

УДК 533.6

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Лукащик Е. П.<sup>1</sup>, Ефремова О. И.<sup>2</sup>*

INVESTIGATION OF TRANSIENT AERODYNAMIC PROCESSES BY AUTOMATIC CONTROL THEORY  
METHODS

Lukashchik E. P., Efremova O. I.

In this paper we propose a method for analyzing the stability and quality of the transient aerodynamic process on the basis of automatic control theory. The investigation of the transfer function in the Laplace space images allowed to present a linear dynamic system “flow of a compressible fluid – wing” as a superposition of a dominant aperiodic unit and an infinite number of oscillatory units. The difference in the nature of the transition functions for different flows is explained by modification of the constituent units. The resulting patterns are confirmed by analytical and numerical calculations using other methods.

Keywords: transient dynamic process, compressible medium, automatic control theory, integral transformations.

### Введение

Интенсивное развитие авиации приводит к появлению новых летательных аппаратов различного назначения, расширению областей их применения. Полеты самолетов совершаются днем и ночью в любую погоду. Увеличивается диапазон рабочих высот, чаще используются малые высоты, где особенно существенно влияние турбулентности атмосферы. Для адаптации летательного аппарата к изменяющимся условиям полета, более полного и точного управления им в настоящее время используются системы автоматического управления, развернутые на базе современных бортовых компьютеров.

Базовой задачей нестационарной аэродинамики является определение нагрузки на крыло, вызванной порывом при полете с большой скоростью вблизи твердой границы. Решение данной задачи требует сведений о переходных характеристиках для случая входа крыла в зону резко ограниченного порыва с учетом сжимаемости. Переходными характеристиками называют соответствующие такому возмущению функции времени, отображающие изменения гидродина-

мических сил от одного стационарного состояния к другому.

При решении вопросов устойчивости функционирования аэродинамических систем представляется целесообразным использование теории автоматического регулирования и управления. Так, крыло самолета можно представить как систему автоматического управления с распределенными параметрами. В качестве входной величины следует рассматривать вертикальную составляющую скорости  $V_y(t)$  возмущенного потока, зависящую, например, от угла атаки. Управляемой (выходной) величиной является распределение давления вдоль профиля. Если в качестве интегральной характеристики такой системы взять суммарный аэродинамический коэффициент подъемной силы  $C_y(t)$ , то крыло можно рассматривать как систему автоматического управления с сосредоточенными параметрами.

Следуя принятой в теории автоматического управления терминологии, введем понятие передаточной функции  $W(s)$  подъемной силы

$$C_y(s) = W(s)V_y(s),$$

<sup>1</sup>Лукащик Елена Павловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: lep\_9091@mail.ru.

<sup>2</sup>Ефремова Ольга Ионовна, магистрант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: prosto\_lelly@gmail.com.

где  $C_y(s)$  и  $V_y(s)$  — изображения по Лапласу функций времени  $C_y(t)$  и  $V_y(t)$ ,  $s$  — комплексная переменная преобразования Лапласа. По полюсам передаточной функции можно определить характер переходного процесса.

### 1. Постановка задачи

При описании физической картины нестационарных процессов обтекания в сжимаемой среде необходимо учитывать конечность скорости распространения малых возмущений и волновой характер этих процессов. Аэродинамические характеристики при неустановившемся движении зависят не только от значений ускорения и скорости в данный момент, но и от характера всех предшествующих изменений этих величин во времени. Памятью, в которой хранится предыстории обтекания, является аэродинамический след, образующийся на профиле и за ним [1].

Во многих случаях надлежащее представление о характере переходного процесса можно получить, анализируя реакцию системы на бесконечно малые возмущения. Этим объясняется тот факт, что исследования многих задач аэроупругости выполняются в линейной постановке. С точки зрения развиваемых подходов это особенно существенно в отношении аэродинамических характеристик. Здесь линеаризация допустима, если местные углы атаки и скольжения на летательном аппарате малы.

В качестве тестовой рассмотрим задачу ступенчатого изменения вертикальной возмущенной скорости, то есть  $V_y(t) = \Delta V_y H(t)$ , где  $\Delta V_y = \text{const}$ ,  $H(t)$  — функция Хевисайда.

