

УДК 532.517:532.526.75

ЗАДАЧА КАРМАНА О ВРАЩЕНИИ ПРОНИЦАЕМОГО ДИСКА В СЛОЖНОЙ ЖИДКОСТИ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЯМИ БРИНКМАНА¹

Гордеев Ю. Н.², Простокишин В. М.³, Сандаков Е. Б.⁴

THE KARMAN'S PROBLEM CONCERNING PERMEABLE DISK ROTATION DESCRIBED IN
BRINKMAN EQUATIONS

Gordeev Yu. N., Prostokishin V. M., Sandakov E. B.

The problem of the Karman of a stationary suspended particles in a viscous incompressible fluid in half-space under the evenly rotating in the own plane permeable and porous infinite radius disk is considered. It is assumed that the skeleton of the disk and its associated permeability significantly less than permeability unrelated suspended particles in a viscous incompressible liquid. In addition it is assumed that the motion of a viscous fluid in the disk and environment obey the Darcy -Brinkmann law (Navier-Stokes equations with linear speed of the resistance forces without convective components), and the suspension is described by Brinkmann equations (full Navier-Stokes equations without the resistance forces). The Brinkmann equations are used because they describe the flow of viscous incompressible fluid with partially blocked space, averaged by volume-porous mass.

Keywords: viscous fluid motion, porous media, Bevers-Joseph conditions, Navie-Stokes equation, Darcy-Brinkman law.

В последнее время в связи с развитием новых технологий становятся актуальными задачи о течении вязкой жидкости вблизи высокопроницаемых тел. В [1] на основе проведенных экспериментальных исследований высокопроницаемых сред показано, что условие прилипания (для низкопроницаемых сред) течения вязкой жидкости на границе раздела жидкость – твердое тело не соответствует результатам экспериментов. Поэтому предложено заменить его на полуэмпирическое смешанное условие (Биверса–Джозефа [1]).

$$\frac{\partial v_{\tau f}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{B}{\sqrt{k}}(v_{\tau f} - v_{\tau b}), \quad (1)$$

где B — постоянная пористой среды, k — коэффициент проницаемости, \mathbf{n} — нормаль

к проницаемой поверхности, $v_{\tau f}$ — тангенциальная компонента скорости жидкости на границе жидкость – твердое тело, $v_{\tau b}$ — скорость фронта жидкости в пористом теле (в данном случае она равна скорости вращения диска).

В пределе при $k \rightarrow 0$ уравнение (1) переходит в условие «прилипания», и для высокопроницаемых сред хорошо согласуется с экспериментом [4]. Дальнейшие экспериментальные работы в той же геометрической постановке, уточняющие и детализирующие данные [1], приведены в обзоре [4].

Указанная постановка является обобщением классической задачи Кармана о вращении непроницаемого диска [5, 6] и относится к точно решаемым задачам. Точные решения близких задач обтекания в плоской геометрии рассматривались в работе [7]. В рабо-

¹Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009–2013 гг. (ГК П1109).

²Гордеев Юрий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт»; e-mail: YuGordeyev@yandex.ru.

³Простокишин Валерий Михайлович, к-т физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт»; e-mail: VMProstokishin@mephi.ru.

⁴Сандаков Евгений Борисович, к-т физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт»; e-mail: Sandakovanton@mail.ru.

те [8] была решена задача Кармана о вращении высокопроницаемого диска с условиями Биверса–Джозефа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о стационарном течении взвеси частиц некоторой природы в вязкой жидкости при вращении с постоянной скоростью ω ортогонально оси $0z$ проницаемого диска под давлением $p_O = p(z = 0) = p_0$.

