УДК 539.3

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ И ЗАПРЕЩЕННЫЕ ЗОНЫ В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТАХ[1]

Фоменко С. И.[2]

WAVEFIELDS AND BAND-GAPS IN LAYERED QUASI-PERIODICAL COMPOSITES

Fomenko S. I.

Elastic wave propagation in periodically layered composites is under investigation. Wave motion is excited by an incident plane P- or SV- wave. Wavefield is constructed via T-matrix method including explicit singular values of T-matrix. The dependencies of band-gap on layer's thicknesses, type of incident wave and angle of incidence are shown.

Keywords: elastic waves, phononic crystal, T-matrix, stop-band, low transmission pass-band.

Введение

Современные композитные многослойные структуры нашли широкое применение во многих областях промышленности благодаря тому, что обладают порой уникальными, не встречающимися в природе свойствами, которые возникают из-за особого сочетания материалов, входящих в их состав. Состав композитного материала может быть очень разнообразным, структура — обычно периодическая или стохастическая со специальными свойствами.

К классу композитных материалов относятся и так называемые фононные кристаллы. Они схожи с фотонными кристаллами тем, что состоят из периодических включений в матрицу или слои, но, в отличие от последних, фононные кристаллы являются каналами для распространения и фильтрации акустических или упругих колебаний. Концепция фононных кристаллов появилась в 1990-х годах, являясь во-многом продолжением работ по фотонным кристаллам [1]. Подобно фотонным, фононные кристаллы обладают такими же особыми частотными характеристиками, как запрещенные частотные зоны. В запрещенной зоне распространение волн через кристалл фактически невозможно. Это явление может быть использовано в широком спектре технологий. Приложения включают в себя упругую или акустическую фокусировку, минимизацию вибрации, звуковую коллимацию, акустическую маскировку, опто-механические преобразования волн в фотонных устройствах, снижение теплопроводности в полупроводниках и др. [2]. Фононные кристаллы могут быть использованы как эффективные звуковые изоляторы для вибрирующих структур, гироскопы или механические резонаторы. Среди фононных кристаллов можно выделить акустические фононные кристаллы с матрицей из жидкости, упругие фононные кристаллы с матрицей сплошного упругого вещества, пьезоэлектрические и магнонные кристаллы [3]. Кроме того, выделяют одномерные фононные кристаллы, в которых упругие свойства изменяются периодически только в одном направлении, а также двух- и трехмерные периодические структуры [4].

Для решения задач распространения волн в многослойных средах, примером которых является фононный кристалл, разрабатываются и развиваются различные численные методы, такие как расширенный метод

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№12–01–33011 мол-вед-а и № 13-01-96520 р_юг_а), а также в рамках проекта ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (14.B37.21.0387)

[2]Фоменко Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: sfom@yandex.ru.

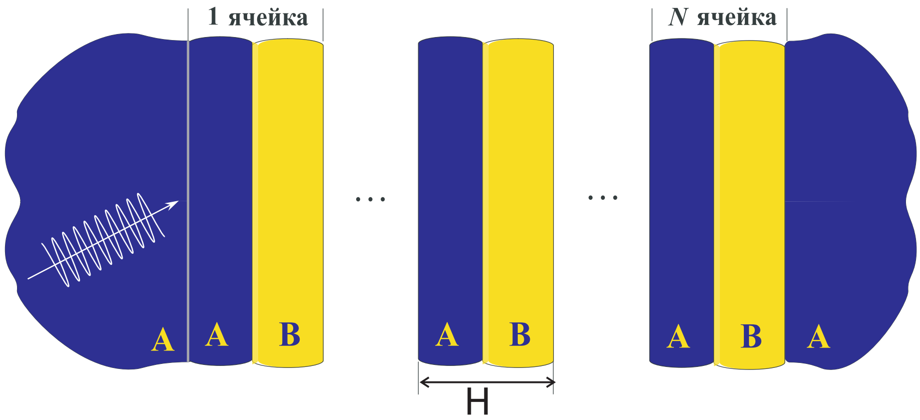

Рис. 1. Постановка задачи

плоских волн [5], метод Т-матриц [6], метод конечных разностей [7], метод граничных интегральных уравнений [8], динамический метод конечных элементов [9] и др.

