} u_0 < 1$, из которого благодаря (1.8) вытекает, что $t_0 \leqslant 0$. Следуя результатам теоремы 1 и замечанию 1, можем записать

$$\delta_1 \leqslant J(\theta_0, t_0, u_0, z_0) \leqslant \frac{2^{t_0-2}}{1+3\cdot 2^{t_0-2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^{-2}}{1+3\cdot 2^{-2}} = 2^{-2}\cdot\frac{4}{7}.$$

Итак, установлено, что после выполнения первого шага алгоритма невязка δ_1 удовлетворяет неравенству

$$\delta_1 \leqslant 2^{-2}\cdot\frac{4}{7}.$$

Шаг 2. Из соотношений (1.2) и (1.3) следует, что при $\theta = -1$ функционал $J(\theta, t, u, \bar{z})$ обладает меньшей степенью сжатия. Поэтому будем предполагать, что $x_1 > 1$. Итак, входные данные второго шага следующие:

$$\theta_1 = -1, \quad \delta_1 \in \left[0, 2^{-2}\cdot\frac{4}{7}\right], \quad t_1 \leqslant -2.$$

Разобьем отрезок $\left[0, 2^{-2}\cdot\frac{4}{7}\right]$ на промежутки

$$\omega_2 = \left[2^{-3}, 2^{-2}\cdot\frac{4}{7}\right], \quad \omega_3 = \left[2^{-4}, 2^{-3}\right),$$
$$\omega_4 = \left[2^{-5}, 2^{-4}\right), \ldots.$$

Для всех $j = 3, 4, \ldots$ полуинтервал $\omega_j \in \left[2^{-j-1}, 2^{-j}\right)$ функционалом $J(\theta, t, u, \bar{z})$ согласно соотношениям (1.2) и (1.3) отображается в отрезок

$$\bar{\omega}_j = \left[0, \frac{2^{-j-2}}{1-3\cdot 2^{-j-2}}\right], \qquad (1.15)$$

причем $\bar{\omega}_3 \supset \bar{\omega}_4 \supset \ldots \supset \bar{\omega}_j \supset \ldots$. Установим теперь границы $\bar{\omega}_2$ — образа промежутка ω_2 при отображении $J(\theta, t, u, \bar{z})$. Очевидно, левая граница $\bar{\omega}_2$ равна нулю. Определим правую границу. Из неравенства

$2^{-3} \leqslant \delta_1 \leqslant 2^{-2} \cdot \frac{4}{7}$ следует, что $t_1 = -2$. Далее, следуя формулам алгоритма, получаем $z_1 = 10/13$, $u_1 \leqslant 4/7 < 10/13 = z_1$. Из последней цепочки отношений следует, что

$$2^{t_1} f(u_1, z_1) = 2^{-3}.$$

Обращаясь к (1.14), получим

$$\delta_2 \leqslant \left(2^{-2} \cdot \frac{4}{7} - 2^{-3}\right) \frac{1}{1 - 2^{-3}} = 2^{-4} \cdot \frac{16}{49}.$$

Таким образом, установлено, что

$$\bar{\omega}_2 = \left[0, 2^{-4} \cdot \frac{16}{49}\right].$$

Обращаясь к формуле (1.15), находим, что

$$\bar{\omega}_3 = \left[0, 2^{-4} \cdot \frac{16}{29}\right].$$

Следовательно $\bar{\omega}_2 \subset \bar{\omega}_3$.

Таким образом, установлено, что δ_2 удовлетворяет неравенству

$$\delta_2 < 2^{-4} \cdot \frac{4}{7} \left(\frac{16}{29} < \frac{4}{7}\right).$$