Предполагается, что давление над поверхностью диска равно давлению $p_a = p(z = -L)$. Течение вязкой жидкости с частицами и течение в проницаемом диске в цилиндрической системе координат r, z, φ с началом в центре диска и осью z направленной перпендикулярно плоскости его вращения вниз описывается стационарными уравнениями Бринкмана [2] и с учетом симметрии задачи относительно угла вращения φ имеют вид

$$\begin{aligned} V_r^\gamma \partial_r V_r^\gamma + V_z^\gamma \partial_z V_r^\gamma - \frac{1}{r} (V_\varphi^\gamma)^2 = \\ = -\frac{\nu}{k_\gamma} V_r^\gamma - \frac{1}{\rho} \partial_r p + \nu^\gamma \times \\ \times \left[\partial_{rr}^2 V_r^\gamma + \frac{1}{r} \partial_r V_r^\gamma + \partial_{zz}^2 V_r^\gamma - \frac{1}{r^2} V_r^\gamma \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_r^\gamma \partial_r V_z^\gamma \varphi + V_\varphi^\gamma \partial_z V_z^\gamma - \frac{1}{r} V_\varphi^\gamma V_z^\gamma = \\ = -\frac{\nu}{k_\gamma} V_\varphi^\gamma + \nu^\gamma \times \\ \times \left[\partial_{rr}^2 V_\varphi^\gamma + \frac{1}{r} \partial_r V_\varphi^\gamma + \partial_{zz}^2 V_\varphi^\gamma - \frac{1}{r^2} V_\varphi^\gamma \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_r^\gamma \partial_r V_z^\gamma + V_z^\gamma \partial_z V_z^\gamma = \\ = -\frac{\nu}{k_\gamma} V_z^\gamma - \frac{1}{\rho} \partial_z p + \nu^\gamma \times \\ \times \left[\partial_{rr}^2 V_z^\gamma + \frac{1}{r} \partial_r V_z^\gamma + \partial_{zz}^2 V_z^\gamma \right], \\ \partial_r V_r^\gamma + \frac{1}{r} V_r^\gamma \partial_r V_z^\gamma = 0. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Здесь P — давление вязкой жидкости; V_j^γ ($j = r, z, \varphi$) — скорость; ρ — плотность; ν^γ — эффективная кинематическая вязкость жидкости в пористой среде; ν — кинематическая вязкость жидкости, $\mu = \rho\nu$ — коэффициент

вязкости жидкости, при этом индекс γ показывает к чему относятся соответствующие переменные и уравнения: в сложной жидкости $\gamma = 1$, в диске $\gamma = 2$.

Бринкман показал [2], что по формуле Эйнштейна

$$\nu^\gamma = \nu(1 + 2,5m_\gamma),$$

где m — пористость. Как правило, $m \ll 1$, поэтому будем далее рассматривать случай $\nu^\gamma = \nu$.

Система уравнений (1.2) описывают воображаемый поток жидкости, в каждой точке которого скорость движения равна скорости фильтрации [9]. Таким образом, поток взвеси частиц в вязкой жидкости с высокой проницаемостью описывается уравнениями Бринкмана (1.2), т.е. уравнениями Навье–Стокса с учетом сил сопротивления, пропорциональных его скорости, при этом для небольших течений квадратичными слагаемыми пренебрегают.

Граничные условия на бесконечности берутся в виде

$$V_\varphi^\gamma(z \rightarrow \infty) = 0, \quad V_r^\gamma(z \rightarrow \infty) = 0. \quad (1.3)$$

Условиями сшивки решений для свободной жидкости и течения в пористой среде на границе раздела жидкость – пористая среда являются неразрывность компонент скорости и непрерывность тангенциальных компонент напряжения (трения) [10]

$$\begin{aligned} V_r^1(r, z = 0+) = V_r^2(r, z = 0-), \\ V_\varphi^1(r, z = 0+) = V_\varphi^2(r, z = 0-), \\ V_z^1(r, z = 0+) = V_z^2(r, z = 0-), \quad (1.4) \\ \nu^1 \partial_z V_r^1(r, z = 0+) = \nu^2 \partial_z V_r^1(r, z = 0-), \\ p(r, z = 0+) = p(r, z = 0-). \end{aligned}$$

2. Задача в автомодельных переменных

Решение задачи (1.2)–(1.4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} V_r^\gamma = \omega r F(\zeta), V_\varphi^\gamma = \omega r G(\zeta), \\ V_z^\gamma = \sqrt{\omega \nu_\gamma} H(\zeta), p - p_0 = -\rho \nu \omega(\zeta), \quad (2.1) \\ \zeta = \frac{z}{\delta_\gamma}, \delta_\gamma = \sqrt{\frac{\nu^\gamma}{\omega}}, \sigma_\gamma = \sqrt{\frac{\nu}{\omega k_\gamma}}, \end{aligned}$$