Наряду с указанными для многослойных сред разработаны методы, основанные на интегральном подходе [10, 11]. Конструкция символа Фурье матрицы Грина и техника поиска полюсов и вычетов в них позволяет вывести асимптотику для волновых полей в дальней зоне [12], что играет ключевую роль в определении динамической реакции материала и в исследовании волновых полей. В отличие от представления классического модального анализа, последний может учитывать не только характеристики материала, но и источника. Асимптотическое представление удобно как для модального, так и для амплитудного анализа. Это становится эффективным инструментом для быстрого параметрического анализа в случае, если имеется достаточно надежный алгоритм для построения матрицы Грина, поиска полюсов и расчета вычетов.

Целью работы является развитие метода моделирования волновых колебаний в периодических слоистых и функционально-градиентных материалах (фононных кристаллов) на основе интегрального подхода и метода Т-матриц, анализ фильтрационных свойств (запрещенных зон) и влияние на них свойств материалов, образующих ячейку кристалла. Она является естественным продолжением работ, начатых в [13].

1. Одномерный фононный кристалл

В фононном кристалле (ФнК), состоящем из N периодически повторяющихся ячеек ($a_{i-1} \leqslant z \leqslant a_i$), расположенных между двумя упругими полупространствами HS_A и HS_B (рис. 1), приходящей из плоскости $z < 0$ волной $\mathbf{u}_{inc}(x, z) \exp(-i\omega t)$ возбуждаются гармонические колебания на частоте ω. Рассматриваются P- и SV-волны.

Каждая ячейка представляет собой набор из двух однородных изотропных слоев толщины h_A и h_B соответственно, толщина ячейки $H = h_A + h_B$. Таким образом, квазипериодическая структура (ФнК) состоит из N ячеек, занимающих последовательно области $a_{k-1} \leqslant z \leqslant a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Весь ФнК расположен в пределах $0 \leqslant z \leqslant NH$.

Вектор перемещений

$$\mathbf{u} = \{u_x, u_z\} = \{u_1, u_2\}$$

может быть представлен через потенциалы продольных φ и поперечных ψ колебаний

$$u_1 = \partial\varphi/\partial z + \partial\psi/\partial x, \quad u_2 = \partial\varphi/\partial x - \partial\psi/\partial z,$$

удовлетворяющие волновым уравнениям

$$\triangle\varphi - \frac{1}{v_P^2}\ddot{\varphi} = 0, \quad \triangle\psi - \frac{1}{v_S^2}\ddot{\psi} = 0. \qquad (1.1)$$

Здесь $v_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $v_S = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорости продольных и поперечных колебаний слоя с плотностью ρ и модулями Ламе λ и μ. Тензор напряжений имеет вид $\sigma_{ij} = \lambda\, u_{k,k}\, \delta_{i,j} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$.

На границах слоев $z = z_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ заданы условия непрерывности перемещений и нормальных к границе напряжений, в качестве условия на бесконечности $(|z| \to \infty)$ принимается принцип предельного поглощения.

2. Математическая модель колебаний фононного кристалла

2.1. Плоские колебания фононного кристалла

С помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}_x$ по координате x с параметром α решение представляется в виде суперпозиции плоских волн, каждая из которых является решением задачи для падающей плоской волны $\mathbf{U}_{inc}(z,\alpha)\exp(i\alpha x - i\omega t)$, где $\mathbf{U}_{inc} = \mathcal{F}_x[\mathbf{u}_{inc}]$ — преобразование Фурье вектора $\mathbf{u}_{inc}$.

Тогда потенциалы для задачи с плоскими колебаниями имеют вид

$$\Phi(z,\alpha)\exp(i\alpha x - i\omega t) \text{ и } \Psi(z,\alpha)\exp(i\alpha x - i\omega t).$$

Здесь Φ и Ψ — комплексные амплитуды потенциалов, являющиеся преобразованиями Фурье потенциалов φ и ψ соответственно, имеют следующее общее представление:

$$\begin{aligned} \Phi &= a_1 e^{iq_L z} + a_3 e^{-iq_L z}, \\ \Psi &= a_2 e^{iq_T z} + a_4 e^{-iq_T z}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $q_L = \varkappa_L \cos\theta_L$ и $q_T = \varkappa_T \cos\theta_T$. В последних соотношениях использованы обозначения: $\varkappa_L = \omega/v_P$, $\varkappa_T = \omega/v_S$ — волновые числа P- и S-волны в рассматриваемой среде, а углы θ_L и θ_T определяются из уравнений

$$\varkappa_L \sin\theta_L = \varkappa_T \sin\theta_T = \alpha.$$

В общем случае $\theta_{L\,k}$ и $\theta_{T\,k}$ — комплексные многолистные функции α. Правильный лист следует выбрать, используя один из принципов излучения. Принцип предельного поглощения приводит к следующим необходимым условиям:

$$\mathrm{Re}[\cos\theta_s] \geqslant 0, \quad \mathrm{Im}[\cos\theta_s] \geqslant 0, \quad s = L, T.$$

2.2. Метод Т-матриц и сингулярные числа Т-матрицы ячейки

Коэффициенты прохождения и отражения для многослойного ФнК определяются из условий непрерывности напряжений и смещений на интерфейсах слоев. Для этой цели может быть использован метод матриц переноса (Т-матриц) [14], где общая матрица переноса всей структуры из N-ячеек находится как степень $\mathbf{T} = \mathbf{T}_c^N$ матрицы переноса одной ячейки $\mathbf{T}_c$. В предположении, что ячейка кристалла состоит из L слоев ее матрица $\mathbf{T}_c = \mathbf{T}_L \cdot \mathbf{T}_{L-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1$ — произведение Т-матриц каждого слоя (нумерация слоев — в направлении падающей волны).

Матрица переноса $\mathbf{T}_k$ произвольного слоя $z_{k-1} < z < z_k$ с номером k выражает линейную зависимость между характеристиками произвольной точки поля и его значениями на границе

$$\mathbf{v}(z) = \mathbf{T}_k(z, z_{k-1})\mathbf{v}(z_{k-1}). \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{v} = \{U_1, U_2, \Sigma_{12}, \Sigma_{22}\}^T$ — обобщенный вектор-столбец, сформированный из преобразований Фурье компонент комплексных амплитуд смещений $\mathbf{u}$ и горизонтальных напряжений $\boldsymbol{\sigma}_z = \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\}$. Матрица $\mathbf{T}_k$ может быть найдена следующим образом:

$$\mathbf{T}_k(z, z_{k-1}) = \mathbf{M}_k\, \mathbf{E}_k(z - z_{k-1})\, \mathbf{M}_k^{-1}.$$

Здесь $\mathbf{M}_k$ — состоящая из 4х вектор-столбцов следующая матрица:

$$\mathbf{M}_k = \left(\mathbf{b}_1^+ \vdots \mathbf{b}_2^+ \vdots \mathbf{b}_1^- \vdots \mathbf{b}_2^-\right), \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1^\pm = \{&i\varkappa_{L\,k}\sin\theta_{L\,k}, \pm i\varkappa_{L\,k}\cos\theta_{L\,k}, \\ &\mp \mu_k \varkappa_{L\,k}^2 \sin 2\theta_{L\,k}, \quad -\mu_k \varkappa_{T\,k}^2 \cos 2\theta_{T\,k}\}^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2^\pm = \{&\pm i\varkappa_{T\,k}\cos\theta_{T\,k}, \; -i\varkappa_{T\,k}\sin\theta_{T\,k}, \\ &-\mu_k \varkappa_{T\,k}^2 \cos 2\theta_{T\,k}, \; \pm\mu_k \varkappa_{T\,k}^2 \sin 2\theta_{T\,k}\}^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

где символ $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ обозначает, как обычно, операцию транспонирования;

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(z) = \mathrm{diag}\{&\exp[i\,q_{Lk}\,z], \exp[i\,q_{Tk}\,z], \\ &\exp[-i\,q_{Lk}\,z], exp[-i\,q_{Tk}\,z]\} \end{aligned}$$

— диагональная матрица перечисленных экспонент.

Используя базис Жордана матрицы перехода ячейки $\mathbf{T}_c$, общая Т-матрица ФнК находится как произведение

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}^{-1}\, \boldsymbol{\Lambda}^N\, \mathbf{G},$$

где $\mathbf{G}$ — матрица перехода $\mathbf{T}_c$ к диагональной матрице Жордана $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2\}$, за исключением очень редких и специфических случаев, когда $\lambda_1 = \lambda_2$ и матрица Жордана может иметь треугольный вид.

Пусть $\{r_L, t_L\}$ и $\{r_T, t_T\}$ — амплитудные коэффициенты отраженных и прошедших P- и SV-волн в полуплоскостях рассматриваемой периодической структуры соответственно. Тогда обобщенные вектор $\mathbf{v}$ в нижней и верхней полуплоскости имеют соответствующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_{inc} + r_L \mathbf{v}^-_{L\,0} + r_T \mathbf{v}^-_{T\,0} = \\ &= \mathbf{M}^- \mathbf{E}^-(z)\mathbf{h}^-, \quad z \leqslant 0, \\ \mathbf{v} &= t_L \mathbf{v}^+_{L\,N} + t_T \mathbf{v}^+_{T\,N} = \\ &= \mathbf{M}^+ \mathbf{E}^+(z)\mathbf{h}^+, \quad z \geqslant NH.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{v}_{inc}$ — обобщенный вектор падающего поля, вектора $\mathbf{h}^- = \{\delta_L, \delta_T, r_L, r_T\}$ и $\mathbf{h}^+ = \{t_L, t_T, 0, 0\}$ составлены из известных амплитудных коэффициентов падающей волны δ_L и δ_T и неизвестных амплитудных коэффициентов отраженной и прошедшей волн; $\mathbf{M}^-$ и $\mathbf{M}^+$ — М-матрицы (2.3) нижней и верхней полуплоскости соответственно.

Выделение сингулярных составляющих в решении, вносимых матрицей $\mathbf{\Lambda}^N$, позволяет получить полуаналитическое представление для коэффициентов прохождения

$$\begin{aligned}\{t_L, t_T\} &= \sum_{i=1}^{4} \mathbf{m}_i \lambda_i^N / \Delta, \\ \Delta &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} \Delta_{ij} \lambda_i^N \lambda_j^N,\end{aligned} \tag{2.5}$$

где собственные значения $\lambda_3 = 1/\lambda_1$ и $\lambda_4 = 1/\lambda_2$, а векторы $\mathbf{m}_i$ и коэффициенты Δ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ выражаются через элементы матриц $\|d_{ij}\| = \mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{G}^{-1}$ и $\|e_{ij}\| = \mathbf{G}\mathbf{M}_+$:

$$\mathbf{m}_i = (d_{2i}\delta_L - d_{1i}\delta_T)\{e_{i2}, -e_{i1}\};$$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} d_{1i} & d_{1j} \\ d_{2i} & d_{2j} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_{i1} & e_{i2} \\ e_{j1} & e_{j2} \end{vmatrix}.$$

Амплитудные коэффициенты отраженных волн

$$\{r_L, r_T\} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=j+1}^{4} \mathbf{s}_{jk}\, \lambda_j^N \lambda_k^N / \Delta \tag{2.6}$$

могут быть выражены через компоненты векторов $\mathbf{s}_{jk} = \{s_{1jk}, s_{2jk}\}$

$$\begin{aligned} s_{ijk} = (e_{j1}e_{k2} - e_{j2}e_{k1}) &\times \\ \times \big[(d_{i+2\ j}\, d_{2k} - d_{i+2\,k}\, d_{2j})\delta_L & \\ - (d_{i+2\ j}\, d_{1k} - d_{i+2\,k}\, d_{1j})\delta_T\big]&, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2;\ j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Описанная схема полностью позволяет определить поле в рассматриваемой слоистой структуре при плоских колебаниях. В общем случае колебания, возбуждаемые падающей гармонической волной $\mathbf{u}_{inc}$, находятся в форме обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, z) &= \mathbf{u}_{inc}(x, z)H(-z) + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\alpha, z)\mathbf{P}_0(\alpha)\, d\alpha.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь $H(z)$ — функция Хевисайда; $\mathbf{G}(\alpha, z)$ — матрица 2×2, составленная из вектор-столбцов $\mathbf{U}_L$ и $\mathbf{U}_T$, являющихся решениями алгоритма (2.2)–(2.6) для $\delta_L = 1$, $\delta_T = 0$ и $\delta_L = 0$, $\delta_T = 1$ соответственно. Вектор $\mathbf{P}_0 = \{\Phi_{inc}(\alpha, 0), \Psi_{inc}(\alpha, 0)\}$ описывает источник колебаний на нижней границе фононного кристалла, где Φ_{inc} и Ψ_{inc} — преобразования Фурье продольных и поперечных потенциалов падающего поля.

2.3. Запрещенные и разрешенные зоны

Возможно наиболее интересным феноменом, возникающим в фононных кристаллах, являются запрещенные зоны. Запрещенные частотные зоны (ЗЧЗ) — это диапазоны частот, в которых распространение волн и волновой энергии через упругую структуру невозможно. Все другие диапазоны, в которых наблюдается прохождение, называются разрешенными зонами (РЧЗ).

Поиск запрещенных зон может быть осуществлен непосредственным численным анализом коэффициента прохождения. Однако существует более простой и точный подход, основанный на полученном полуаналитическом представлении (2.5).

Пусть для простоты описания собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы $\mathbf{T}_c$ выбраны так, чтобы $|\lambda_2| \geqslant |\lambda_1| \geqslant 1$. Тогда из (2.5) при $N \to \infty$ имеем следующую асимптотику:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_t = \{t_L, t_T\} &\sim \\ \sim (\mathbf{m}_1\lambda_2^{-N} + \mathbf{m}_2\lambda_1^{-N})&/(\Delta_{12}\lambda_1^{2N} + \Delta_{23}) \\ &\text{при } N \to \infty,\end{aligned}$$

которая приводит к трем различным ситуациям, когда $|\mathbf{x}_t| \ll 1$, показанным в таблице. В последнем столбце таблицы приводится асимптотика энергетического коэффициента прохождения κ^+.

Представленная классификация запрещенных зон с использованием собственных значений согласуется с методом, описанным

Классификация частотных диапазонов возбуждения фононных кристаллов

Тип зоны	Собственные значения T_c	Дополнительные условия	Поведение κ^+ при $N \to \infty$
ЗЧЗ – I	$\lvert\lambda_2\rvert > 1$ & $\lvert\lambda_1\rvert > 1$	$\mathbf{m}_2 \neq 0$ & $\Delta_{12} \neq 0$	$\kappa^+ = O(\lvert\lambda_1\rvert^{-2N})$
		$\mathbf{m}_2 = 0$ & $\Delta_{12} \neq 0$	$\kappa^+ = O(\lvert\lambda_2\rvert^{-2N})$
ЗЧЗ –II	$\lvert\lambda_2\rvert > 1$ & $\lvert\lambda_1\rvert = 1$	$\mathbf{m}_2 = 0$	$\kappa^+ = O(\lvert\lambda_2\rvert^{-2N})$
РЗМП	$\lvert\lambda_2\rvert > 1$ & $\lvert\lambda_1\rvert = 1$	$0 < w < \varepsilon < 1$ $w = \lvert\mathbf{m}_2/(\Delta_{12} + \Delta_{23}\lambda_1^{-2N})\rvert$	$\kappa^+ = O(\lvert w\rvert^2)$
РЧЗ	$\lvert\lambda_2\rvert > 1$ & $\lvert\lambda_1\rvert = 1$	$w > \varepsilon$	$\kappa^+ = O(1)$
	или $\lvert\lambda_2\rvert = 1$		

в работе [15] и основанном на анализе коэффициентов локализации, которые определяются как наименьшее положительное значение показателя Ляпунова. Но здесь классификация получается естественным путем через анализ явного вида асимптотики поля при $N \to \infty$, кроме того, представленная классификация вводит понятие разрешенной зоны с малым прохождением *РЗМП*, в котором коэффициент прохождения настолько мал, что эти диапазоны можно в приближении рассматривать как запрещенные и использовать в приложениях.

3. Исследование фильтрационных свойств фононных кристаллов

Ниже приводятся результаты анализа влияния относительных толщин слоев ячейки (концентрации материалов), угла падения и типа падающей волны на волновые процессы в рассматриваемой слоистой структуре. В качестве материала A рассматривается оксид алюминия ($\rho = 4000$ кг/м^3, $E = 400$ гпа, $\nu = 0,231$). Материал B — алюминий ($\rho = 2700$ кг/м^3, $E = 70$ гпа, $\nu = 0,33$) является более мягким, чем A.

Для демонстрации изменения запрещенных и разрешенных зон с вариацией толщин слоев A и B при фиксированной толщине ячейки $H = h_A + h_B$ на рис. 2 приводятся диаграммы запрещенных зон: по оси абсцисс изменяется отношение $K = h_A/h_B$ между толщинами, по оси ординат — частота колебаний. Для обозначения различных областей принимаются следующие соглашения: незакрашенные области соответствуют разрешенным зонам, области с градиентной заливкой обозначают запрещенные зоны I типа (ЗЧД-I), заштрихованные области с градиентной заливкой — зоны II типа (ЗЧД-II), тогда как РДМП обозначаются только штриховкой. Насыщенность цвета для зон I или II типов приводится в соответствии со значением коэффициента локализации γ, где $\gamma = \lg \lambda_1$ в случае ЗЧД-I или $\gamma = \lg \lambda_2$ в случае ЗЧД-II. Колебания в рассматриваемой структуре возбуждаются падающей под различными углами ($\theta = 0°$, $\theta = 10°$, $\theta = 60°$ и $\theta = 80°$) плоской P-волны (рис. 2а–2г соответственно). С отклонением угла падения P-волны от вертикального ($\theta = 0°$) запрещенные зоны II типа исчезают, трансформируются в разрешенные частотные зоны малого прохождения (РЗМП). С увеличением угла падения P-волны максимум коэффициента локализации среди всех запрещенных зон уменьшается, однако, при этом РЗМП, напротив, расширяются.

Местоположение, форма и ширина запрещенных зон и РДМП сильно изменяются внутри диапазона $10^{-1} < K < 10$. С увеличением частоты колебаний увеличивается и частота возникновения различных зон, которые с увеличением концентрации одного из материалов становятся более узкими. При $K \to 0$ или $K \to \infty$ коэффициент локализации в зонах стремится к нулю, так как среда становится однородной. С увеличением концентрации жесткого материала (A) запрещенные зоны смещаются в более высокие частотные диапазоны. Стоит отметить, что для всех приведенных углов падения при достаточно большой концентрации жесткого материала А ($K > 10$) запрещенные зоны являются более широкими, чем при большей концентрации мягкого материала ($K < 10^{-1}$).

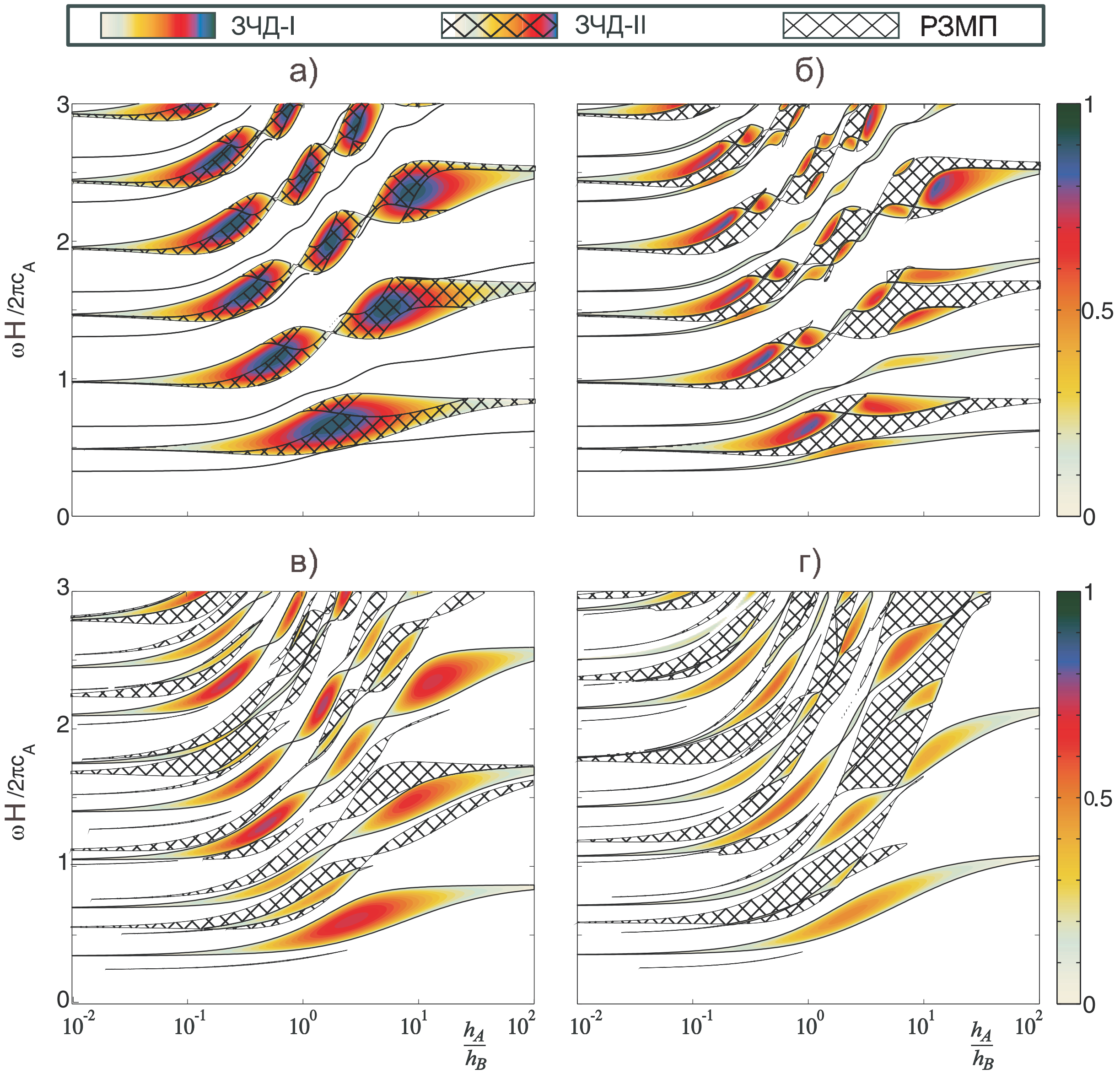

Рис. 2. Зависимость запрещенных зон от отношения толщин слоев ячейки фононного кристалла

Присутствие мягкого материала B даже в малых концентрациях ($h_A = 100h_B$) приводит к появлению широких низкочастотных запрещенных зон в квазипериодической упругой структуре.

Литература

1. *Kushwaha M. S., Halevi P., Dobrzynski L., Djafari-Rouhani B.* Acoustic band structure of periodic elastic composites // Physics Review Letters, 1993. Vol. 71. P. 2022–2025.
2. *Bilal O. R., Hussein M. I.* Ultrawide phononic band gap for combined in-plane and out-of-plane waves // Physical Review E, 2011. Vol. 84. P. 065701.
3. *Matar O. B., Robillard J. F., Vasseur J. O. et al.* Band gap tunability of magneto-elastic phononic crystal // Journal of Applied Physics, 2012. Vol. 111. No. 5. P. 054901.
4. *Swinteck N., Bringuier S., Robillard J.-F. et al.* Phase-control in two-dimensional phononic crystals // Journal of Applied Physics, 2011. Vol. 110. No. 7. P. 074507.
5. *Goffaux C., Vigneron J. P.* Theoretical study of a tunable phononic band gap system // Physical Review B, 2001. Vol. 64. P. 075118.
6. *Yeh J. Y., Chen L. W.* Wave propagations of a periodic sandwich beam by FEM and the transfer matrix method // Composite Structures, 2006. Vol. 73. P. 53–60.
7. *Cao Y. J., Hou Z. L., Liu Y. Y.* Finite difference time domain method for band gap calculations

of two-dimensional phononic crystals // Solid State Communications, 2004. Vol. 132. P. 539–543.

8. *Golub M. V., Zhang Ch., Wang Y.-S.* SH-wave propagation and resonance phenomena in a periodically layered composite structure with a crack // Journal of Sound and Vibration, 2011. Vol. 330. No. 13. P. 3141–3154.
9. *Liu Y., Gao L. T.* Explicit dynamic finite element method for band-structure calculations of 2D phononic crystals // Solid State Communications, 2007. Vol. 144. P. 89–93.
10. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
11. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Михаськив В. В.* Метод слоистых элементов в динамической теории упругости // Прикладная математика и механика, 2009. Т. 73. №4. С. 622–634.
12. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Фоменко С. И., Жанг Ч.* Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акустический журнал, 2012. Т. 58. №2. С. 370–385.
13. *Golub M. V., Fomenko S. I., Bui T. Q. et al.* Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates // International Journal of Solids and Structures, 2012. Vol. 49. No. 2. P. 344–354.
14. *Aki K., Richards P. G.* Quantitative Seismology. University Science Books, 2002. P. 704.
15. *Castanier M. P., Pierre C.* Lyapunov exponents and localization phenomena in multi-coupled nearly periodic systems // Journal of Sound and Vibration, 1995. Vol. 183. No. 3. P. 493–515.

Ключевые слова: упругие колебания, фононный кристалл, метод T-матриц, запрещенная зона, разрешенная зона малого прохождения.

Статья поступила 30 сентября 2013 г.

Институт математики, механики и информатики Кубанского государственного университета, г. Краснодар