

УДК 532.517.2:534.2

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДВУХСЛОЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ¹

Снигерёв Б. А.²

NON-ISOTHERMAL TWO LAYER FLOW OF NON-NEWTONIAN FLUID IN FLAT CHANNEL

Snigerev B. A.

Numerical simulation of nonisothermal double-layer non-newtonian viscous flow in flat channel was performed. Mathematical model of problem based on equations conservation of mass, momentum and energy supplemented by the rheological equation of state of power law fluid was performed. The technique of numerical solving the problem based on the finite element method was developed. The parametric investigation of position and form interface boundary in dependance of pacins factors and rheological properties was performed.

Keywords: non-newtonian nonisothermal flow, interface boundary, numerical simulation.

Слоистые или стратифицированные течения жидкостей давно привлекают внимание исследователей. Развитие исследований стратифицированных течений наиболее активно стимулировали проблемы, возникающие при производстве слоистых полимерных пленок и биокомпонентных волокон методом соэкструзии, когда два или более потоков расплава продавливаются через формирующую головку совместно. При соэкструзии возникает стратифицированное течение неньютоновских жидкостей в плоском щелевом или круговом каналах с образованием границы раздела слоёв потоков. Двухслойные течения неньютоновских жидкостей получили распространение в технологии переработки пластмасс как перспективный и экономичный способ получения двух- и многослойных пленок и биокомпонентных нитей путем соединения двух и более расплавов различных полимеров [1, 2]. Математическое моделирование процесса совместного течения полимеров при формовании многослойных пленок позволяет изучить его основные закономерности и рассмотреть влияние геометрии каналов, реологических свойств полимеров, режимов их подачи на характер их взаимодействия в общем потоке, напряженно-деформированное состояние выходного изде-

лия. Вследствие существенного неравенства температур слоев жидкости, вязкой диссипации энергии в потоке течение становится неизотермическим. Исследование таких течений базируется на решении связанной задачи гидродинамики и теплообмена [3, 4].

В ряде работ проведены теоретические исследования с целью анализа причин неустойчивости сдвигового течения двухслойных систем, состоящих из неупругих вязких жидкостей, когда в качестве реологических уравнений состояния используются уравнения ньютоновских или «степенных» жидкостей [5, 6]. Неустойчивость слоистого течения выражается через колебания координаты поверхности раздела относительно оси потока. Показано, что нестабильная форма поверхности раздела характерна для течений, у которых существенно различны вязкости и нормальные напряжения компонентов потока на линии их контакта. В [5] изучалась устойчивость параллельного течения двух стратифицированных однородных несмешивающихся жидкостей с постоянным поверхностным натяжением. Показано, что наиболее опасными являются плоские возмущения. Более общие результаты получены в работе [6], где исследовалась устойчивость плоского течения Пуазейля в трех-

¹Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (14.В37.21.0644).

²Снигерёв Борис Александрович, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН; e-mail: snigerev@mail.knc.ru.

слойной системе двух жидкостей, когда одна из жидкостей занимает центральную область. Оказалось, что в случае когда более вязкая жидкость занимает центральную область, течение всегда будет устойчивым. Если же внутреннюю область занимает жидкость с меньшей вязкостью, то имеет место абсолютная неустойчивость. В [6] рассмотрен случай, когда жидкости с разными плотностями занимают слои произвольной толщины. В работе [7] исследовалось неизотермическое двухслойное течение вязких жидкостей с различными вязкими и теплопроводными свойствами. Методом малых возмущений исследовалась устойчивость плоского двухслойного течения в горизонтальном канале, на стенках которого задано линейное распределение температуры. Установлено, что появление неустойчивостей обусловлено различием определяющих параметров (толщин слоёв, условий подогрева, вязких и теплопроводных свойств жидкостей). Аналогичная задача решается в наклонном канале в работе [8]. При совместном действии массовых и термокапиллярных сил обнаружены различные типы неустойчивости. Как видно из представленного обзора, нелинейная задача о неизотермическом двухслойном течении двух неньютоновских жидкостей в сходящемся канале в наиболее общей постановке практически не исследована. Кроме того, вышеупомянутые работы не касаются непосредственно исследования течения на начальном участке схождения потоков, который характеризуется как участок гидродинамической и тепловой стабилизации двухслойного потока. В настоящей работе численно исследуется неизотермическое установившееся двухслойное течение неньютоновских жидкостей, образующееся в результате слияния двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в плоском канале с образованием границы раздела потоков.