где p_0 — давление на границе жидкость–пористая среда; δ_1, δ_2 — характерные величины пограничных слоев в пористой среде диска и свободной жидкости. Для введенных функций предполагается, что $\zeta > 0$ при

$\gamma = 1$, $\zeta < 0$ при $\gamma = 2$. Система уравнений (1.2) в переменных (2.1) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} F^2 - G^2 + F'H &= F'' - \sigma_1^2 F, \\ 2GF + G'H &= G'' - \sigma_1^2 G, \\ HH' &= P' + H' - \sigma_1^2 H, \\ 2F + H' &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Течение вязкой жидкости в пронцаемом диске со связанным скелетом описываются законом Дарси–Бринкмана, т.е. уравнениями Бринкмана с силами сопротивления, в которых пренебрегают конвективными слагаемыми.

При этом система уравнений (1.2) сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} F'' - \sigma_2^2 F &= 0, \\ G'' - \sigma_2^2 (G - 1) &= 0, \\ H'' - \sigma_2^2 H &= P', \\ 2F + H' &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Граничные условия на бесконечности в автономных переменных (2.1) принимают вид

$$V_\varphi^\gamma(\zeta \rightarrow \infty) = 0, \quad V_r^\gamma(\zeta \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.4)$$

Условия сшивки решений для свободной жидкости и течения в пористом диске в переменных (2.1)

$$\begin{aligned} F(\zeta = 0+) &= F(\zeta = 0-), \\ G(\zeta = 0+) &= G(\zeta = 0-), \\ \nu^1 F'(\zeta = 0+) &= \nu^2 F'(\zeta = 0-), \\ P(\zeta = 0+) &= P(\zeta = 0-), \\ H(\zeta = 0+) &= H(\zeta = 0-), \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решение системы уравнений (2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= 0,5\sigma_2 A e^{\sigma_2 \zeta}, \\ G(\zeta) &= 1 - C e^{\sigma_2 \zeta}, \\ H(\zeta) &= -\frac{\varepsilon}{\sigma_2} - A e^{\sigma_2 \zeta} \\ A > 0, \quad C > 0, \quad \zeta > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что для течения жидкости справедливо соотношение

$$P' = -\varepsilon\sigma_2 = \text{const}. \quad (2.7)$$

Фактически уравнение (2.7) является уравнением Дарси, т.е. давление жидкости меняется по Z линейно

$$p(z) = \frac{p_0 - p_a}{L} z, \quad z \in [-L, 0]. \quad (2.8)$$

Тогда для безразмерной константы ε получаем выражение

$$\varepsilon = \frac{(p_0 - p_a)\sqrt{k}}{\rho L \omega \sqrt{\nu\nu_2}}. \quad (2.9)$$

Кроме того, из (2.6) следует, что для течения жидкости справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_2 F'(0) &= F(0), \\ \sigma_2 G'(0) + 1 &= \sigma_2 (G(0) - 1), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$H'(0) = \sigma_2 H(0) + \varepsilon.$$

В силу условий сшивки они будут справедливы и для сложной жидкости.

Рассмотрим частные случаи:

1) для низкопроницаемых сред выполняется условие непротекания

$$H(0) = 0;$$

2) для тонких дисков третье условие также

$$H(0) = 0.$$

Из непрерывности функций F , G на бесконечности следует

$$F'(\zeta \rightarrow \infty) = G'(\zeta \rightarrow \infty), \quad (2.11)$$

Возвращаясь в (2.10) к исходным переменным (2.1), получим

$$\begin{aligned} B^{-1}(V_\varphi^1 - r\omega) |_{z=0-} - \partial_z V_\varphi^1 |_{z=0-} &= 0, \\ B^{-1}V_r^1 |_{z=0-} - \partial_z V_r^1 |_{z=0-} &= 0, \\ B^{-1}V_z^1 |_{z=0-} - \partial_z V_z^1 |_{z=0-} &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$B = \sqrt{\frac{k_2 \nu_1^2}{\nu \nu_2}}$$

Отметим, что этот коэффициент отличается от коэффициента плоской задачи [9].