Шаг i. Пусть выполнено $i-1$ шагов алгоритма обращения чисел ($i - 1 \geqslant 2$). Предположим, что δ_{i-1} удовлетворяет неравенству

$$\delta_{i-1} < \frac{4}{7} \cdot 2^{-2(i-1)}.$$

Покажем, что при выполнении последнего неравенства после выполнения i-го шага алгоритма величина δ_i будет удовлетворять неравенству

$$\delta_i < \frac{4}{7} \cdot 2^{-2i}.$$

Примем $\theta_{i-1} = -1$. Обоснование этому дано при описании второго шага. При описании i-го шага будем придерживаться той же схемы изложения, что и при описании второго шага. Входные данные i-го шага следующие:

$$\theta_{i-1} = -1, \quad \delta_1 \in \left[0, 2^{-2(i-1)} \cdot \frac{4}{7}\right],$$

$$t_1 \leqslant -2(i-1).$$

Разобьем отрезок $\left[0, 2^{-2(i-1)} \cdot \frac{4}{7}\right]$ на промежутки

$$\omega_{2(i-1)} = \left[2^{-2(i-1)-1}, 2^{-2(i-1)} \cdot \frac{4}{7}\right],$$

$$\omega_{2(i-1)+1} = \left[2^{-2(i-1)-2}, 2^{-2(i-1)-1}\right),$$

$$\omega_{2(i-1)+2} = \left[2^{-2(i-1)-3}, 2^{-2(i-1)-2}\right), \ldots.$$

Отображение промежутков $\bar{\omega}_{2(i-1)+1}$, $\bar{\omega}_{2(i-1)+2}, \ldots$ функционалом $J(\theta, t, u, \bar{z})$ рассмотрено при описании второго шага. Отметим только, что

$$\bar{\omega}_{2(i-1)+1} = \left[0, \frac{2^{-2i-1}}{1 - 3 \cdot 2^{-2i-1}}\right].$$

Обращаясь к $\bar{\omega}_{2(i-1)}$, видим, что

$$z_{i-1} = \frac{3 - 2^{-2i+3}}{4 - 3 \cdot 2^{-2i+2}}.$$

Установим теперь знак разности $z_{i-1} - u_{i-1}$

$$z_{i-1} - u_{i-1} \geqslant \frac{3 - 2^{-2i+3}}{4 - 3 \cdot 2^{-2i+2}} - \frac{4}{7} >$$
$$> \frac{3 - 2^{-2i+3}}{4 - 3 \cdot 2^{-2i+2}} - \frac{3}{4} = \frac{2^{-2i+2}(9-8)}{4(4 - 3 \cdot 2^{-2i+2})} > 0.$$

Таким образом, $u_{i-1} < z_{i-1}$, следовательно $f(u_{i-1}, z_{i-1}) = 2^{-1}$. Обращаясь к формуле (1.14), получим

$$\delta_i \leqslant \left(2^{-2(i-1)} \cdot \frac{4}{7} - 2^{-2(i-1)-1}\right) \frac{1}{1 - 2^{-2(i-1)-1}} =$$
$$= \left(2^{-2(i-1)} \cdot \frac{4}{7} - 2^{-2(i-1)} \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{1}{1 - 2^{-2i+1}} =$$
$$= 2^{-2i+2} \cdot \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-2i+1}} =$$
$$= 2^{-2i-1} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-2i+1}} =$$
$$= 2^{-2i-1} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-2i+1}}.$$

Итак,

$$\bar{\omega}_{2(i-1)} = \left[0, 2^{-2i-1} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-2i+1}}\right].$$

Сопоставляя $\bar{\omega}_{2(i-1)}$ и $\bar{\omega}_{2(i-1)+1}$, покажем, что

$$\bar{\omega}_{2(i-1)} \subset \bar{\omega}_{2(i-1)+1}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{1-3\cdot 2^{-2i-1}}-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{1-2^{-2i+1}}=$$
$$=\frac{1}{1-3\cdot 2^{-2i-1}}-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{1-4\cdot 2^{-2i-1}}=$$
$$=\frac{7-28\cdot 2^{-2i-1}-4+12\cdot 2^{-2i-1}}{7\left(1-3\cdot 2^{-2i-1}\right)\left(1-4\cdot 2^{-2i-1}\right)}=$$
$$=\frac{3-16\cdot 2^{-2i-1}}{7\left(1-3\cdot 2^{-2i-1}\right)\left(1-4\cdot 2^{-2i-1}\right)}.$$

Теперь нетрудно видеть, что числитель последней дроби принимает положительные значения при $i \geqslant 2$.