Рассматривается безволновое неизотермическое течение двух несмешивающихся неньютоновских жидкостей в сходящемся канале, схема которого показана на рис. 1. Первая жидкость с объемным расходом Q^1 подается на входе Γ_1^1 (Н1), вторая — на входе Γ_1^2 (АВ) с расходом Q^2 , после схождения потоков в сечении EOL образуется совместное течение жидкостей с границей раздела потоков Γ_6 (ОГ). Область течения жидкости в нижнем слое НIKLMGOJ обозначается через Ω^1 , а в верхнем слое АВDOGFEA —

соответственно Ω^2 . Течение неньютоновских жидкостей в каждой из областей описывается уравнениями сохранения количества движения, энергии и неразрывности в виде [8, 9]

$$\varrho^m \left(\frac{\partial u_i^m}{\partial t} + u_j^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}^m}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i^m}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad m = 1, 2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varrho^m c_p^m \left(\frac{\partial T^m}{\partial t} + u_j \frac{\partial T^m}{\partial x_j} \right) = \\ = \chi^m \frac{\partial^2 T^m}{\partial^2 x_j} + (\sigma_{ij}^m D_{ji}^m). \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений (1)–(3) замыкается реологическим уравнением состояния нелинейно-вязкой жидкости в форме степенного закона [10]

$$\sigma_{ij}^m = -p^m \delta_{ij} + \tau_{ij}^m, \quad (4)$$

$$\tau_{ij}^m = \eta^m(I_2, T) D_{ij}^m,$$

$$D_{ij}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^m}{\partial x_i} \right),$$

$$\eta^m(I_2, T) = \mu_0^m(I_2)^{\frac{k-1}{2}} \exp[-\beta(T - T_0)].$$

В (1)–(4) x_i — декартовы координаты, u_i^m — компоненты скорости жидкости, находящейся в области Ω^m , p^m — давление, ϱ^m — плотность, T^m — температура, δ_{ij} — компоненты единичного тензора, σ_{ij}^m — компоненты полного тензора напряжений, τ_{ij}^m — компоненты тензора девиатора напряжений, c_p^m — удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении, χ^m — коэффициент теплопроводности жидкости, D_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций, I_2 — второй инвариант тензора скоростей деформаций, $\eta^m(I_2, T)$ — эффективная вязкость жидкости, μ_0 — показатель консистенции жидкости (приведенная вязкость), β — температурный коэффициент вязкости, k — параметр модели, T_0 — начальная температура.

В рассчитываемом перепаде температур наиболее сильно меняется вязкость жидкости, а остальные теплофизические параметры изменяются незначительно. Поэтому значения величин ϱ^m , c_p^m , χ^m предполагаются постоянными и берутся в виде средних величин в данном интервале температур.