Сравнивая первые два соотношения (2.12) с краевым условием, полученным Биверсом–Джозефом (1). При этом они полностью совпадают при $\alpha = 1/\sigma_1$ и с константой $B = 1$. Кроме того, было найдено третье условие для вертикальной компоненты скорости, которое подобно условию Саффмана.

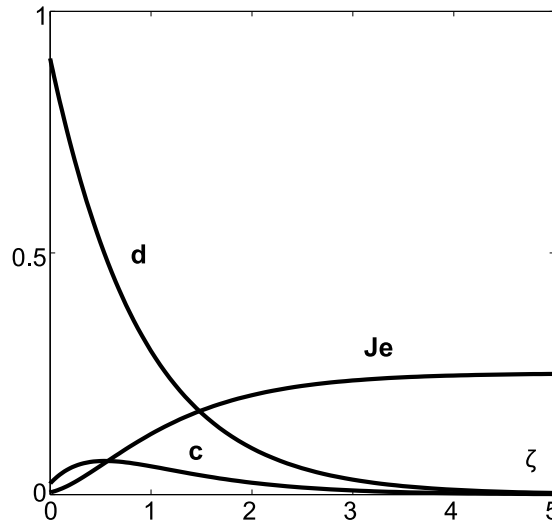


Рис. 1

Из решения задачи течения жидкости в диске и полученных краевых условий на границе взвесь частиц в вязкой жидкости следует, что вместо решения системы (1.2) и последующей сшивки ее с решениями системы для диска, можно решать только задачу (1.2) с полученными краевыми условиями (2.12) (типа Биверса–Джозефа). Именно этот подход реализован в численном методе.

3. Результаты численных расчётов

Как было описано выше, нелинейная краевая задача (2.2), (2.4), (2.6)–(2.11) сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнение для давления в среде не рассматривается, т.к. оно может быть получено как интеграл найденных функций. Таким образом, сделав для удобства замену

$$\begin{aligned} \psi_1 &= F, \psi_2 = F', \\ \psi_3 &= G, \psi_4 = G', \psi_5 = H, \end{aligned} \quad (3.1)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \psi_2' &= \psi_1^2 - \psi_3^2 + \psi_2\psi_5 + \sigma_0^{-2}\psi_1 \\ \psi_3' &= \psi_4, \\ \psi_4' &= 2\psi_1\psi_3 + \psi_4\psi_5 - \sigma_0^{-2}\psi_3, \\ \psi_5' &= -2\psi_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_1\psi_2(0) &= \psi_1(0), \\ \sigma_1\psi_4(0) + 1 &= \psi_3(0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$-2\sigma_1^2\psi_2(0) = \psi_5(0) + \varepsilon.$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась методом Рунге–Кутты 4–5 порядка. При этом недостающие граничные условия на бесконечности (2.4), (2.10) определялись методом пристрелки безразмерных параметров $\varsigma_1 = -\psi_2(0)$, $\varsigma_2 = -\psi_4(0)$, которые выбирались из условий $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi_1(\zeta) = 0$, $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi_2(\zeta) = 0$, $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi_3(\zeta) = 0$, $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi_4(\zeta) = 0$. Так как в численных расчетах бесконечность заменялась конечной величиной $L \gg 1$, то они вбирались минимизацией функционала

$$\Phi(\psi_1(L), \dots, \psi_4(L)) = \sqrt{\sum_{j=1}^4 \psi_j^2(L)}.$$

Скорость выхода жидкости из диска при этом определяется выражением

$$\theta = -\varepsilon - 2\sigma_1\psi_1(0).$$

Характерные результаты расчетов приведены на рис. 1 и рис. 2. На рис. 1 показаны результаты решения задачи Коши для непронизаемого диска: $k_1 = 0$, $\varepsilon = 0$, что соответствует бесконечно тонкому диску [5, 6].

Для системы пронизаемый диск – сложная жидкость: $\sigma_1 = 0,1$, $\sigma_2 = 1$, $\varepsilon = -0,3$ графики численного решения приведены на рис. 2, при этом для приведённых параметров ε – характеризует скорость высасывания жидкости диском, а параметры σ_1 , σ_2 – характеризуют эффект скольжения жидкости вдоль диска.

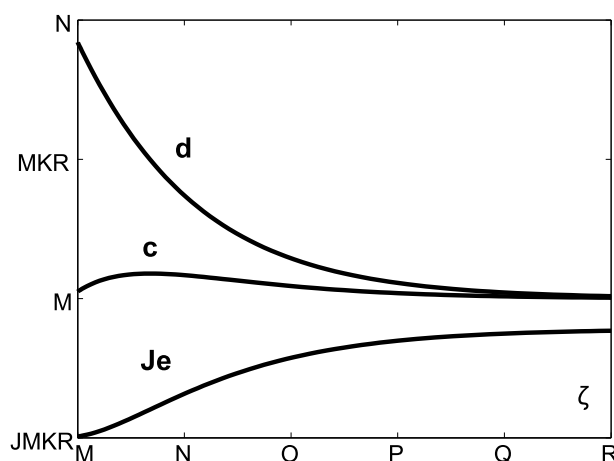


Рис. 2

Заключение

В заключение, отметим, что для данной задачи выполняется условие Биверса—Джозефа для тангенциальных компонент скорости и получено условие для вертикальной компоненты скорости вязкой жидкости, если течение в пористой среде описывается законом Дарси—Бринкмана. Найдена постоянная B , входящая в это условие. Кроме того, было найдено третье условие: для вертикальной компоненты скорости выполняется условие Саффмана.

Отметим, что скорость выхода жидкости из диска определяется не только законом Дарси (перепадом давлений на стенках диска), но и дополнительным слагаемым, которое характеризуется собственными свойствами задачи.

Оба эффекта — всасывание жидкости диском и ее скольжение вдоль границы с диском имеют существенное значение только для высоко проницаемого диска.

Литература

1. *Bever G. S., Joseph D. D.* Boundary condition at a naturally permeable wall // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 30. Part 1. P. 197–207.
2. *Brinkman H. C.* A calculation of the viscous force exerted by of a flowing fluid on a dense swarm of particles // *Appl. Sci. Res.* 1947. Vol. A1. P. 27–34.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712 с.
4. *Nield D. A.* The Beavers–Joseph Boundary Conditions and Related Matters: A Historical and Critical Note // *Trans. Porous Med.* 2009. Vol. 78. P. 537–540.
5. *von Karman Th.* Uber laminare und turbulente Reibung // *ZAAM* 1. 1921. P.233–252.
6. *Cochran W. G.* The flow due to a rotating disk // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 1934. Vol. 30. P. 365–375.
7. *Neale G., Nader W.* Practical significance of Brinkman extension of Darcy’s law: coupled parallel flow within a channel and a bounding porous medium // *Canad. J. Chem. Eng.* 1974. Vol. 52. P. 475–478.
8. *Гольдштейн Р. В., Гордеев Ю. Н., Чижов Ю. Л.* Задача Фона Кармана для вращающегося проницаемого диска // *Изв. РАН МЖГ.* 2012. № 1. С. 59–67.
9. *Баренблатт Г. И., Черный Г. Г.* О моментных соотношениях на поверхностях разрыва в диссипативных средах // *ПММ.* 1963. Т. XXVII. С. 784–793.
10. *Щелкачев В. Н.* Уточнение вывода основных динамических уравнений фильтрации // *Известия вузов. Нефть и газ.* № 2. 1961. С. 87–103.

Ключевые слова: течение вязкой жидкости, пористая среда, условие Биверса—Джозефа, уравнение Навье—Стокса, уравнение Бринкмана.

Статья поступила 9 октября 2013 г.

Национальный исследовательский ядерный университет «Московский инженерно-физический институт», г. Москва

© Гордеев Ю. Н., Простокишин В. М., Сандаков Е. Б., 2013