Таким образом,

$$\delta_i \in \left[0, \frac{2^{-2i-1}}{1-3\cdot 2^{-2i-1}}\right],$$

но

$$\frac{2^{-1}}{1-3\cdot 2^{-2i-1}} < \frac{4}{7} \text{ для всех } i \geqslant 2,$$

следовательно,

$$\delta_i < 2^{-2i}\cdot\frac{4}{7}$$

Из последнего неравенства вытекает утверждаемая теоремой оценка скорости сходимости. Действительно, следуя определению величины δ_i, можем записать неравенство

$$|\sqrt[n]{x_i}-1| < 2^{-2i}\cdot\frac{4}{7}\sqrt[n]{x_i}.$$

Подставляя (1.13), в левую часть последнего неравенства, получим

$$\left|\sqrt[n]{x}c_i-1\right| < 2^{-2i}\cdot\frac{4}{7}\sqrt[n]{x_i}. \tag{1.16}$$

С другой стороны, непосредственно из (1) преследует, что

$$\sqrt[n]{x_i}=\frac{1}{1+\theta_i 2^{t_i}u_i}.$$

Учитывая последнее соотношение и неравенства $2^{-1}\leqslant u_i<1$ и $t_i<t_{i-1}\leqslant -2(i-1)$, покажем, что

$$\frac{4}{7}\sqrt[n]{x_i} < 1: \tag{1.17}$$

$$\frac{4}{7}\sqrt[n]{x_i}=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{1+\theta_i 2^{t_i}u_i} < \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{1-2^{-2(i-1)}},$$

далее нетрудно показать, что

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{1-2^{-2(i-1)}} < 1 \text{ для всех } i \geqslant 2.$$

Используя доказанное неравенство (1.17) в соотношении (1.16), запишем

$$\left|\sqrt[n]{x}c_i-1\right| < 2^{-2i}.$$

Осуществив умножение обеих частей последнего неравенства на $\left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1}$, получим утверждаемую теоремой 2 оценку (1.9).

Теорема доказана.

В заключение отметим следующее. Пусть $y=2^k x$ — произвольное число. Если k — число кратное n, то

$$\left(\sqrt{y}\right)^{-1}=2^{-k/n}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1},$$

в противном случае

$$\left(\sqrt[n]{y}\right)^{-1}=2^{-(k+t)/n}\left(\sqrt[n]{2^{-t}x}\right)^{-1},$$

где t — целое число, удовлетворяющее неравенству $1\leqslant t\leqslant n-1$, $(k+t)$ — число кратное n.

2. Обсуждение результатов

Изложенный алгоритм обладает регулярностью (см. оценку (1.9)), что создает отличные предпосылки для его отображения на аппаратуру, в частности допускает конвейеризацию вычислительного процесса.

Вторым достоинством алгоритма является его экономичность. Пусть 2^{-m} — допустимая (приемлемая) погрешность инверсии числа x, где m — четное положительное число, тогда положив $i=m/2$ и подставив его в неравенство (1.9) получим неравенство

$$\left|\mathrm{c}_{m/2}-\left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1}\right| < 2^{-m}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1},$$

из которого видно, что для достижения приемлемой точности представления числа произведением двучленов с помощью предложенного алгоритма потребуется не более $m/2$ двучленов (в предложенном алгоритме выполняются лишь $m/2$ операций сложения).

Изложенный алгоритм предназначен прежде всего для выполнения операции деления. Пусть заданы числа x и y и n равен 1 или 2 ($\alpha=1/n$). Требуется вычислить отношение y/x^{α}. Обозначим $y_0=y$, тогда, осуществляя вычисления по формуле

$$y_i=y_{i-1}(1+\theta_{i-1}2^{t_{i-1}}f(u_{i-1},z_{i-1})),$$
$$i=1,m/2,$$

получим приближенное значение величины y/x^{α} с указанной выше приемлемой точностью, при этом потребуется выполнить $m/2$ операций сравнения и сложения. Если же деление осуществлять на умножителе, то потребуется выполнять m операций сравнения и сложения, к тому же выполнение операции извлечения квадратного корня тоже требует затрат машинного времени. Из этого сравнения следует, что предложенный алгоритм может быть включен в состав аппаратного математического обеспечения каждого персонального компьютера для осуществления операции деления.