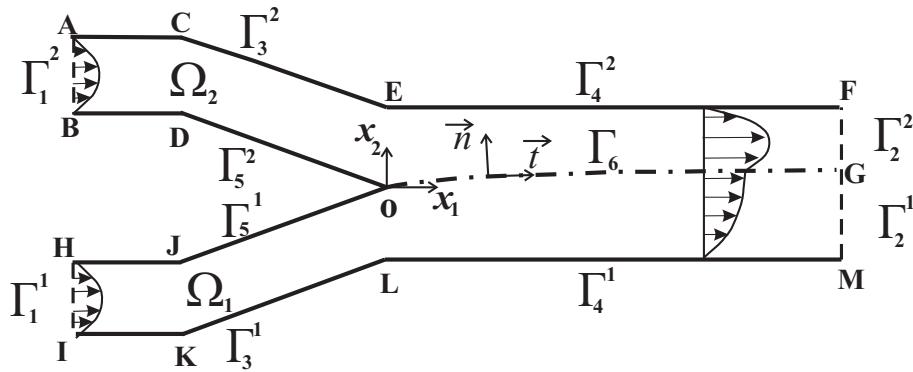


Рис. 1. Схема расчетной области двухслойного потока жидкости

В начальный момент времени граница раздела слоёв Γ_6 имеет плоскую горизонтальную форму. На входных участках Γ_1^m задается профиль осевой скорости, характерный для установившегося течения неньютоновской жидкости в плоском канале, вертикальная скорость равна нулю. Выходные границы Γ_2^m предполагается расположенными на достаточно удаленном расстоянии, где реализуются граничные условия установившегося потока. На твердых стенках $\Gamma_3^m, \Gamma_4^m, \Gamma_5^m$ выполняются условия прилипания жидкости. На подвижной границе раздела слоев жидкости Γ_6 должны выполняться кинематические условия. Кроме того, должны выполняться динамические условия, выражающиеся в равенстве касательных напряжений жидкости с каждой стороны границы раздела, а нормальные напряжения имеют разрыв [8, 9]. Для тепловой задачи граничные условия состоят в том, что на входе жидкости имеют разные начальные температуры T_0^m . На границе раздела потоков Γ_6 выполняются условия равенства температур и тепловых потоков. Твердые стенки Γ_3^m предполагаются изотермическими, и на них поддерживается температура, равная температуре соответствующей жидкости на входе T_0^m . В области совместного течения стенки Γ_4^m предполагаются адиабатическими.

Таким образом, граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^m : u_1^m &= U_0^m(x_2), u_2^m = 0, \\ & p^m = p_0^m, T^m = T_0^m; \\ \Gamma_2^m : \partial u_1^m / \partial x_1 &= 0, \partial T^m / \partial x_1 = 0; \\ \Gamma_3^m, \Gamma_5^m : u_1^m &= u_2^m = 0, T^m = T_0^m; \\ \Gamma_4^m : u_1^m &= u_2^m = 0, \partial T^m / \partial x_2 = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_6 : u_i^m n_i &= 0, u_i^1 t_i = u_i^2 t_i, \sigma_{ij}^1 t_j = \\ &= \sigma_{ij}^2 t_j, \sigma_{ij}^1 n_j - \sigma_{ij}^2 n_j = 2\gamma H n_j, \end{aligned}$$

$$T^1 = T^2, (\chi_1 \partial T_1 / \partial x_i - \chi_2 \partial T_2 / \partial x_i) n_i = 0.$$

Граничные условия на Γ_6 записаны в локальной декартовой системе координат n_i, t_i , нормально связанной с границей раздела, γ — коэффициент поверхностного натяжения, H — главная кривизна поверхности раздела.

В двумерном случае поверхность раздела описывается уравнением $F(x_1, x_2, t) = 0$, тогда выполняется условие

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0. \quad (6)$$

Для решения уравнений (1)–(4) с граничными условиями (5) используется метод конечных элементов [11, 12]. На каждом шаге по времени расчет проводится в два этапа, когда решаются исходные уравнения в областях Ω^1 и Ω^2 соответственно. Для получения матричных уравнений применяется стандартная процедура Галёркина. В качестве конечных элементов используются четырехугольные элементы с квадратичной интерполяцией для переменных компонент скорости u_i , линейной для давления p , компонент девиатора тензора напряжений τ_{ij} и температуры T . Для аппроксимации деформируемых границ применяется конечно-элементная методика, базирующаяся на Эйлеровом подходе и заключающаяся в локальной перестройке конечно-элементной сетки вблизи движущихся границ. Для реализации граничных условий на подвижной границе раздела Γ_6^n на шаге n по времени, определенной с помощью конечно-элементной аппроксимации (6),

