

УДК 539.3

## К МОДЕЛЯМ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОМПЛЕКСА ОСНОВАНИЕ–ФУНДАМЕНТ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ<sup>1</sup>

*Капустин М. С.<sup>2</sup>, Павлова А. В.<sup>3</sup>, Рубцов С. Е.<sup>4</sup>, Телятников И. С.<sup>5</sup>*

TO MODELS OF THE CALCULATION OF TENSE-DEFORMATION STATE OF SYSTEM FOUNDATION-GROUNDWORK UNDER DYNAMIC ACTIONS

Kapustin M. S., Pavlova A. V., Rubtsov S. E., Telyatnikov I. S.

There was studied waste of oil industry generated at the stage of winterization process of vegetable oil refining. The composition and structure of the organic waste materials is defined by chromatography-mass spectrometry, infrared spectroscopy. The application of the waste of oil industry as a modifier in the disposal of oily waste chemically is proved.

Keywords: elastic medium, steady oscillations, system of vertical inclusions, wave field.

Современные подходы к изучению и оценке устойчивости сооружений, определению их прочностных характеристик включают различные теоретические и экспериментальные методы [1–5]. Задачи расчета поверхностных сооружений, анализа состояния системы основание–фундамент связаны с проблемами сейсмостойкого строительства. Для прогноза катастрофических событий большое значение имеет исследование пространственно-временного распределения напряжений в основании, кроме того, в инженерной практике при обследовании деформирующегося грунта в процессе передачи нагрузки, расчете виброзащиты и т.п. возникает необходимость анализа особенностей оттока волновой энергии из зоны нагружения. Решение этих задач требует развития теоретического аппарата и алгоритмов изучения основных механизмов контактного взаимодействия конструкций и сооружений с упругим основанием при динамических воздействиях сейсмического и техногенного характера.

Часто используемым инструментариумом решения динамических контактных задач

теории упругости о взаимодействии жесткого тела с деформируемой средой, моделирующих состояние фундаментов и оснований, являются численные методы, которые не всегда позволяют отслеживать влияние на решение отдельных параметров системы, а также их взаимное влияние. Краевые задачи теории упругости, порождаемые указанными проблемами, достаточно сложны и требуют использования комплекса конструктивных аналитических и численных методов. Реализуемые в работе подходы позволяют исследовать модели фундаментов различных типов, в том числе свайных, моделируемых системой жестких вертикальных включений, под действием вибрационных нагрузок.

Рассматриваются установившиеся колебания упругой полуограниченной среды под действием поверхностных и вертикально ориентированных внутренних нагрузок. В работе представлен метод решения задачи для однородной среды, который может быть обобщен для случая слоистого основания.

В круговой области ( $r \leq a$ ,  $z = 0$ ) на поверхности упругой среды приложена гар-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ-914.2012.1), гранта РФФИ 13-01-00132, РФФИ и администрации Краснодарского края 13-01-96503.

<sup>2</sup>Капустин Михаил Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kapustinmisha@mail.ru.

<sup>3</sup>Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

<sup>4</sup>Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: rub\_serg@mail.ru.

<sup>5</sup>Телятников Илья Сергеевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: ilux\_t@list.ru.

моническая вертикальная осесимметричная нагрузка, закон изменения которой описывается заданной функцией  $\text{Re} [p(r) e^{-i\omega t}]$  ( $r$  — радиус-вектор точки плоскости,  $\omega$  — частота колебаний,  $t$  — время). Система вертикально ориентированных заглубленных источников, совершающих вертикальные и горизонтальные колебания, образует цилиндрическую поверхность:  $r = r_0$  ( $r_0 > a$ ),  $-h_0 \leq z \leq 0$ . Смещения точек среды в цилиндрической системе координат характеризуются вектором амплитуд перемещений  $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$  и описываются динамическими уравнениями Ляме. Распределенная по глубине нагрузка (включения) моделируется компонентами объемной силы —  $X_r, X_z$ . Решение задачи принадлежит классу обобщенных функций, так как нагрузка распределенная по длине включений, имеет пространственную локализацию, моделируемую дельта-функцией Дирака

$$X_r = \text{Re} [f_r(z) \delta(r - r_0) e^{-i\omega t}],$$

$$X_z = \text{Re} [f_z(z) \delta(r - r_0) e^{-i\omega t}].$$

Далее временной множитель опущен.

Математическая постановка задачи для упругой среды, содержащей включения, запишется следующим образом:

$$(\lambda + 2\mu) \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r \right] +$$

$$+ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \omega^2 \rho u_r =$$

$$= f_r(z) \delta(r - r_0), \quad (1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial z^2} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] +$$

$$+ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r \right] + \omega^2 \rho u_z =$$

$$= f_z(z) \delta(r - r_0),$$

где  $\lambda, \mu$  — константы Ламе,  $\rho$  — плотность.

Граничные условия на поверхности среды при  $z = 0$  заданы в виде

$$\mu \left[ \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = 0;$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r \right] =$$

$$= \begin{cases} p(r), & r \leq a; \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (2)$$

В случае полупространства

$$u_r(r, z), \quad u_z(r, z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

Для слоя толщины  $h$ , жестко сцепленного с недеформируемым основанием,

$$u_r(r, -h) = u_z(r, -h) = 0. \quad (4)$$

В качестве условий излучения используется принцип предельного поглощения.

Используя схему решения, изложенную в [6, 7], с помощью интегрального преобразования Бесселя система (1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), решение которой строится в виде суперпозиции общего и частного решений.

Рассмотрим построение решения задач на примерах однородного упругого слоя, занимающего в цилиндрической системе координат объем ( $0 < r < +\infty$ ;  $-h \leq z \leq 0$ ), с жестко заземленной нижней гранью и однородного полупространства ( $0 < r < +\infty$ ;  $-\infty < z \leq 0$ ).

Сведя (1)–(3) к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), решение последней можно построить методами общей теории ОДУ. Применяя к соответствующим компонентам вектора-функции найденного решения обратные интегральные преобразования, получаем решение исходной краевой задачи (1)–(3) в интегральной форме

$$u_r(r, z) =$$

$$= \int_0^\infty (D_1(\alpha) P(\alpha, z) + D_2(\alpha) M(\alpha, z) +$$

$$+ K_1(\alpha, z)) \alpha J_1(\alpha r) d\alpha, \quad (5)$$

$$u_z(r, z) =$$

$$= \int_0^\infty (D_1(\alpha) R(\alpha, z) + D_2(\alpha) S(\alpha, z) +$$

$$+ K_2(\alpha, z)) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Здесь

$$P(\alpha, z) = \alpha [se^{\sigma_1 z} - \sigma_1 \sigma_2 e^{\sigma_2 z}] \Delta^{-1}(\alpha),$$

$$R(\alpha, z) = -\sigma_1 [se^{\sigma_1 z} - \alpha^2 e^{\sigma_2 z}] \Delta^{-1}(\alpha),$$

$$S(\alpha, z) = \alpha [-\sigma_1 \sigma_2 e^{\sigma_1 z} + se^{\sigma_2 z}] \rho^{-1} c_1^{-2} \Delta^{-1}(\alpha),$$

$$M(\alpha, z) = \sigma_2 [\alpha^2 e^{\sigma_1 z} - se^{\sigma_2 z}] \rho^{-1} c_1^{-2} \Delta^{-1}(\alpha);$$

$$D_1(\alpha) = \left( \frac{p(\alpha)}{\rho c_1^2} - 2C_{21}^2 (s g_1^-(h_0) + \alpha \sigma_2 g_2^-(h_0)) \right),$$

$$D_2(\alpha) = -2\rho c_2^2 (\alpha \sigma_1 g_1^-(h_0) + s g_2^-(h_0)),$$

$$K_1(\alpha, z) = \alpha g_1^+(z) e^{\sigma_1 z} + \alpha [g_1^-(z) - g_1^-(h_0)] e^{-\sigma_1 z} - \sigma_2 g_2^+(z) e^{\sigma_2 z} + \sigma_2 [g_2^-(z) - g_2^-(h_0)] e^{-\sigma_2 z},$$

$$K_2(\alpha, z) = -\sigma_1 g_1^+(z) e^{\sigma_1 z} + \sigma_1 [g_1^-(z) - g_1^-(h_0)] e^{-\sigma_1 z} + \alpha g_2^+(z) e^{\sigma_2 z} + \alpha [g_2^-(z) - g_2^-(h_0)] e^{-\sigma_2 z};$$

$$g_1^\pm(z) = \frac{r_0}{2\rho\omega^2\sigma_1} (\pm \alpha J_1(\alpha r_0) \varphi_{r1}^\mp(z) + \sigma_1 J_0(\alpha r_0) \varphi_{z1}^\mp(z)),$$

$$g_2^\pm(z) = \frac{r_0}{2\rho\omega^2\sigma_2} (\sigma_2 J_1(\alpha r_0) \varphi_{r2}^\mp(z) \pm \alpha J_0(\alpha r_0) \varphi_{z2}^\mp(z));$$

$$\varphi_{rk}^\mp(z) = \int_0^z f_r(\zeta) e^{\mp\sigma_k \zeta} d\zeta,$$

$$\varphi_{zk}^\mp(z) = \int_0^z f_z(\zeta) e^{\mp\sigma_k \zeta} d\zeta, \quad k = 1, 2;$$

$$p(\alpha) = \int_0^\infty p(r) r J_0(\alpha r) dr,$$

$$\Delta(\alpha) = 2C_{21}^2 (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s^2),$$

$$s = \alpha^2 - 0,5\kappa_2^2, \quad C_{21}^2 = (c_2/c_1)^2,$$

$$\sigma_j = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2}, \quad \kappa_j^2 = (\omega/c_j)^2,$$

$\kappa_j$  — волновые числа продольной и поперечной волн соответственно ( $j = 1, 2$ ). Коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  могут быть определены через значения скоростей продольной  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  и поперечной  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  волн.

Аналогично строится решение краевой задачи (1), (2), (4). В результате получаем решение в интегральной форме вида (5), где

$$P(\alpha, z) = [\alpha e^{\sigma_1 z} \Delta_{11} + \alpha e^{-\sigma_1 z} \Delta_{12} - \sigma_2 e^{\sigma_2 z} \Delta_{13} + \sigma_2 e^{-\sigma_2 z} \Delta_{14}] \Delta^{-1}(\alpha),$$

$$R(\alpha, z) = [\alpha e^{-\sigma_2 z} \Delta_{14} - \sigma_1 e^{\sigma_1 z} \Delta_{11} + \sigma_1 e^{-\sigma_1 z} \Delta_{12} + \alpha e^{\sigma_2 z} \Delta_{13}] \Delta^{-1}(\alpha),$$

$$M(\alpha, z) = [\alpha e^{\sigma_1 z} \Delta_{21} + \alpha e^{-\sigma_1 z} \Delta_{22} - \sigma_2 e^{\sigma_2 z} \Delta_{23} + \sigma_2 e^{-\sigma_2 z} \Delta_{24}] \Delta^{-1}(\alpha),$$

$$S(\alpha, z) = [-\sigma_1 e^{\sigma_1 z} \Delta_{21} + \sigma_1 e^{-\sigma_1 z} \Delta_{22} + \alpha e^{\sigma_2 z} \Delta_{23} + \alpha e^{-\sigma_2 z} \Delta_{24}] \Delta^{-1}(\alpha);$$

$$\Delta = 16C_{21}^2 \rho c_2^2 [\sigma_1 \sigma_2 (s^2 + \alpha^4) \times \text{ch}(\sigma_1 h) \text{ch}(\sigma_2 h) - \alpha^2 (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \text{sh}(\sigma_1 h) \text{sh}(\sigma_2 h) - 2s\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2],$$

$$\Delta_{11} = 4\rho c_2^2 [\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{\sigma_1 h} \chi_2^-],$$

$$\Delta_{12} = 4\rho c_2^2 [\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{-\sigma_1 h} \chi_2^+],$$

$$\Delta_{13} = -4\rho c_2^2 \alpha \sigma_1 [e^{\sigma_2 h} \phi_1^- + s],$$

$$\Delta_{14} = 4\rho c_2^2 \alpha \sigma_1 [s - e^{-\sigma_2 h} \phi_1^+],$$

$$\Delta_{21} = -4C_{21}^2 \alpha \sigma_2 [e^{\sigma_1 h} \phi_2^- + s],$$

$$\Delta_{22} = 4C_{21}^2 \alpha \sigma_2 [s - e^{-\sigma_1 h} \phi_2^+],$$

$$\Delta_{23} = 4C_{21}^2 [\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{\sigma_2 h} \chi_1^-],$$

$$\Delta_{24} = 4C_{21}^2 [\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{-\sigma_2 h} \chi_1^+],$$

где

$$\chi_j^\pm = \sigma_1 \sigma_2 \text{ch}(\sigma_j h) \pm \alpha^2 \text{sh}(\sigma_j h),$$

$$\phi_j^\pm = \sigma_1 \sigma_2 \text{sh}(\sigma_j h) \pm \alpha^2 \text{ch}(\sigma_j h),$$

$$j = 1, 2;$$

$$D_1(\alpha) = \left( \frac{p(\alpha)}{\rho c_1^2} - 2C_{21}^2 [s (g_1^+(h_0) + g_1^-(h_0)) - \alpha \sigma_2 (g_2^+(h_0) - g_2^-(h_0))] \right),$$

$$D_2(\alpha) = 2\rho c_2^2 [\alpha\sigma_1 (g_1^+(-h_0) - g_1^-(-h_0)) - s (g_2^+(-h_0) + g_2^-(-h_0))],$$

$$K_1(\alpha, z) = \alpha [g_1^+(z) - g_1^+(-h_0)] e^{\sigma_1 z} + \alpha [g_1^-(z) - g_1^-(-h_0)] e^{-\sigma_1 z} - \sigma_2 [g_2^+(z) - g_2^+(-h_0)] e^{\sigma_2 z} + \sigma_2 [g_2^-(z) - g_2^-(-h_0)] e^{-\sigma_2 z},$$

$$K_2(\alpha, z) = -\sigma_1 [g_1^+(z) - g_1^+(-h_0)] e^{\sigma_1 z} + \sigma_1 [g_1^-(z) - g_1^-(-h_0)] e^{-\sigma_1 z} + \alpha [g_2^+(z) - g_2^+(-h_0)] e^{\sigma_2 z} + \alpha [g_2^-(z) - g_2^-(-h_0)] e^{-\sigma_2 z}.$$

На основе полученных интегральных представлений решения задачи (1)–(3) методом стационарной фазы построены асимптотики амплитуд  $P$ ,  $S$ -волн в упругом полупространстве при  $R \rightarrow \infty$ ,  $\pi/2 < \psi \leq \pi$

$$u_{r1}(\psi, R) = -\frac{\alpha^2 \operatorname{ctg} \psi e^{-iR\kappa_1}}{R} \times (sD_p(\alpha) - D_{f1}(\alpha, -h)) \Big|_{\alpha=\kappa_1 \sin \psi} + O(R^{-2}),$$

$$u_{z1}(\psi, R) = \frac{i\alpha\sigma_1 \operatorname{ctg} \psi e^{-iR\kappa_1}}{R} \times (sD_p(\alpha) - D_{f1}(\alpha, -h)) \Big|_{\alpha=\kappa_1 \sin \psi} + O(R^{-2}), \quad (6) \quad \text{Здесь}$$

$$u_{r2}(\psi, R) = \frac{\alpha\sigma_2 \operatorname{ctg} \psi e^{-iR\kappa_2}}{R} \times (\alpha\sigma_1 D_p(\alpha) - D_{f2}(\alpha, -h)) \Big|_{\alpha=\kappa_2 \sin \psi} + O(R^{-2}),$$

$$u_{z2}(\psi, R) = -\frac{i\alpha^2 \operatorname{ctg} \psi e^{-iR\kappa_2}}{R} \times (\alpha\sigma_1 D_p(\alpha) - D_{f2}(\alpha, -h)) \Big|_{\alpha=\kappa_2 \sin \psi} + O(R^{-2}).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$D_p(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{\rho c_1^2 \Delta(\alpha)},$$

$$D_{f1}(\alpha, z) = \Phi(\sigma_1^{-1} g_2^-(-h_0), g_1^-(-h_0)) - g_1^+(z),$$

$$D_{f2}(\alpha, z) = \Phi(\sigma_2^{-1} g_1^-(-h_0), g_2^-(-h_0)) - g_2^+(z),$$

где

$$\Phi(g, f) = 2C_{21}^2 (2\alpha s \sigma_1 \sigma_2 g + (s^2 + \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2) f) \Delta^{-1}(\alpha),$$

$u_{rj}$ ,  $u_{zj}$  ( $j = 1, 2$ ) — горизонтальные и вертикальные составляющие амплитуд соответственно, индекс 1 относится к  $P$ -волне, 2 —  $S$ -волне.

Из интегральных представлений решения задачи (5) на поверхности упругого полупространства (при  $z = 0$ ), применяя процедуру замыкания контура и используя теорему Коши о вычетах, получены аналитические выражения для амплитуд волн Релея при  $r \rightarrow \infty$

$$u_\beta(r, 0) = i\sqrt{\frac{2\pi\zeta}{r}} \frac{Q_{\beta 1}(\zeta) - Q_{\beta 2}(\zeta)}{2\rho c_2^2 \bar{\Delta}(\zeta)} e^{i(\zeta r - \frac{3\pi}{4})} + O(r^{-3/2}), \quad (7)$$

$$\beta = r, z.$$

$$Q_{r1}(\alpha) = p(\alpha) \alpha (s - \sigma_1 \sigma_2),$$

$$Q_{r2}(\alpha) = 2\rho c_2^2 \kappa_2^2 \sigma_2 (\alpha\sigma_1 g_1^-(-h_0) + s g_2^-(-h_0)),$$

$$Q_{z1}(\alpha) = p(\alpha) \kappa_2^2 \sigma_1,$$

$$Q_{z2}(\alpha) = 4\rho c_2^2 \kappa_2^2 \sigma_1 (s g_1^-(-h_0) + \alpha\sigma_2 g_2^-(-h_0)),$$

$$\bar{\Delta}(\alpha) = 2\alpha\sigma_1\sigma_2 + \alpha^3 (\sigma_1\sigma_2)^{-1} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 4\alpha s.$$

При этом вклад интегралов по берегам разрезов, определяемых точками ветвления  $\zeta = \kappa_1, \kappa_2$ , имеет больший порядок убывания  $O(r^{-3/2})$ , чем вклад полюсов  $O(r^{-1/2})$  [8].

Используя интегральные представления решения задачи (1), (2), (4), по тому же алгоритму построены аналитические выражения для амплитуд волн Релея на поверхности упругого слоя ( $z = 0$ ) при  $r \rightarrow \infty$ . В этом

случае в соотношения (7) следует подставить функции следующего вида:

$$Q_{r1}(\alpha) = p(\alpha) \alpha (\sigma_1 \sigma_2 (\alpha^2 + s) \times \\ \times (1 - \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h)) + \\ + (\alpha^2 s + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h)),$$

$$Q_{r2}(\alpha) = \\ = \rho c_2^2 \kappa_2^2 \sigma_2 \left( g_1^+(-h_0) \alpha \sigma_1 \left( s - e^{-\sigma_1 h} \phi_2^+ \right) + \right. \\ \left. + g_1^-(-h_0) \alpha \sigma_1 \left( s + e^{\sigma_1 h} \phi_2^- \right) + \right. \\ \left. + g_2^+(-h_0) \left( \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{-\sigma_2 h} \operatorname{ch} i_1^+ \right) - \right. \\ \left. - g_2^-(-h_0) \left( \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{\sigma_2 h} \operatorname{ch} i_1^- \right) \right),$$

$$Q_{z1}(\alpha) = p(\alpha) \kappa_2^2 (\alpha^2 \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - \\ - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h)),$$

$$Q_{z2}(\alpha) = \\ = 2\rho c_2^2 \kappa_2^2 \sigma_1 \left( g_1^+(-h_0) \left( \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{-\sigma_1 h} \chi_2^+ \right) - \right. \\ \left. - g_1^-(-h_0) \left( \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{\sigma_1 h} \chi_2^- \right) + \right. \\ \left. + g_2^+(-h_0) \alpha \sigma_2 \left( s - e^{-\sigma_2 h} \phi_1^+ \right) + \right. \\ \left. + g_2^-(-h_0) \alpha \sigma_2 \left( s + e^{\sigma_2 h} \phi_1^- \right) \right),$$

$$\bar{\Delta}(\alpha) = \alpha \left( (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} (s^2 + \alpha^4) + \right. \\ \left. + 4\sigma_1 \sigma_2 (s + \alpha^2) \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) + \right. \\ \left. + h (\sigma_1 (s^2 + \alpha^4) - \alpha^2 \sigma_1^{-1} (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2)) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) + \right. \\ \left. + h (\sigma_2 (s^2 + \alpha^4) - \alpha^2 \sigma_2^{-1} (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2)) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) - \right. \\ \left. - 2 (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 2s\alpha^2 + \alpha^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - \right. \\ \left. - 4\sigma_1 \sigma_2 (s + \alpha^2) - 2s\alpha^2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right).$$

Численные расчеты проводились для вертикальных нагрузок. При этом усилия, приложенные к поверхности среды  $\iint_{\Omega} p(r, \varphi) d\Omega$  и к вертикально ориентированному включению  $\int_{-h_0}^0 f(z) dz$ , считались равными по величине и противоположными по направлению. В качестве функции, описывающей рас-

пределение нагрузки на вертикально ориентированных включениях, использовалась линейная функция

$$f(z) = kz + b,$$

где

$$k = b(1 - \varepsilon_1) h_0^{-1}, \quad b = 2h_0^{-1} (1 + \varepsilon_1)^{-1}, \\ z \in [0, -h_0].$$

Использовалась также функция, описывающая напряжения на жестком включении, полученная из решения интегрального уравнения контактной задачи, вида

$$f(z) = \varepsilon_2 (h_0 + z) + e^{z-h_0} + \frac{1}{\sqrt{-z}} + \frac{1}{\sqrt{z+h_0}}, \\ z \in (0, -h_0).$$

Для случая полупространства расчеты показывают, что амплитуда  $P$ -волны, возбуждаемой поверхностным источником в дальней зоне, возрастает с увеличением  $\psi$  и достигает максимума в направлении строго вниз (при  $\psi = \pi$ ) (кривая один рис. 1а). При увеличении радиуса поверхностного источника максимум амплитуды при  $\psi = \pi$  остается постоянным, а для  $\pi/2 < \psi < \pi$  амплитуда убывает. Амплитуда  $S$ -волны имеет ярко выраженную боковую направленность (кривая один рис. 1б). Причем, при  $\psi = \pi - \arcsin(c_2/c_1)$  наблюдается «особенность» в формировании диаграммы направленности, определяемая влиянием волн, отраженных от поверхности полупространства.

Рост частоты колебаний приводит к уменьшению величины амплитуд  $P$ -,  $S$ -волн в зависимости от жесткости среды и радиуса источника. Для амплитуд  $P$ -,  $S$ -волн, возбуждаемых вертикально ориентированными включениями и поверхностным источником, наблюдается одинаковое формирование диаграмм направленности излучения (рис. 1а, 1б). При этом изменение функции распределения нагрузки на включениях не оказывает существенного влияния.

Зависимость формы диаграмм направленности  $P$ -,  $S$ -волн от параметра  $\varepsilon$  функции распределения нагрузки усиливается с ростом длины включений (рис. 2а, 2б). В случае более жестких сред эта зависимость также прослеживается. Для функций распределения нагрузки с параметрами  $\varepsilon_1 = 0$  и  $\varepsilon_2 = 1$  при прочих равных значениях параметров диаграммы направленности полностью совпадают.

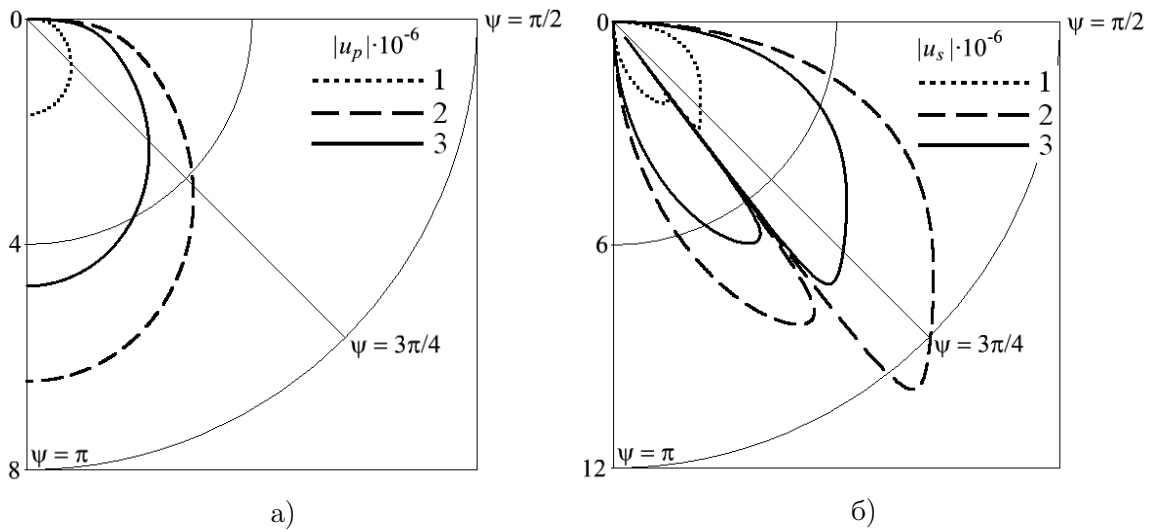


Рис. 1. Диаграммы направленности:  $\nu = 2,0$  Гц; 1 —  $a = 2$  м,  $h_0 = 0$  м; 2 —  $a = 0$  м,  $r_0 = 5$  м,  $h_0 = 10$  м,  $\varepsilon_1 = 0$ ; 3 —  $a = 2$  м,  $r_0 = 5$  м,  $h_0 = 10$  м,  $\varepsilon_1 = 0$

В качестве характеристик среды были взяты значения:  $\rho = 1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_1 = 0,2 \cdot 10^3$  м/с,  $c_2 = 0,12 \cdot 10^3$  м/с. Для графиков приняты следующие обозначения:  $u_p, u_s$  — коэффициенты при  $R^{-1}$  для амплитуд продольных и поперечных волн соответственно;  $u_r, u_z$  — коэффициенты при  $r^{-1/2}$  для амплитуд соответственно горизонтальной и вертикальной составляющих волны Релея;  $\psi$  — угол, отсчитываемый от дневной поверхности полупространства по часовой стрелке.

В формулах  $\omega$  — приведенная частота, определяемая соотношением

$$\omega = \frac{2\pi\nu l_0}{c_0},$$

где  $\nu$  — частота (Гц),  $l_0 = 1$  м,  $c_0 = 10^3$  м/с.

Увеличение радиуса поверхностной нагрузки приводит к увеличению амплитуды вертикальной составляющей волны Релея (рис. 3 — первая мода, рис. 4 — вторая мода, рис. 5 — третья мода).

Существенно усложняет интерференционную картину волнового поля изменение функции распределения нагрузки вдоль образующей вертикальных включений (рис. 6, 7). Это проявляется в увеличении количества частот «запираания» и изменения их значения.

Таким образом, получены интегральные представления решений, описывающих смещения в среде и на поверхности, позволяющие исследовать закономерности формируемого поля перемещений, возбуждаемого по-

верхностной нагрузкой и вертикально ориентированными включениями в упругой среде. Проведены вычислительные эксперименты, позволяющие сделать выводы о влиянии вертикально ориентированных включений на интерференционную картину общего волнового поля.

### Литература

1. Ухов С. Б., Семенов В. В., Знаменский В. В., Тер-Мартirosян З. Г., Чернышев С. Н. Механика грунтов. Основания и Фундаменты. М.: Изд. АСВ, 1994. 527 с.
2. Саргсян А. Е., Геращенко В. С., Шапошников Н. Н. Расчетная модель свайных фундаментов с учетом эффекта их взаимодействия с грунтовой средой // Вестник МГСУ. 2012. № 4. С. 69–71.
3. Фиораванте В., Ямиолковский М. Б. Физическое моделирование плитно-свайных фундаментов // Развитие городов и геотехническое строительство. 2006. № 10. С. 200–206.
4. Muir Wood D., Hu W., Nash D. F. T. Group effects in stone column foundations: model tests // Geotechnique. 2000. Vol. 50. № 6. P. 689–698.
5. Ambily A. P., Gandhi S. R. Behaviour of stone columns based on experimental and FEM analysis // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2007. Vol. 133. № 4. P. 405–415.
6. Евдокимов А. А., Капустин М. С. Расчет контактных напряжений в задаче о действии штампа на упругий слой с вертикально ориентированными включениями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 1. С. 33–35.

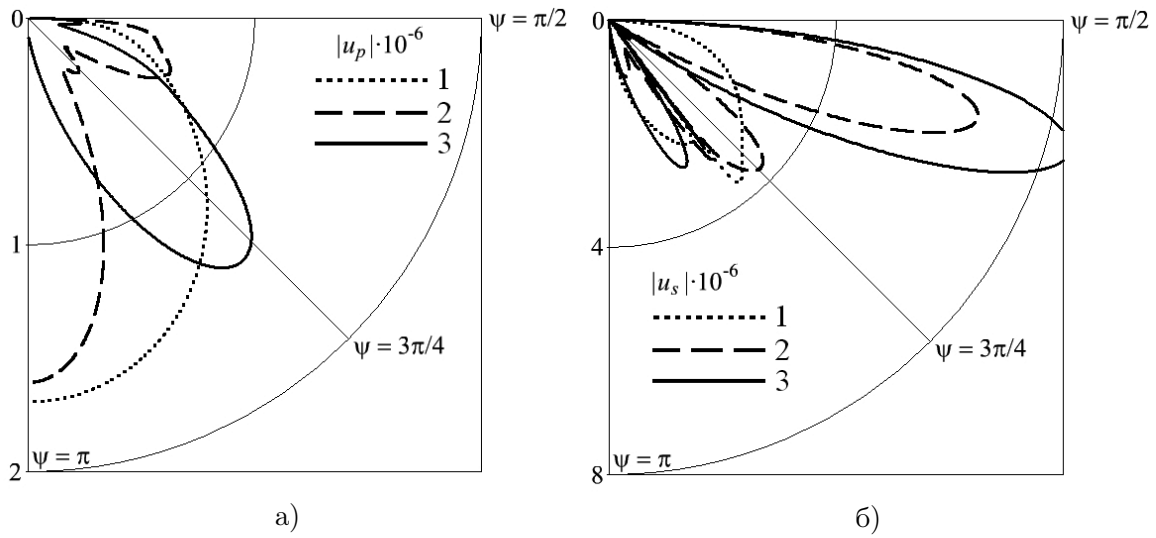


Рис. 2. Диаграммы направленности:  $\nu = 2,0$  Гц; 1 —  $a = 2$  м,  $h_0 = 0$  м; 2 —  $a = 0$  м,  $r_0 = 5$  м,  $h_0 = 100$  м,  $\varepsilon_2 = 0$ ; 3 —  $a = 2$  м,  $r_0 = 5$  м,  $h_0 = 100$  м,  $\varepsilon_2 = 0$

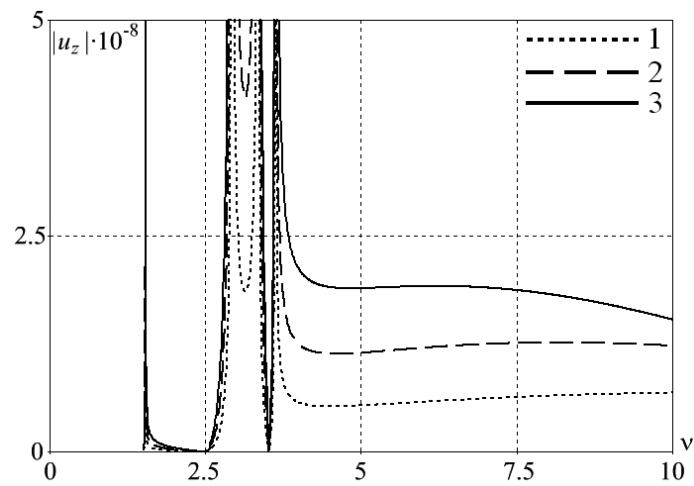


Рис. 3. Мода — 1:  $h = 20$  м; 1 —  $a = 2$  м; 2 —  $a = 3$  м; 3 —  $a = 4$  м

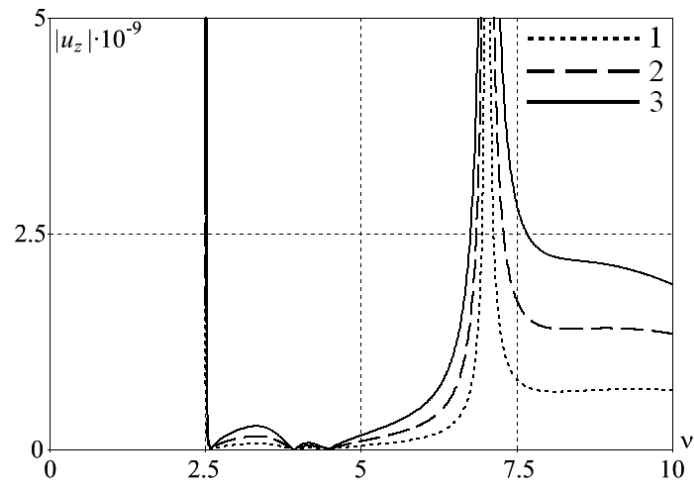


Рис. 4. Мода — 2:  $h = 20$  м; 1 —  $a = 2$  м; 2 —  $a = 3$ ; 3 —  $a = 4$  м

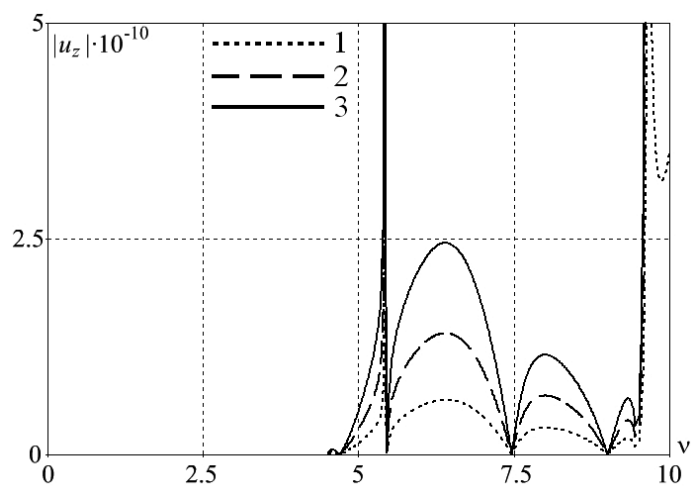


Рис. 5. Мода — 3:  $h = 20$  м; 1 —  $a = 2$  м; 2 —  $a = 3$  м; 3 —  $a = 4$  м

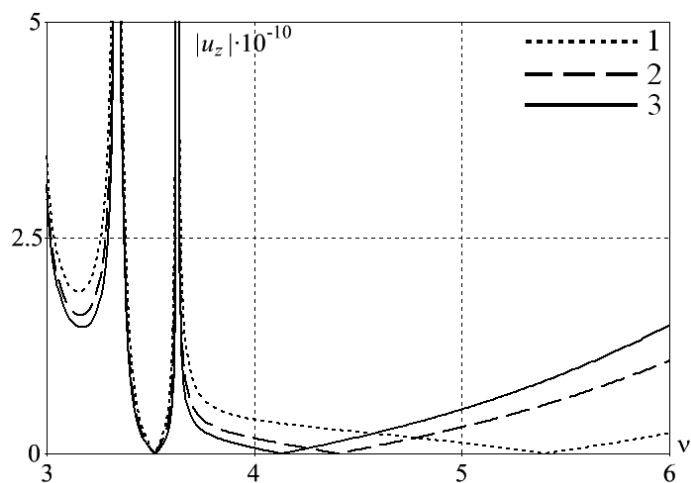


Рис. 6. Мода — 1:  $h = 20$  м;  $r_0 = 2$  м,  $h_0 = 10$  м, 1 —  $\varepsilon_1 = 0$ ; 2 —  $\varepsilon_1 = 0,5$ ; 3 —  $\varepsilon_1 = 1,0$

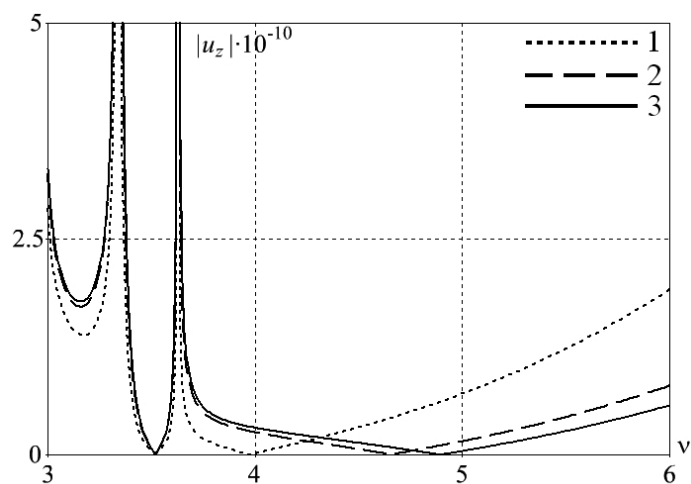


Рис. 7. Мода — 1:  $h = 20$  м;  $r_0 = 2$  м,  $h_0 = 10$  м, 1 —  $\varepsilon_2 = 0$ ; 2 —  $\varepsilon_2 = 0,5$ ; 3 —  $\varepsilon_2 = 1,0$



7. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Евдокимов А. А., Капустин М. С.* Колебания полупространства при наличии системы жестких включений // ДАН. 2003. Т. 389. Вып. 1. С. 193–197.
8. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.

Ключевые слова: упругая среда, установившиеся колебания, система вертикальных включений, волновое поле.

---

Статья поступила 8 ноября 2013 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Капустин М. С., Павлова А. В., Рубцов С. Е., Телятников И. С., 2013