Однако особую эффективность этот алгоритм приобретает при его использовании в качестве вычислительного элемента высокопроизводительных вычислительных систем. Одной из основных операций вычислительной математики является нормировка вектора, которая обычно состоит в делении компонент вектора y на x^{α} (α равен 1 или 1/2). Введем обозначения: $b = y/x^{\alpha}$, $y_{10} = y_1, \ldots, y_{N0} = y_N$. Тогда вычисления по формулам

$$y_{ji} = y_{j,i-1}(1 + \theta_{i-1}2^{t_{i-1}}f(u_{i-1}, z_{i-1})),$$
$$j = \overline{1,N}, \quad i = \overline{1,m/2},$$

которые осуществляются параллельно, дадут вектор, приближенный к вектору b с приемлемой точностью.

В [1] описано устройство нормировки вектора, реализующее алгоритм инверсии при $n = 1$. Предложенный алгоритм положен также в основу другого спроектированного устройства нормировки вектора при $n = 2$, структурная схема которого представлена на рисунке. На оба устройства получены патенты.

Устройство нормировки вектора содержит блок инверсии радикала и n блоков нормировки. Блок инверсии радикала представляет собой цепочку из $[m/2]$ каскадов, каждый из которых, за исключением последнего, содержит схему формирования кода сдвига 1, схему сдвига 2, схему формирования кода установления режима работы сумматора-вычитателя 3 и сдвоенный сумматор-вычитатель 4, соединенных как показано на рисунке. Последний каскад содержит схему формирования кода сдвига 1 и схему формирования кода установления режима работы сумматора-вычитателя 3. Каждый блок нормировки также представляет собой цепочку из $m/2$ каскадов, каждый из которых содержит схему сдвига 2 и сумматор-вычитатель 5 (рисунок).

Устройство спроектировано для 32-разрядных чисел, представленных в формате с плавающей запятой (24 разряда отведено под мантиссу и 8 — под порядок). На вход заявляемого устройства подаются число а и компоненты вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $n \geqslant 2$. На выходе устройства получают компоненты вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$, определяемые соотношениями $u_i = x_i/\sqrt{a}$.

Для обеспечения точности выходных величин промежуточные вычисления осуществлялись на $(m + r)$-разрядных сумматорах, где r — число дополнительных младших разрядов, выделяемых под мантиссу. При $r = 5$ погрешность вычисления выходных величин не превышает цены их младшего разряда.

Для обеспечения сходимости процесса вычислений в состав каждого блока нормировки входит всего лишь $[m/2]$ сумматоров. Всего же в состав устройства входит $[m/2]\,(n + 1)$ сумматоров.

При $n = 2$ устройство аппаратно реализовано на программируемой логической интегральной схеме (ПЛИС) «EP1K50FC484-1» семейства ACEX1K производства фирмы «Altera».

Технические характеристики этого устройства:

1) максимально допустимая тактовая частота — $2{,}78 \cdot 10^7$ Гц;