применяется линеаризованная итерационная процедура, когда граничные условия (5) заменяются на следующие для области расчета Ω_1^{n+1} :

$$\begin{aligned} u_i^1 t_i^{n+1} &= u_i^2 t_i^n, \quad u_i^1 n_i^{n+1} = 0, \\ \sigma_{ij}^1 n_j^{n+1} &= \sigma_{ij}^2 n_j^n + 2\gamma H n_j, \\ \sigma_{ij}^1 t_j^{n+1} &= \sigma_{ij}^2 t_j^n, \quad T_1^{n+1} = T_2^n, \\ (\chi_1 \partial T_1 / \partial x_i) n_i^{n+1} &= (\chi_2 \partial T_1 / \partial x_i) n_i^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Значения переменных на n -й итерации в правой части записанных соотношений вычисляются на совместной границе по значениям из области Ω_2^n . Затем решается аналогичная задача для области Ω_2^{n+1} с граничными условиями на Γ_6^n , в которых правые части соотношений (7) вычисляются по решению задачи (1)–(4) на n -й итерации для области Ω_1^{n+1} . После первого этапа определяется поле скоростей, давлений и температур для обеих областей на $n + 1$ -й итерации. Затем с помощью численной аппроксимации кинематического условия (6) определяется положение новой границы раздела F^{n+1} . Далее возможен переход к первому этапу с известным новым положением границы и решением задачи на предыдущей итерации для всей области течения. Итерации продолжаются до выполнения сходимости решения, которое заключается в определении установившегося положения границы, определяющегося как

$$\left| \frac{F^{n+1} - F^n}{F^n} \right| \leq \epsilon_1,$$

удовлетворении граничных условий для скорости и температур на подвижной границе раздела

$$\begin{aligned} \Gamma_6 : |u_i^1 t_i^{n+1} - u_i^2 t_i^n| &\leq \epsilon_2, \\ |T^{2n} - T^{1n}| &\leq \epsilon_2, \end{aligned}$$

где $\epsilon_1 = 10^{-3}$, $\epsilon_2 = 10^{-4}$.

Рассмотрим неизотермическое двухслойное течение неньютоновских жидкостей в канале шириной $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м при расходах $Q^1 = 5 \cdot 10^{-9}$ м³/с, $Q^2 = 20 \cdot 10^{-9}$ м³/с.

Значения теплофизических констант для компонентов потока составляют

$$\begin{aligned} \rho^1 &= 930 \text{ кг/м}^3, \quad \mu_0^1 = 10010 \text{ Па}\cdot\text{с}, \\ k^1 &= 0,75, \quad c_p^1 = 2300 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}, \end{aligned}$$

$$\chi^1 = 0,26 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \quad \beta^1 = 0,027 \text{ К}^{-1},$$

$$\rho^2 = 980 \text{ кг/м}^3, \quad \mu_0^2 = 10020 \text{ Па}\cdot\text{с},$$

$$k^2 = 0,45, \quad c_p^2 = 2400 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)},$$

$$\chi^2 = 0,25 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \quad \beta^2 = 0,076 \text{ К}^{-1}.$$

В случае изотермического течения рассматривается течение неньютоновских жидкостей с равной температурой жидкости и стенок $T_0 = 303\text{К}$. В этом случае положение границы раздела определяется величинами расходов и их отношением, а также отношением вязкостей расплавов потоков [3].

Обозначим через l_1, l_2 — ширины потоков для нижнего и верхнего слоев соответственно ($l_1 + l_2 = h$). Введем безразмерную величину $h_f = l_2/(h/2)$, показывающую степень изменения ширины потока при совместном течении в канале. Влияние расходов на положение границы раздела сред показано на рис. 2а, где приведено распределение h_f для отношений расходов $Q = Q^1/Q^2$: 1 — $Q = 2,0$, 2 — $Q = 5,0$, 3 — $Q = 10,0$, 4 — $Q = 2,0$. Значения h_f для установившегося потока при этом составляют $h_f = 1,20, 1,74, 1,97$.

Процессы теплообмена вызывают изменение гидродинамической картины течения в случае схождения потоков, нагретых до разной температуры. Необходимо учитывать влияние температуры на процесс совместного течения потоков, поскольку изменение температуры сказывается на реологических свойствах жидкости, а следовательно, приводит к изменению расходно-напорной характеристики потока.

Для определения влияния температурного режима течения на положение границы раздела рассчитывалось течение в условиях постоянства расходов в нижнем и верхнем слое $Q^1 = Q^2$. Влияние температурного режима рассчитывалось в условиях, когда температура входящей жидкости в нижнем слое остается равной $T_0^1 = 303 \text{ К}$, а верхнем слое повышается до $T_0^2 = 333 \text{ К}, 353 \text{ К}, 373 \text{ К}, 403 \text{ К}$.

Поскольку температура верхнего слоя жидкости в области совместного течения выше нижнего, то эффективная вязкость нижнего слоя превосходит вязкость верхнего слоя, это приводит к тому, что положение границы раздела смещается от оси канала к верхней стенке.

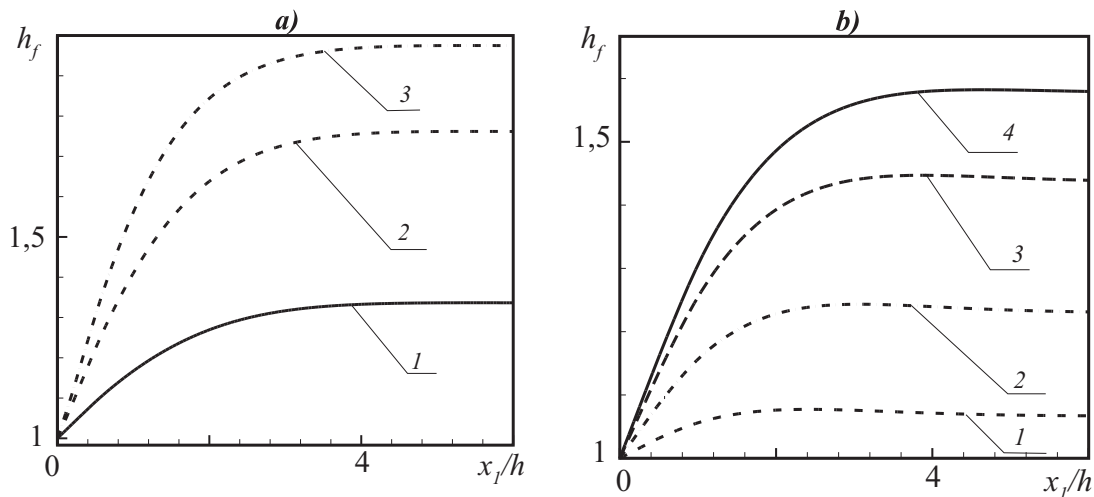


Рис. 2. Распределение h_f для различных случаев : а) при различных значениях отношений расходов $Q = Q^1/Q^2$: 1 – $Q = 2,0$, 2 – $Q = 5,0$, 3 – $Q = 10,0$; б) для $Q^1/Q^2 = 1$, T_0^2 : 1 – $T_0^2 = 333$ К, 2 – 353 К, 3 – 373 К, 4 – 403 К

Дальнейшее увеличение температуры приводит к увеличению смещения, что иллюстрирует рис. 2б. На этом рисунке показано распределение h_f для температурных режимов: 1 – $T_0^1 = 333$ К, 2 – $T_0^2 = 353$ К, 3 – $T_0^2 = 373$ К, 4 – $T_0^2 = 403$ К. Значения h_f для неизотермического потока равны соответственно $h_f = 1,07, 1,24, 1,42, 1,56$.

Безразмерные критерии числа Рейнольдса и Пекле, характеризующие гидродинамику течения и теплообмен, определяемые через $Re = \rho^1 U_0^1 h / \mu_0^1$, $Pe = \rho^1 c_p^1 U_0^1 h / \chi^1$, равны соответственно $Re = 10^{-4}$, $Pe = 2 \cdot 10^2$. Из представленных кривых видно, что при доведении перепада температур до $\Delta T = 30$ К, граница смещается на 7 % процентов от полуширины канала, а при увеличении степени нагрева до $\Delta T = 50$ К смещение границы к верхней стенке канала достигает 42 % процентов. Таким образом, изменением температурных условий входящих в канал жидкостей, образующих затем область совместного течения, можно регулировать положение границы раздела сред в двухслойном потоке.

Динамика развития установившегося профиля скорости для случая равенства расходов и небольшого перепада температур верхнего и нижнего слоя при $Q^1/Q^2 = 1$, $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$, $k^2 = 0,75$, $k^1 = 0,45$, $T_0^1 = 323$ К, $T_0^2 = 333$ К показана на рис. 3а, где приведены профили скорости в сечениях $x_1/h = 0,0, 0,1, 0,5, 3,0$.

Аналогичные профили скоростей для более нагретого верхнего слоя до температуры $T_0^2 = 403$ К приведены на рис. 3б. На них представлена разница в картине перераспределения профиля скоростей по мере удаления от схода для различной степени нагрева верхнего слоя жидкости. Видно, что наблюдается сильное перераспределение скорости в зоне гидродинамической стабилизации потока, то есть участка течения двух несмешивающихся жидкостей, на котором происходит переход к установившемуся совместному потоку.

На обоих графиках в начальном сечении $x_1/h = 0,0$ сходятся два неньютоновских потока с монотонными профилями скоростей в виде парабол (рис. 3, кривая 1). Перераспределение скорости для совместного потока, когда перепад температур соседствующих потоков небольшой, приводит к образованию профиля скорости для течения Пуазейля (рис. 3а, кривая 4). В случае же значительного перепада температур профиль скорости совместного потока существенно изменяется. Зона потока с наибольшими скоростями наблюдается не в центре канала, а смещается в зону с повышенной температурой потока. Параболический профиль скорости, характерный для однородных потоков, становится существенно нелинейным с образованием зоны немонотонности (рис. 3б, кривая 4). Из графиков видно, что в области схождения потоков начинается смещение границы раздела в область течения верхне-

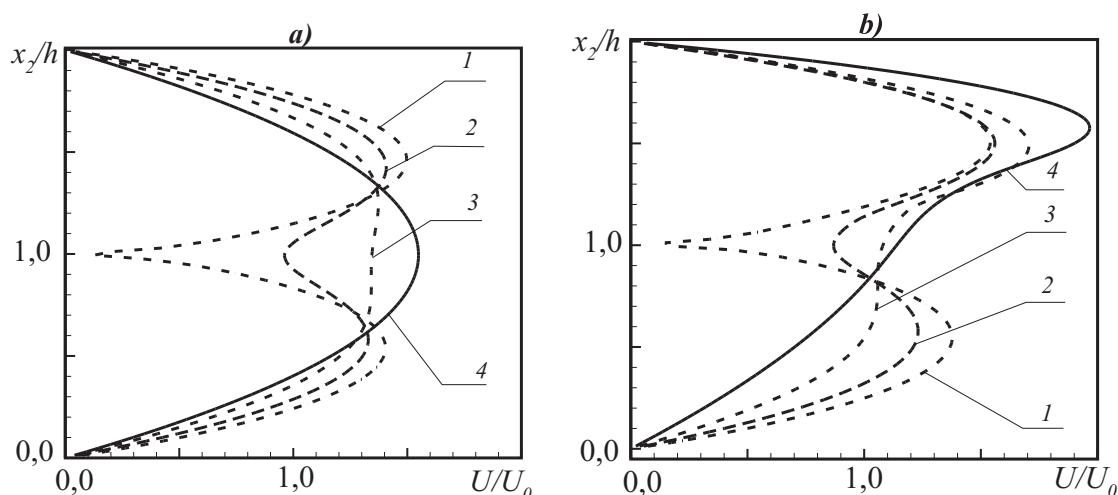


Рис. 3. Распределение продольной скорости при $Q_1/Q_2 = 1$, $\mu_1^0 = \mu_1^0$, $k^1 = k^2$, в вертикальных сечениях канала при различных x_1 : 1 — $x_1 = 1,0$, 2 — $x_1 = 1,1$, 3 — $x_1 = 1,5$, 4 — $x_1 = 3,0$; а) $T_0^1 = 323$ К, $T_0^2 = 335$ К; б) $T_0^1 = 323$ К, $T_0^2 = 403$ К

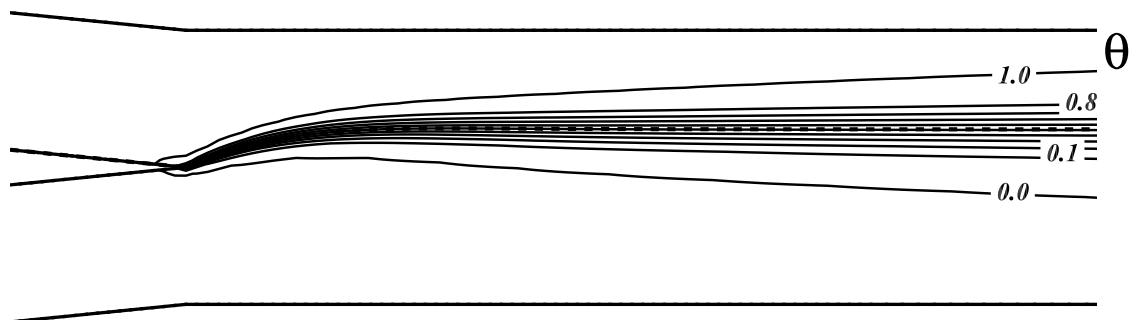
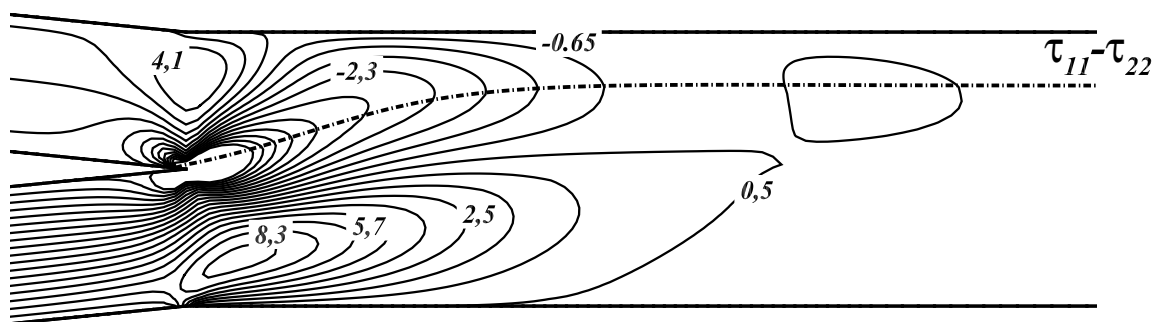
го слоя, где течет нагретая жидкость с более псевдопластичными свойствами, характеризующаяся меньшими значениями эффективной вязкости. Смещение границы в сторону верхней стенки приводит к сужению ширины потока верхнего слоя, что приводит к увеличению максимальных значений скорости по мере удаления от точки схода потоков (рис. 3б, кривые 2, 3, 4). Увеличение максимального значения скорости сопровождается смещением данной зоны к верхней стенке, при этом в нижнем слое увеличение ширины потока приводит к уменьшению средней скорости потока. Отметим также, что двухслойное неизотермическое течение неньютоновских жидкостей с большим отличием температур характеризуется тем, что расстояние, на котором происходит установление стационарного профиля скорости, увеличивается с ростом температурного перепада.

Регулирование положения границы раздела для изотермического случая с помощью подачи жидкостей на входе с различными вязкостями приводит к профилям скорости по сечению, имеющим точку изгиба на границе потоков. В случае подачи на вход жидкостей с различными эффективными вязкостями, а также разными температурами приводит к усилению смещения границы раздела слоёв, но профиль скорости по сечениям не имеет точки изгиба и носит более гладкий характер.

Изотермы безразмерной температуры $\theta = (T - T_0^2)/(T_0^2 - T_0^1)$ в области совместного течения для значений параметров $Re = 10^{-4}$, $Re = 200$ приведены на рис. 4. Видно, что при увеличении скорости потока, что соответствует большему значению числа Re , ширина диапазона изменения температуры для вертикального сечения канала увеличивается и смещается вниз по потоку. Отчетливо наблюдается, что в области схождения двух потоков образуется тонкий пограничный слой изменения температуры, приводящий к узкому пограничному слою изменения вязкости, что выражается в более вогнутой в сторону верхней стенки формы поверхности границы раздела.

На рис. 5 показана разность безразмерных нормальных напряжений $(\tau_{11} - \tau_{22})/(\mu_0^1 U_0^1/h)$ в канале фильеры в области течения для значений $Re = 10^{-4}$, $Re = 200$, $T_0^1 = 423$ К, $T_0^2 = 523$ К. Из рис. 4 видно, что на месте схождения потоков развиваются сильные нормальные напряжения, которые по мере продвижения вниз по потоку начинают релаксировать. Кроме того, вблизи поверхности раздела, особенно в области схода, образуются отрицательные сжимающие напряжения.

В настоящей работе теоретически исследована структура течения и теплообмен при неизотермическом двухслойном течении высоковязких неньютоновских жидкостей в канале. Показано существенное

Рис. 4. Изотермы температуры θ Рис. 5. Изолинии разницы напряжений $(\tau_{11} - \tau_{22})/(\mu_0^1 U_0/h)$ в области схождения потоков для $Q^1/Q^2 = 4$, $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$, $k^2 = 0,75$, $k^1 = 0,45$

влияние на положение границы раздела расходно-напорных характеристик, реологических свойств, температур сходящихся потоков неньютоновских несжимаемых жидкостей. Исследовано влияние указанных характеристик, определяемых критериальными параметрами, на структуру потока, напряженно-деформированное состояние совместного выходящего двухслойного течения жидкостей.

Литература

1. Хан Ч. Д. Реология в процессе переработки полимеров. М.: Химия, 1979. 344 с.
2. Володин В. П. Экструзия профильных изделий из термопластов. СПб.: Профессия, 2005. 480 с.
3. Янков В. И., Глот И. О., Труфанова Н. М., Шакиров Н. В. Течение полимеров в отверстиях фильер. Теория, расчет, практика. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 368 с.
4. Шаповалов В. М. Механика элонгационного течения полимеров. М.: Физматлит, 2007. 176 с.
5. Davis S. H. Thermocapillary instabilities // Annu. Rev. Fluid Mech. 1987. Vol. 19. P. 403–435.
6. Yih C. S. Instability due to viscosity stratification // J. Fluid. Mech. 1967. Vol. 27. P. 337–352.
7. Бирух Р. В., Бушueva С. В. Термокапиллярная неустойчивость в двухслойной системе с деформируемой границей раздела // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 2001. № 3. С. 13–20.
8. Nepomnyahchy A. A., Velarde M. G., Colinet P. Interfacial phenomena and convection // New York. Chapman Hall. 2001. 363 p.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Гидродинамика. Серия «Теоретическая физика». Т. VI. М.: Физматлит, 2001. 706 с.
10. Назмеев Ю. Г. Гидродинамика и теплообмен

- закрученных потоков реологически сложных жидкостей. М.: Энергоатомиздат, 1996. 304 с.
11. *Коннор Дж. Бреббиа К.* Применение метода конечных элементов в жидкости. Л.: Судостроение, 1979. 258 с.
12. *Снигерев Б.А, Тазюков Ф. Х.* Двухслойное течение нелинейно-вязких жидкостей в плоском канале // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. Т. 68. № 2. С. 110–116 .

Ключевые слова: неньютоновское неизотермическое течение, граница раздела слоёв, численное исследование.

Статья поступила 26 июля 2013 г.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, г. Казань

© Снигерёв Б. А., 2013