Для описания возмущенного течения сжимаемой жидкости выберем систему координат, связанную с профилем. Центр системы расположим посредине хорды  $OX$  совместим с хордой так, чтобы положительное направление оси совпало с вектором скорости  $V_0$  набегающего потока, а ось  $OY$  проведем вертикально вверх.

Математическая постановка задачи сводится к формулировке краевой задачи для потенциала скоростей возмущенного течения  $\varphi(x, y, t)$ .

Основным уравнением в аэродинамике тонких крыльев и теории распространения звуковых волн является уравнение неразрывности, которое в подвижной системе координат имеет вид

нат имеет вид

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{2M}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где  $M = \frac{V_0}{c}$  — число Маха,  $c$  — скорость звука.

Линеаризация интеграла Коши – Лагранжа для потенциальной жидкости приводит к следующему выражению для перепада гидродинамического давления вдоль профиля:

$$\frac{p(x)}{\rho} = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right], \quad (1.2)$$

где  $[\varphi(x, t)]$  — скачок функции  $\varphi(x, t)$  на линии профиля  $y = f(x, t)$ .

В точках следа за профилем гидродинамическое давление должно быть непрерывно

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = 0, \quad y = 0, \quad x > a.$$

Условие плавного обтекания поверхности профиля имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_y(x, t), \quad y = 0.$$

Условие непротекания потока на твердой границе запишется

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y = -h.$$

Начальные условия задаются в виде

$$\varphi(x, y, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, y, 0) = 0.$$

Распространение возмущений носит волновой характер, при котором должен выполняться принцип Гюйгенса: возмущения перед фронтом волны должны отсутствовать.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = \frac{\sqrt{1 - M^2}}{a} y; \quad \bar{t} = \frac{V_0}{a} t; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{V_0 a};$$

$$\bar{p} = \frac{p}{V_0^2 \rho}, \quad \bar{V}_y = \frac{V_y}{V_0}.$$

В безразмерных величинах условие неразрывности (1.1) и гидродинамическое давление примут следующий вид:

$$(1 - M^2) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - 2M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.3)$$

$$p(x) = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right].$$

Здесь и в дальнейшем в работе черта над безразмерными величинами будет опущена.

Одним из способов решения аperiodических задач является применение к начально-краевой задаче преобразования Лапласа по переменной  $t$

$$L[\varphi(x, y, t)] = \int_0^{\infty} \varphi(x, y, t) e^{-ts} dt.$$

В пространстве изображений по Лапласу получим так называемую  $s$ -задачу, в рамках которой основные соотношения (1.3) примут следующий вид:

$$(1 - M^2)\Delta\varphi - 2M^2s\frac{\partial\varphi}{\partial x} - M^2s^2\varphi = 0, \quad (1.4)$$

$$p(x, s) = \left[ s\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right].$$

Путем перехода к новой функции  $\tilde{\varphi} = \varphi e^{-\nu x}$  уравнение неразрывности (1.4) приведем к каноническому уравнению эллиптического типа ( $M < 1$ ) — уравнению Гельмгольца

$$\Delta\tilde{\varphi}(x, y, s) - \varkappa^2\tilde{\varphi}(x, y, s) = 0, \quad (1.5)$$

$$p(x, s) = e^{\nu x}\tilde{p}(x, s), \quad \tilde{p}(x, s) = [\tilde{\varphi}_x + \mu\tilde{\varphi}],$$

$$\mu = \frac{s}{1 - M^2}, \quad \varkappa = \frac{sM}{1 - M^2}, \quad \nu = \frac{sM^2}{1 - M^2}.$$

Соответствующим образом преобразуются условия на границах потока для функции  $\tilde{\varphi}(x, y, s)$ :  
в аэродинамическом следе за профилем

$$[\tilde{\varphi}_x + \mu\tilde{\varphi}] = 0, \quad y = 0, \quad x > 1;$$

на линии профиля

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y} = V_y(s) \frac{e^{-\nu x}}{\sqrt{1 - M^2}}, \quad y = 0, \quad |x| < 1;$$

на твердой границе

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y} = 0, \quad y = -H = -h \frac{\sqrt{1 - M^2}}{a}.$$

Используя выражение давления через решение  $\tilde{\varphi}(x, y, s)$  можно определить передаточную функцию

$$W(s) = \int_{-1}^1 e^{\nu s} [\tilde{\varphi}_x + \mu\tilde{\varphi}] ds. \quad (1.6)$$

В пространстве изображений по Лапласу для реакции системы имеем

$$C_y(s) = \frac{1}{s} W(s) \Delta V_y.$$

Обращением преобразования Лапласа получим переходную характеристику по подъемной силе

$$C_y(t) = L^{-1}(C_y(s)).$$

## 2. Метод интегральных уравнений

При решении аэродинамических задач преимущественно применяется метод сведения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных к граничным интегральным уравнениям. Методики сведения могут быть разными: от использования моделей гидродинамических особенностей до применения интегрального исчисления в пространстве обобщенных функций. Представление ядра интегрального уравнения в виде интеграла Фурье дает дополнительный инструмент для исследования аэродинамических процессов, которые носят волновой характер. Поэтому, придерживаясь последнего способа, будем строить решение математической задачи, опираясь на его физическую интерпретацию согласно теории гидродинамических особенностей.

Применяя к задаче (1.5) обобщенное преобразование Фурье по переменной вдоль потока координате  $x$ , в пространстве образов получим соответствующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\Phi(\alpha, y)}{dy^2} - \beta^2\Phi(\alpha, y) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\Phi}{dy} = V(\alpha), \quad y = 0,$$

$$\frac{d\Phi}{dy} = 0, \quad y = -H.$$

Здесь

$$V(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_y(x, s) \frac{e^{-\nu x}}{\sqrt{1 - M^2}} e^{i\alpha x} dx,$$

$$\Phi(\alpha, y, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(x, y, s) e^{i\alpha x} dx, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \varkappa^2.$$

В областях над и под крылом решение задачи (2.1) ищем в виде отдельных составляющих

$$\Phi(y) = \begin{cases} \Phi_+(y), & y > 0, \\ \Phi_-(y), & y < 0, \end{cases}$$

для которых необходимо потребовать выполнения условий сопряжения

$$\frac{d\Phi_+}{dy} = \frac{d\Phi_-}{dy} = V(\alpha) \text{ при } y = 0,$$

$$\frac{d\Phi_-}{dy} = 0 \text{ при } y = -H.$$

Вид составляющих решения определяется поведением их на бесконечности.

Образ Фурье для функции давления  $\tilde{p}(x, s)$  имеет вид

$$P(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(x, s) e^{i\alpha x} dx = (-i\alpha + \mu) \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\varphi}(x, 0, s)] e^{i\alpha x} dx.$$

В пространстве обобщенных функций приходим к функциональному уравнению

$$P(\alpha)K(\alpha) = V(\alpha), \quad (2.2)$$

где

$$K(\alpha) = \frac{\beta}{2i(\alpha + i\mu)} (1 - e^{-2H\beta}).$$

Обратным преобразованием Фурье получим свертку финитной функции  $\tilde{p}(x, s)$  и обобщенной функции медленного роста

$$\int_{-1}^{+1} \tilde{p}(\xi, s) k(x - \xi) d\xi = V_y(x) \frac{e^{-\nu x}}{\sqrt{1 - M^2}}, \quad (2.3)$$

$$k(x) = F^{-1}[K(\alpha)](x).$$

Это интегральное уравнение является разрешающим уравнением для нахождения функции  $\tilde{p}(x, s)$ , которую можно интерпретировать как интенсивность слоя диполей, обеспечивающего перепад гидродинамического давления в точках профиля.

Для передаточной функции имеем следующее выражение:

$$W(s) = \int_{-1}^1 e^{\nu x} \tilde{p}(x, s) dx. \quad (2.4)$$

### 3. Вычисление ядра интегрального уравнения

Опыт компьютерных вычислений показывает, что эффективность численных методов в значительной степени зависит от выбранной методики вычисления ядра  $k(x)$ . Выбор методики должен основываться на анализе особенностей образа ядра  $K(\alpha)$ . Представление ядра в форме интеграла Фурье позволяет достаточно просто выполнить этот анализ. Так поведение  $K(\alpha)$  на бесконечности

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K(\alpha) = \frac{\text{sign}(\alpha)}{2i} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

указывает, что ядро  $k(x)$  будет содержать сингулярное слагаемое, так как

$$F^{-1}\left(\frac{\text{sign}(\alpha)}{2i}\right) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

то есть интеграл в (2.3) является сингулярным интегралом 1-го рода.

Используя интегральные представления для цилиндрических функций [2], можно предложить для ядра  $k(x)$  выражение в виде суммы слагаемых, содержащих функции Макдональда  $K_0, K_1$  и интегралы от  $K_0$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2 + 4H^2}} K_1(\alpha \sqrt{x^2 + 4H^2}) - \alpha \text{sign}(x) K_1(\alpha |x|) + \mu (K_0(\alpha \sqrt{x^2 + 4H^2}) - K_0(\alpha |x|)) + (\mu^2 - \alpha^2) \left[ \int_{-\infty}^x e^{-\mu(x-\xi)} (K_0(\alpha |\xi|) - K_0(\alpha \sqrt{\xi^2 + 4H^2})) d\xi \right] \right\}. \quad (3.1)$$

Функцию ядра можно также вычислить как интеграл в комплексной области переменной  $\alpha = \sigma + i\tau$  с учетом полюсов и точек ветвления

$$k(x) = \frac{-\text{sign}(x)}{2\pi} \left\{ \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sqrt{\tau^2 - \alpha^2}}{\tau - \text{sign}(x)\mu} \times (1 - \cos 2H \sqrt{\tau^2 - \alpha^2}) e^{-\tau|x|} d\tau \right\} + \frac{1 + \text{sign}(x)}{8} \sqrt{\mu^2 - \alpha^2} e^{-\mu x} \times \sin(2H \sqrt{\mu^2 - \alpha^2}). \quad (3.2)$$

Такой подход широко применяется при решении динамических контактных задач теории упругости [3]. Использование методов теории функций комплексной переменной для задач аэродинамики можно найти в работе [4]. Повышение эффективности вычислений при таком способе объясняется получением в выражении для ядра  $k(x)$  интегралов с экспоненциально убывающим весом.

Расчеты для ядра, выполненные на основе выражений (3.1) и (3.2), показали эквивалентность этих представлений.

#### 4. Численная схема

Для решения широкого круга задач аэродинамики эффективно используется метод дискретных вихрей, введенный школой академика С.М. Белоцерковского [5]. С математической точки зрения данный метод является методом механических квадратур со сдвинутой коллокацией, что обеспечивает простоту его численной реализации. С помощью выбора расположения узлов квадратурной формулы и точек коллокации удается учесть физические особенности рассматриваемой задачи и получить решение в определенном классе функций.

Учитывая связь интенсивности вихрей с перепадом давления, в данном случае имеем, что искомая функция  $\tilde{p}(x, s)$  является неограниченной на передней кромке и конечной на выходной кромке крыла. Для данного класса решений эффективной будет следующая схема расположения дискретных вихрей  $\xi_j$  и контрольных точек  $x_i$ :

$$\xi_j = -1 + \frac{1}{n}(j-0, 75), \quad x_i = -1 + \frac{1}{n}(i-0, 25),$$

$$i, j = \overline{1, n}.$$

В результате решение сингулярного интегрального уравнения сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{p}_j k(x_i - \xi_j) = V_y(x_i) \frac{e^{-\nu x_i}}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (4.1)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Принятое расположение узлов и точек коллокации приводит к преобладанию по величине диагональных элементов матрицы системы (4.1), что положительно сказывается на устойчивости компьютерных вычислений.

Соответственно численное значение переходной характеристики определяется по формуле

$$W(s) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{p}(\xi_j, s) e^{\nu \xi_j}.$$

#### 5. Асимптотическое решение для малых высот

Построим решение краевой задачи (2.1) для случая малых  $H$ . Используем первое приближение функции

$$(1 - e^{-2H\sqrt{\alpha^2 + \varkappa^2}}) = 2H\sqrt{\alpha^2 + \varkappa^2} + O(H^2),$$

тогда функциональное уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{P(\alpha)}{-(\mu - i\alpha)}(\alpha^2 + \varkappa^2) = \frac{V(\alpha)}{H}. \quad (5.1)$$

Вводя в рассмотрение новую функцию  $G(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{\mu - i\alpha}$ , запишем последнее уравнение в виде

$$-G(\alpha)(\alpha^2 + \varkappa^2) = \frac{V(\alpha)}{H},$$

что в пространстве оригиналов приводит к следующей краевой задаче:

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - \varkappa^2 g(x) = \frac{V_y(x) e^{-\nu x}}{H\sqrt{1-M^2}}, \quad g(-1) = 0,$$

$$\frac{dg(1)}{dx} + \mu g(1) = 0.$$

Аналитическое решение данной задачи можно получить, например, методом функций Грина

$$g(x) = \frac{1}{\varkappa H \sqrt{1-M^2}} \times$$

$$\times \int_{-1}^x V_y(x) e^{-\nu x} \operatorname{sh}[\varkappa(x-s)] ds +$$

$$+ C \operatorname{sh}[\varkappa(1+x)],$$

где константа

$$C = -\frac{1}{H\sqrt{1-M^2}} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1}{\psi_2} dx,$$

$$\psi_1 = V_y(x) e^{-\nu x} [\operatorname{ch}[\varkappa(1-x)] + \frac{\mu}{\varkappa} \operatorname{sh}[\varkappa(1-x)]],$$

$$\psi_2 = \varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa) + \mu \operatorname{sh}(2\varkappa).$$

Используя построенное решение  $g(x)$ , определим в аналитическом виде передаточную функцию

$$W(s) = \int_{-1}^1 \left[ \frac{dg(x)}{dx} + \mu g(x) \right] e^{\nu x} dx.$$

Передаточная функция является мероморфной и представляется как отношение двух целых функций

$$W(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где

$$B(s) = (\varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa) + \mu \operatorname{sh}(2\varkappa)).$$

Корни характеристического уравнения  $B(s) = 0$

$$s_k = -\frac{1 - M^2}{4M} \ln \frac{1 + M}{1 - M} \pm i \frac{k\pi(1 - M^2)}{2M},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

имеют отрицательную действительную часть, следовательно, переходной процесс устойчив.

Для вычисления переходной характеристики можно воспользоваться формулой [6]

$$C_y(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(s_k)}{s_k B'(s_k)} e^{s_k t}. \quad (5.2)$$

## 6. Исследования переходного аэродинамического процесса

1. Впервые переходная характеристика подъемной силы в дозвуковом потоке была получена Мазельски и Дришлером [1] путем вычисления интеграла Фурье от частотных характеристик. Переходная характеристика была представлена в виде суммы трех отрицательных экспонент по времени

$$C_y(t) = C_0 + C_1 e^{-s_1 t} + C_2 e^{-s_2 t} + C_3 e^{-s_3 t},$$

$$s_i > 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

что соответствует действительным полюсам  $W(s)$  и априори означает аperiодический характер переходного процесса.

Результаты вычислений переходных характеристик на основе данного подхода подтверждаются закономерностями, полученными по другим методикам для безграничной,

но отличаются для ограниченной сжимаемой среды.

2. Результаты прямого численного расчета по временной переменной  $t$  переходной характеристики тонкого профиля в дозвуковом потоке можно получить по методике, приведенной в монографии [5]. Используя решение для источника в сжимаемой среде, методом гидродинамических особенностей так называемая  $t$ -задача (1.1) сводится к интегродифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^t dt \int_{-1}^1 \gamma(\xi, t) [R(x - \xi, 0, t - \tau) - R(x - \xi, 2h, t - \tau)] d\xi = V_y(x, 0, t),$$

где

$$R(x, y, t) = \frac{R_1}{R_2}, \quad (6.1)$$

$$R_1 = (x^2 - y^2 - xt)^2 (t^2 - M^2(x - t)^2 - M^2 y^2) - M^2 y^2 (y^2 + x^2 - xt),$$

$$R_2 = [(x^2 + y^2 - xt)^2 + y^2 (t^2 - M^2(x - t)^2 - M^2 y^2)] \times \sqrt{t^2 - M^2(x - t)^2 - M^2 y^2}.$$

Дискретизация процесса во времени сводит уравнение (6.1) к рекуррентной системе интегральных уравнений, для численного решения которых используется метод дискретных вихрей.

Представленные на рис. 1 результаты прямых численных расчетов по времени для данной методики показывают колебательный характер и зависимость переходных характеристик в ограниченной сжимаемой среде от высоты и скорости полета крыла. Однако данный подход не позволяет провести качественный анализ характера переходного аэродинамического процесса.

3. Наибольший практический интерес представляет исследование характеристик крыльев на малых высотах полета, так как с уменьшением отстояния от границы заметно возрастает подъемная сила крыла. Однако уменьшение отстояния приводит к ухудшению сходимости как численных, так и аналитических методов. Этим объясняется появление различных асимптотических теорий

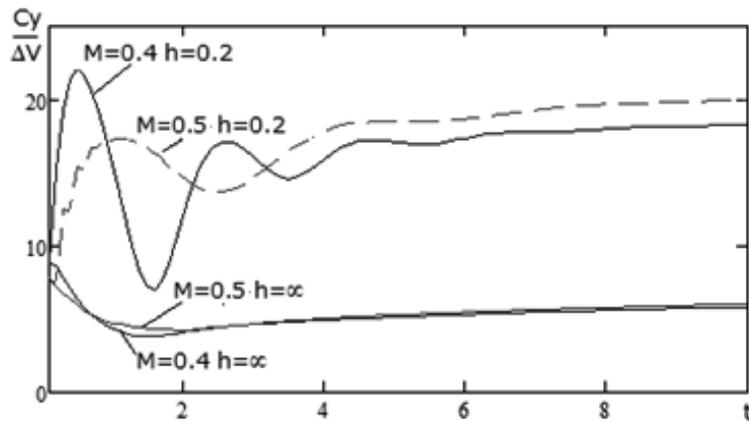


Рис. 1. Переходные характеристики для различных чисел Маха вблизи твердой границы  $h = 0, 2$  и в безграничном потоке ( $t$ -задача)

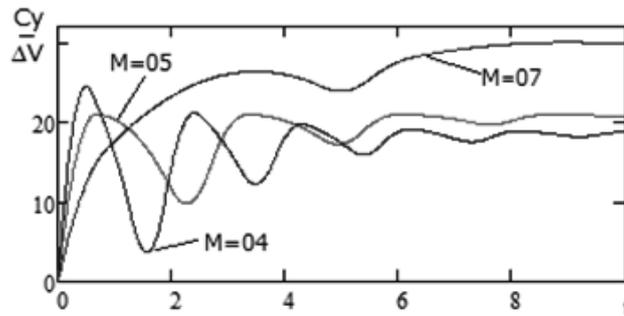


Рис. 2. Асимптотическое решение для различных скоростей движения при  $h = 0, 2$

для определения характеристик крыла вблизи экрана [7, 8]. В настоящей работе на основе асимптотической модели получено приближенное аналитическое выражение для передаточной функции. При этом передаточная функция имеет один действительный и бесконечное множество комплексных корней. Результаты, полученные на основе асимптотического решения (5.2), приводят к заметно осциллирующим (с затуханием) переходным характеристикам (рис. 2).

4. Указанные выше обстоятельства обусловили необходимость более углубленного анализа переходных характеристик тонкого профиля в дозвуковом потоке, для выполнения которого используются методы теории автоматического управления [9]. Характер переходного процесса для линейных динамических систем принято определять по полюсам передаточной функции, которую представляют в виде

$$W(s) = \frac{A_m(s)}{B_n(s)}, \quad (6.2)$$

где  $A_m(s)$  и  $B_n(s)$  — полиномы от  $s$  степени  $m$  и  $n$ .

В зависимости от вида полюсов передаточной функции (комплексные, действительные) и порядка расположения их на комплексной плоскости  $s = \alpha + i\beta$  характер переходного процесса может быть либо апериодическим, либо колебательным или сочетанием того и другого с преобладанием одного из них.

Известно, что для переходной характеристики в сжимаемой среде

$$\lim_{t \rightarrow 0} C_y(t) = \frac{4}{M}$$

независимо от высоты полета [1], а

$$\lim_{t \rightarrow 0} C_y(t) = C_{y\infty}(H),$$

где  $C_{y\infty}(H)$  — стационарные значения  $C_y$  для отстояния  $H$ , так при  $H = \infty$

$$C_{y\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - M^2}}.$$

Учитывая конечные значения  $C_y(t)$  при  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$ , на основе предельных теорем преобразования Лапласа передаточную функцию  $W(s)$  аппроксимируем отношением двух полиномов одинаковой степени. Ряд соображений (учет апериодического характера влияния вихревого следа, необходимость сохранения парных комплексных корней) говорят в пользу нечетной величины  $m = n$ .

Расчеты при  $n = 3$  показывают, что для всех  $0 < M < 1$  один корень является действительным  $s_1 = \lambda$ , а два — комплексно-сопряженными  $s_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ . Все три корня имеют отрицательную действительную часть. При этом действительный корень расположен ближе к мнимой оси, чем комплексные. Это означает, что переходный аэродинамический процесс установления подъемной силы в дозвуковом потоке является колебательным, накладывающимся на доминирующий апериодический.

Расположение корней в левой полуплоскости комплексного переменного  $s$  означает затухание возмущений с течением времени, то есть указывает на устойчивость переходного процесса. Устойчивость динамического процесса следует также из положительности коэффициентов характеристического полинома  $B_n(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$  и выполнения критерия Гурвица  $a_1a_2 > a_0$ .

Случаи  $M = 0$  и  $M = 1$  являются особыми. При  $M = 0$  (несжимаемая жидкость) степень характеристического полинома снижается до 1 и остается только действительный отрицательный корень (апериодический процесс). В случае  $M = 1$  один (действительный) корень становится нулевым, а аэродинамический переходный процесс становится статически неустойчивым.

Характеристический полином в знаменателе (6.2) представим в стандартной форме, принятой в теории автоматического регулирования

$$B_n(s) = (s - \lambda)[(s - \alpha)^2 + \beta^2],$$

где  $\lambda < 0$  и  $\alpha < 0$ . Такое представление показывает, что рассматриваемая динамическая система может быть разбита на два звена: апериодическое и колебательное.

Характеристический полином колебательного звена, соответствующий комплексным корням, представим в виде

$$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1, \quad 0 < \xi < 1.$$

Здесь  $\xi$  — коэффициент демпфирования.

Согласно теории автоматического регулирования [9] при  $1 > \xi > 0,707$  резонансные явления слабо выражены и могут наблюдаться при  $\xi < 0,707$ . Причиной того, что колебательный характер переходного процесса в безграничном дозвуковом потоке остался незамеченным, является слабая колебательность или наличие сильного аэродинамического демпфирования, связанного с излучением звуковых волн. При этом спектр частот непрерывен. Вблизи экрана узкий слой газа между крылом и экраном служит волноводом с дискретным спектром частот, при этом демпфирование уменьшается по мере уменьшения толщины слоя. Так для  $M = 0,5$   $\xi = 0,8$  при  $h = 2$ ,  $\xi = 0,6$  при  $h = 0,8$ ,  $\xi = 0,102$  при  $h = 0,2$ . На уровне корней характеристического полинома колебательного звена это выражается в возрастании отношения мнимой части комплексного корня к действительной, называемого колебательностью [10]

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}$$

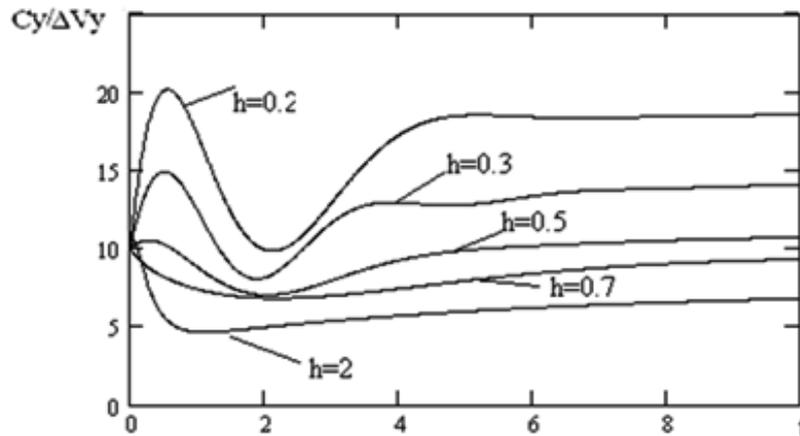
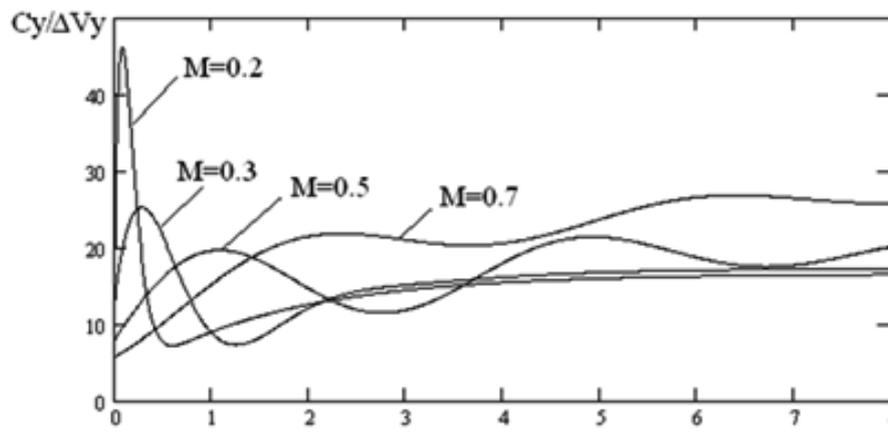
и в уменьшении затухания

$$\xi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Результаты расчетов по методике, использующей преобразование Лапласа ( $s$ -задача), представленные на рис. 3, подтверждают ослабление демпфирующих сил при приближении крыла к экрану, что приводит к увеличению колебательности переходных характеристик. Практически допустимо при наличии значительных демпфирующих сил для безграничного потока профиль в потоке сжимаемой жидкости моделировать системой лишь апериодических звеньев, что и было сделано в указанных работах Мазельски и Дришлера.

Графики на рис. 4 демонстрируют характер переходных характеристик при различных скоростях движения крыла. Возрастание скорости приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

Представленные данные подтверждают, что при изучении переходных процессов особенно важен вид звена, моделирующего тонкий профиль в потоке. С точки зрения теории систем автоматического регулирования, профиль в потоке сжимаемой жидкости должен представлять собой синтез апериодического звена и бесконечного количества колебательных звеньев.

Рис. 3. Переходные характеристики для разных высот полета  $M = 0,4$ Рис. 4. Переходные характеристики для разных скоростей движения вблизи экрана  $h = 0,2$ 

### Заключение

Применение аппарата теории автоматического регулирования к исследованию передаточных функций подтверждает и обосновывает закономерности, обнаруживаемые для переходных аэродинамических характеристик различными методиками. Результаты проведенного анализа могут быть рекомендованы для использования в бортовых системах автоматического управления при режимах взлета-посадки.

Полученные решения задачи о скачкообразном переходе из одного стационарного состояния в другое могут стать основой для определения реакции на малые нестационарные возмущения произвольной формы с помощью интеграла Дюамеля, а также использоваться для создания более сложной модели, учитывающей упругие деформации кры-

ла под действием гидродинамических сил в ограниченной сжимаемой среде.

### Литература

1. Бисплингхофф Р.Л., Эллис Х, Халфман Р.Л. Аэроупругость. М.: Иностранная литература, 1958. 800 с.
2. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.
3. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М: Наука, 1989. 344 с.
4. Лукащик Е.П. Применение обобщенных функций в динамических контактных задачах аэроупругости крыла // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 1. С. 69–80.
5. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М: Наука, 1971. 768 с.

6. Деч Г. Руководство к практическому преобразованию Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
7. Юнов С.В. Аperiodическое движение тонкого профиля в сжимаемой жидкости на малых отстояниях от твердой границы // В сб. Динамика сплошной среды с нестационарными границами. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1984. С. 113–117.
8. Ефремов И.И., Лукашик Е.П., Хуако Н.М. Нестационарное обтекание тонкого профиля дозвуковым потоком газа вблизи твердой границы // Прикладные проблемы механики жидкости и газа: Тез. докл. IV Междунар. конф. Севастополь, 1994. С. 20–21.
9. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989. 304 с.
10. Макаров И.М., Менский В.М. Линейные автоматические системы. М.: Машиностроение, 1982. 504 с.

Ключевые слова: переходной динамический процесс, сжимаемая среда, теория автоматического управления, интегральные преобразования.

---

Статья поступила 4 сентября 2013 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Лукашик Е. П., Ефремова О. И., 2013