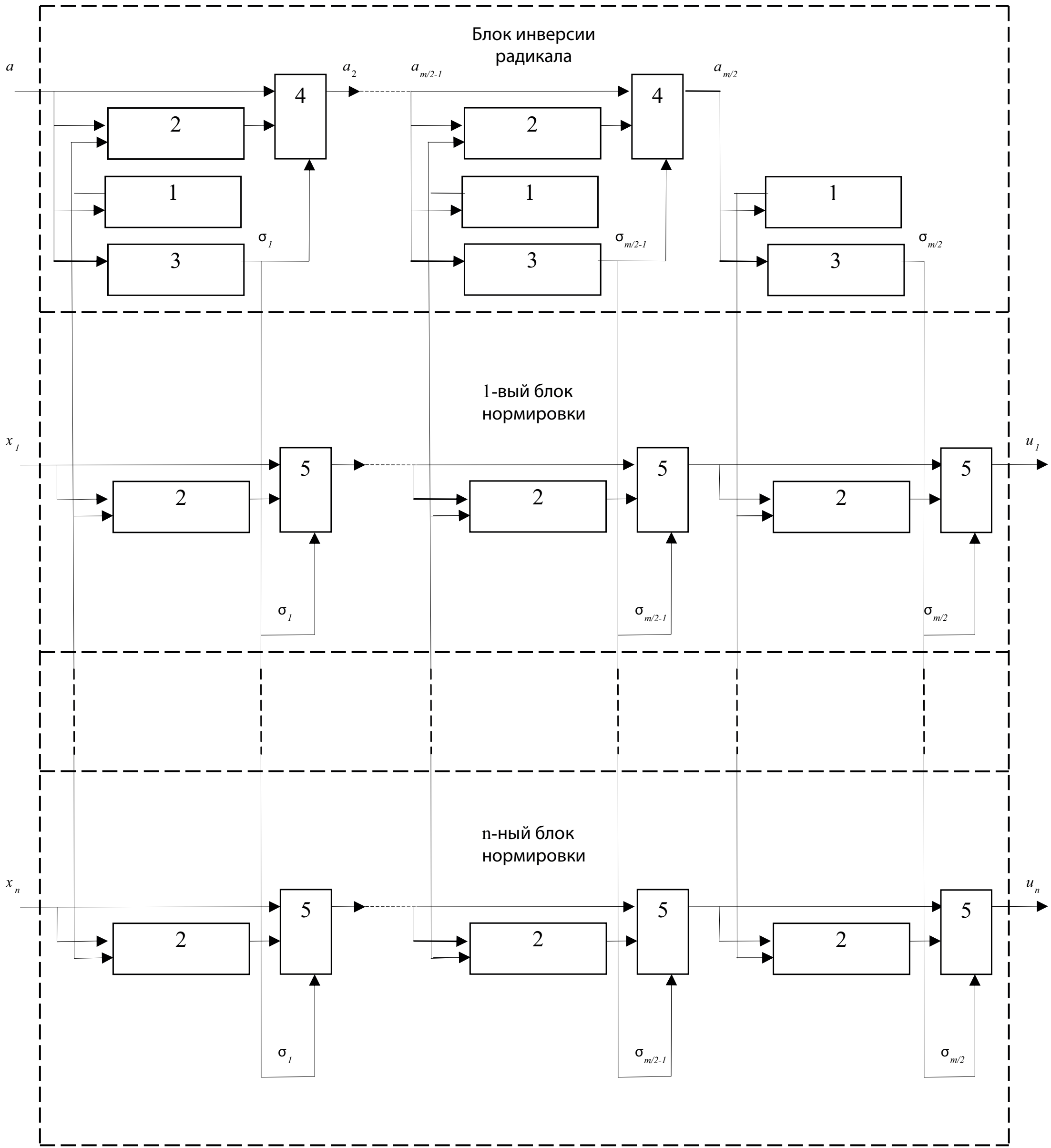
2) номинальная производительность — $5{,}56 \cdot 10^7$ операций/с;

3) время отклика (заполнения конвейера) — $432 \cdot 10^{-9}$ с.

В заключение автор выражает благодарность и признательность Е. А. Семенчину за оказываемую всестороннюю помощь и поддержку.

Литература

1. *Бабенко В. Н.* Представление инверсии делителя в мультипликативной форме и ее применение // Известия вузов. Северо-Кавказ. регион. Технические науки. 2010. № 6. С. 33—37.
2. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1984. 354 с.
3. Сверхбольшие схемы и современная обработка сигналов / Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата. М.: Радио и связь, 1989. 345 с.



Ключевые слова: инверсия, машинное число, бесконечное произведение, алгоритм, сходимость, регулярность, отображение на аппаратуру, экономичность, устройство нормировки вектора.

Статья поступила 27 октября 2013 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар