

УДК 521.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ: МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ

Кузнецов В. Б.¹

THE DETERMINATION OF PRELIMINARY CIRCLE ORBIT: MAXIMUM NUMBER OF SOLUTIONS

Kuznetsov V. B.

The methods for circular orbits of Laplace, Gauss and geometrical Kuryshev&Perov are considered. The 3D-distribution of maximum number of solutions for any circular orbits for each point of space was obtained. This distribution was projected on observer's sphere. In this way, we can a priory evaluate the maximum number of solutions.

Keywords: circle orbit, method of Laplace, method of Gauss.

Введение

История определения круговой орбиты по минимальному числу наблюдений насчитывает около двух веков. Наиболее известен метод определения орбиты по двум наблюдениям, разделённым заметным интервалом времени, носящий имя Гаусса [1–3]. Менее известен дифференциальный метод, когда два наблюдения сделаны на небольшом промежутке времени. Этот метод именуется методом Лапласа, хотя сам Лаплас его вряд ли использовал. Одним из первых его описал Вильев [4], он же попытался исследовать распределение числа решений. В середине 20-го века, данный метод был исследован Поповичем [5]. В последние годы он использовался для определения орбит ИСЗ [6, 7]. Сравнительно новым является геометрический метод определения круговой орбиты по трём наблюдениям, предложенный Курышевым и Перовым [8]. В нём используются только геометрические соотношения, и он не зависит от интервалов времени между наблюдениями. Перечисленные выше методы основываются на нелинейных (а в случае метода Гаусса и трансцендентных) уравнениях и вопрос о числе возможных решений является для них актуальным. Первая попытка сравнения методов Лапласа и Гаусса по числу решений была сделана автором в работе [9]. Определение максимального числа возможных ре-

шений, а также их трёхмерное распределение относительно наблюдателя является целью данной работы.

1. Метод Лапласа

1.1. Базовые уравнения задачи

Этот метод в настоящее время следует признать наиболее эффективным. Это связано с тем, что в силу своей дифференциальной природы он позволяет определить круговую орбиту по двум наблюдениям, разделённым предельно малым (несколько минут) интервалом времени. Метод описывается следующими уравнениями [4], относительно двух неизвестных $\{\rho, \dot{\rho}\}$:

$$\begin{cases} \dot{\rho}[\rho - \mathbf{eR}] + \rho[\dot{\mathbf{e}}\mathbf{R} - \mathbf{e}\dot{\mathbf{R}}] = 0, \\ \dot{\rho}^2 \rho^2 - 2(\dot{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{R}})\rho + \dot{\rho}^2 - 2(\mathbf{e}\dot{\mathbf{R}})\dot{\rho} + k^2 = \\ = \frac{k^2}{\sqrt{\rho^2 - 2(\mathbf{eR})\rho + 1}}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где ρ — расстояние между наблюдателем и объектом, \mathbf{e} — единичный вектор, направленный по лучу зрения наблюдателя, \mathbf{R} — вектор положения центра притяжения (Солнца) относительно наблюдателя, $k = 0,01720209895$ — постоянная Гаусса [1], точками обозначены производные по времени. Для упрощения дальнейшего анализа

¹Кузнецов Владимир Борисович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории малых тел солнечной системы Института прикладной астрономии РАН; e-mail: v.kuznetsov@ipa.nw.ru.

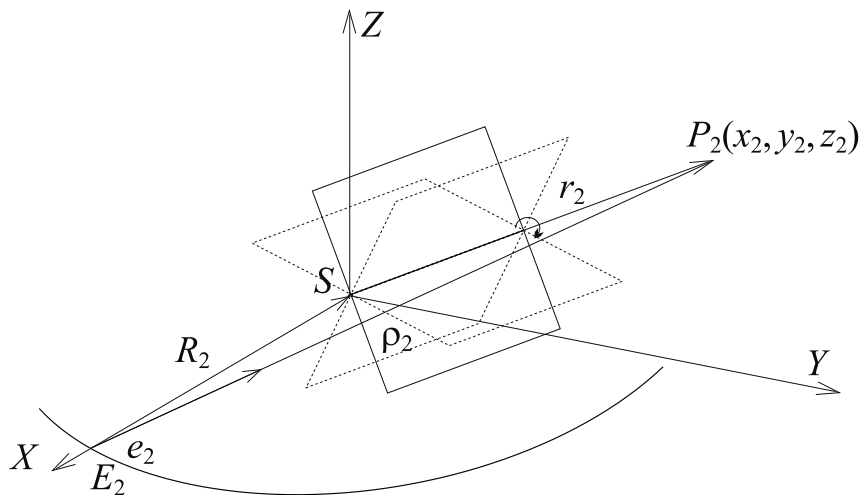


Рис. 1. Перебор всех возможных плоскостей проходящих через точки S и P_2

примем, что орбита Земли круговая и ее радиус равен единице, т. е. $\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}} = 0$ и $R^2 = 1$, $\dot{R}^2 = k^2$.

В качестве опорного наблюдения можно принять второе, тогда $\mathbf{e} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2$.

Систему (1.1) можно привести к уравнению 10-ой степени относительно ρ и если в ней выделить «тривиальный» корень соответствующий положению наблюдателя $\rho = 0$, то мы получим, как было показано Вильевым [4], полином 9-ой степени. Следовательно, *максимальное количество нетривиальных корней не может превосходить 9.*

1.2. Определение максимального числа возможных решений в каждой точке пространства

Аналитическое исследование системы (1.1) в общем случае довольно затруднительно, если вообще возможно. Поэтому обратимся к численному исследованию числа возможных решений данной системы.

Во-первых, зададим следующую эллиптическую прямоугольную систему координат XYZ , при этом ось X направлена на наблюдателя в момент t_2 , оси Y и Z дополняют систему до правой. Во-вторых, как было упомянуто раньше, орбита Земли является окружностью, и наблюдатель в момент второго наблюдения находится в точке с координатами $(1;0;0)$. В момент первого наблюдения t_1 наблюдатель находится в соответствующей точке орбиты Земли сдвинутой по окружности по часовой стрелке от $(1;0;0)$. В-третьих, будем исследовать число решений для круговых орбит, проходящих в момент

t_2 через точку $(x_2; y_2; z_2)$. Проведём через эту точку и начало координат прямую. Всевозможные плоскости круговых орбит, проходящих через точку $(x_2; y_2; z_2)$ содержат эту прямую. Зафиксировав какое-либо из положений плоскости орбиты, мы, зная интервал времени между наблюдениями можем вычислить положение точки в момент $t_1(x_1; y_1; z_1)$. Зная прямоугольные координаты объекта и наблюдателя в моменты t_1 и t_2 , легко можно определить единичные вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$, после чего найти их производные и соответствующие коэффициенты системы (1.1). Решение (1.1) даст число решений для данной плоскости орбиты проходящей через данную точку $(x_2; y_2; z_2)$. Если произвести вращение плоскости орбиты вокруг прямой (S, P_2) с постоянным шагом, то совершив полный оборот вокруг прямой, мы можем определить максимальное значение числа корней по всем плоскостям (рис. 1). Это максимальное число и примем в качестве значения для точки $(x_2; y_2; z_2)$. Таким образом, переходя от точки к точке, мы получим трёхмерное распределение максимального числа возможных решений для данного объёма пространства.

Для численного эксперимента были взяты следующие параметры:

- интервал времени между наблюдениями $\Delta t_{21} = t_2 - t_1 = 0,0001$ сут.;
- поиск решений осуществлялся в кубе, с центром в Солнце, со сторонами 10 а. е. параллельным осям координат;
- решения искались в точках с шагом 0,1 а. е.;
- плоскость орбиты тела поворачивалась с шагом 1° ;

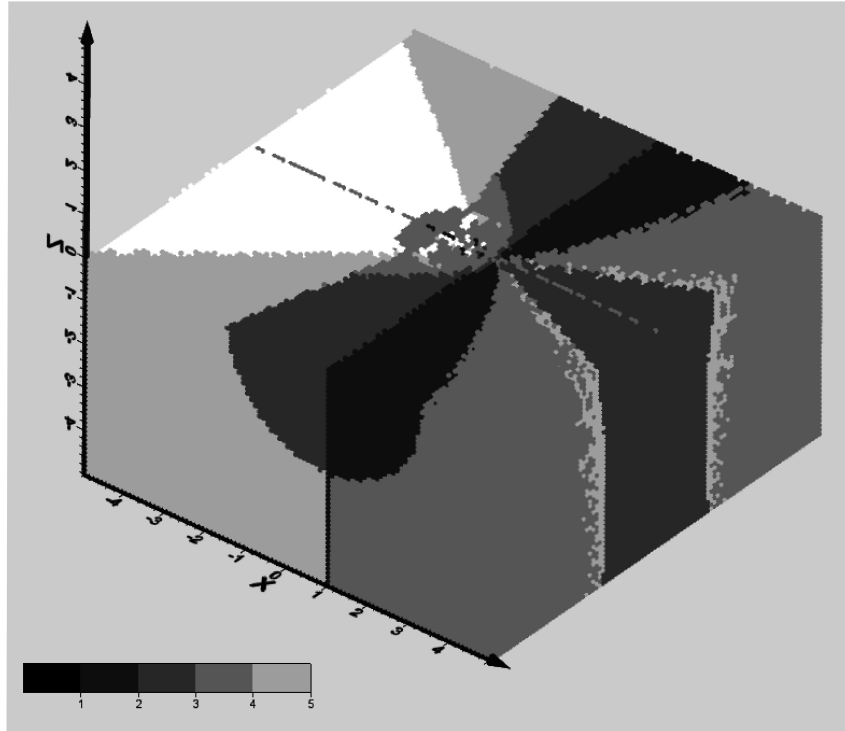


Рис. 2. Метод Лапласа: трёхмерное распределение максимального числа возможных решений

— в расчёт принимались все решения за пределами сферы 0,01 а. е. вокруг наблюдателя, что соответствует гелиоцентрическому движению объекта без учёта влияния Земли.

Поиск корней (1.1) производился с помощью метода продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией [10].

Результаты численного исследования представлены на рис. 2. На нём видно, что исследуемое пространство можно разделить на области с максимальным числом решений от одного до пяти. Полученное трёхмерное распределение можно спроецировать на единичную сферу с наблюдателем в центре. Это позволит оценить максимальное число возможных решений для каждой точки небесной сферы.

На рис. 3 представлена проекция Меркатора для эклиптической системы координат.

2. Метод Гаусса

Метод Гаусса, как об этом уже говорилось в начале статьи, является самым известным методом определения круговых орбит. Здесь, как и в методе Лапласа у нас есть два наблюдения в моменты времени t_1 и t_2 . Базовая си-

стема уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} r_1^2 = \rho_1^2 - 2(\mathbf{e}_1 \mathbf{R}_1) \rho_1 + R_1^2 = a^2, \\ r_2^2 = \rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2) \rho_2 + R_2^2 = a^2, \\ r_1^2 \cos\left(\frac{\tau}{r_1^{3/2}}\right) - (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \rho_1 \rho_2 + \\ + (\mathbf{e}_1 \mathbf{R}_2) \rho_1 + (\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_1) \rho_2 - \\ - (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\tau = k(t_2 - t_1)$.

Если первое уравнение (2.1) подставить в третье и используя первые два уравнения выразить ρ_2 через ρ_1 и также подставить в третье, то мы получим трансцендентное уравнение от одной переменной ρ_1 . Все дальнейшие утверждения, необходимые для исследования максимального числа решений, соответствуют указанным в п. 1.2 с разницей лишь в выборе опорного наблюдения не в момент t_2 , а t_1 . В нашем исследовании были рассмотрены 7 интервалов времени Δt_{21} между наблюдениями: 1, 2, 5, 10, 25, 50 и 100 суток. Как легко предположить, наибольшее количество возможных решений находится для 100-суточного интервала, а именно 322. В качестве иллюстрации приведём распределение решений на единичной сфере для $\Delta t_{21} = 50$ сут. (рис. 4).

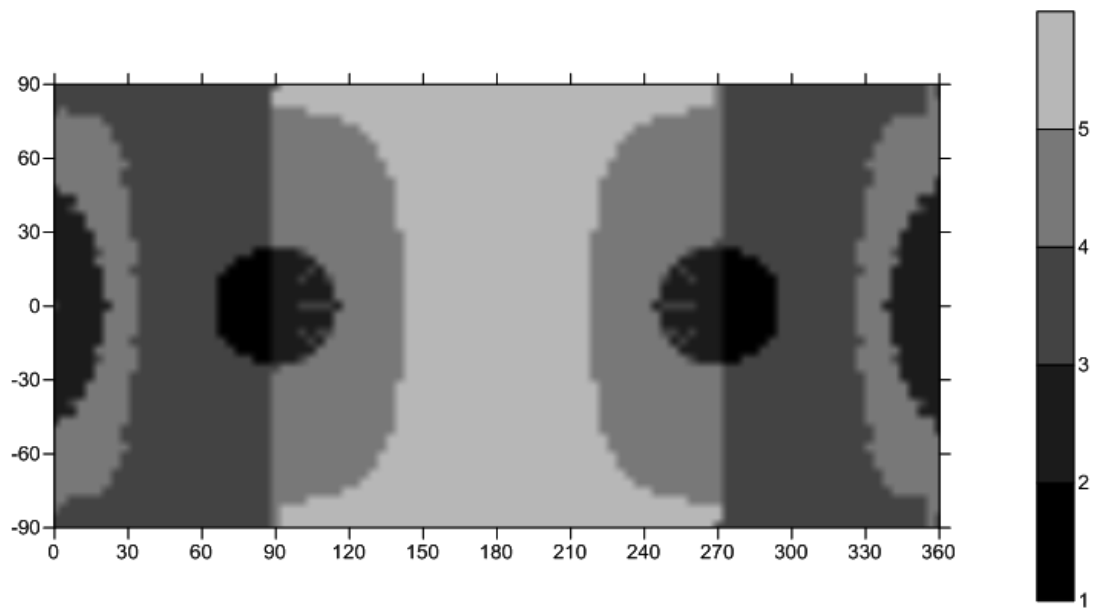


Рис. 3. Метод Лапласа: распределение максимального числа возможных решений на единичной сфере

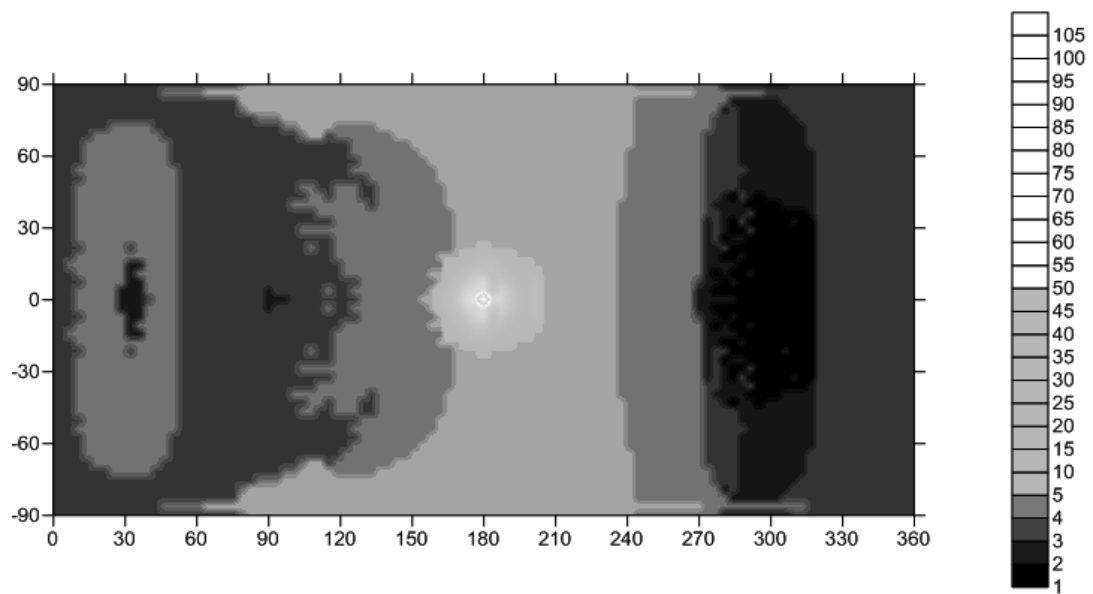


Рис. 4. Метод Гаусса: распределение максимального числа возможных решений на единичной сфере для $\Delta t_{21} = 50$ сут.

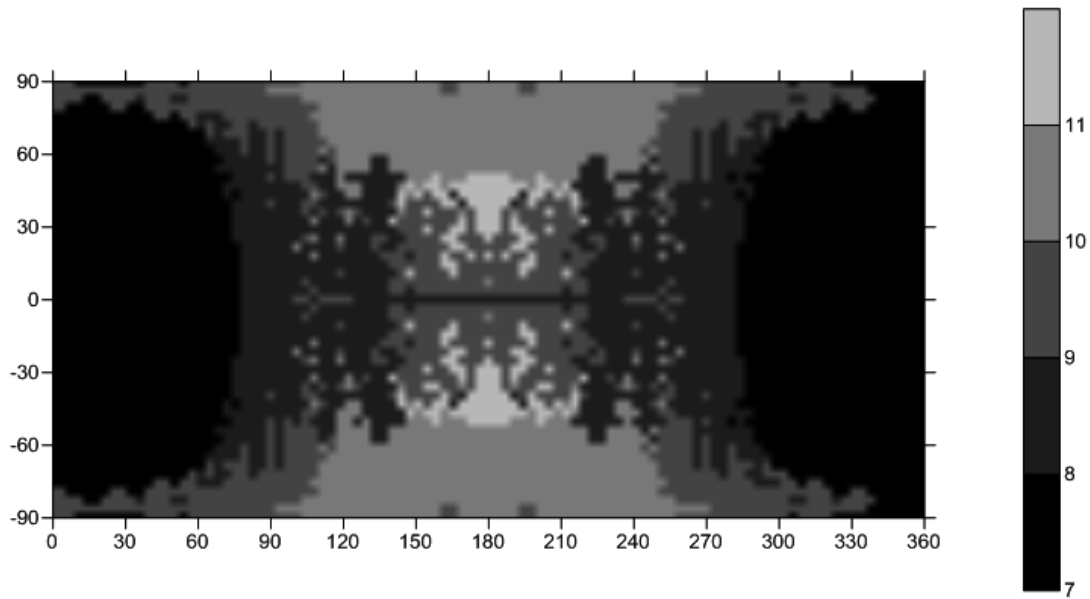


Рис. 5. Геометрический метод: распределение максимального числа возможных решений на единичной сфере для $\Delta t_{21} = \Delta t_{32} = 25$ сут.

3. Геометрический метод

В качестве третьего метода был рассмотрен геометрический метод Курышева–Перова [8]. Этот метод появился сравнительно недавно и ещё не вошёл в монографии и учебники. Основное его отличие состоит в том, что он основывается только на геометрических соотношениях и не включает в себя интервалы времени между наблюдениями, то есть он подходит для случаев, когда интервалы времени между наблюдениями неизвестны или известны с большими ошибками. Здесь следует отметить, что один из моментов времени должен быть известен точно, иначе будет невозможно привязать орбиту к соответствующей эпохе. Отказ от использования времени заставляет нас увеличить число наблюдений с двух до трёх.

Метод базируется на условии компланарности орбиты:

$$\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = 0. \quad (3.1)$$

Смешанное произведение трёх радиус-векторов орбиты и составляет основное геометрическое соотношение для круговой орбиты. Здесь стоит отметить одно из ограничений метода: искомая орбита не должна лежать в плоскости эклиптики. Если выразить, как и в методе Гаусса, ρ_1 и ρ_3 через ρ_2 , и под-

ставить их в (3.1), то после ряда преобразований мы получим полином 12-ой степени относительно ρ_2 . С учётом корня $\rho_2 = 0$, максимальное количество нетривиальных корней не может превосходить 11.

Численное исследование системы (3.1) на максимальное число корней производилось согласно условиям, описанным в п. 1.2, в качестве интервалов времени между наблюдениями во всех случаях принималось $\Delta t_{21} = \Delta t_{32}$: 1, 2, 5, 10, 25, 50 и 100 сут.

Исследования показали, что встречаются всевозможные варианты максимального числа решений от 1 до 11, при этом при проекции на единичную сферу минимальным является значение 4. В качестве примера приведём распределение решений на единичной сфере для $\Delta t_{21} = \Delta t_{32} = 25$ сут. (рис. 5).

Заключение

Численное исследование метода Лапласа показывает, что для него возможно наличие до пяти решений. Геометрический метод может иметь до одиннадцати решений. Полученные в работе проекции трёхмерного распределения максимального числа возможных решений на поверхность единичной сферы вокруг наблюдателя позволяют апри-

орно оценить этот параметр при определении предварительной круговой орбиты.

Автор выражает признательность зав. лаборатории информационных и вычислительных систем ИПА РАН канд. техн. наук А. И. Сальникову и зав. отделом научно-технической информации ФТИ им. А. Ф. Иоффе А. В. Вылегжанину за помощь в проведении вычислений в СПб Филиале Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН (scc.ioffe.ru).

Литература

1. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
2. Дубошин Г. Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
3. Herget P. The computation of the orbits. Published privately by the author, 1948. 176 p.
4. Вильев М. А. Исследования по вопросу о числе решений основной задачи теоретической астрономии в связи с общим её положением в настоящее время // Труды АО ЛГУ, 1938. С. 79–246.
5. Popvic B. Esploradoj pri utilige blecode circlaj orbit ojde planetetoj // Bull. Obs. Astr. Beograd 22. 1959. No. 1–2. P. 19–30.
6. Gronichi G. F., Farnocchia D., Dimare L. Orbit determination with two-body integrals II // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2011. Vol. 110. P. 257–270.
7. Fujimoto K., Maruskin J. M., Scheeres D. J. Circular and zero-inclination solutions for optical observations of Earth-orbiting objects // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2010. Vol. 106. P. 157–182.
8. Курьшиев В. И., Перов Н. И. О нетрадиционном способе определения элементов орбит космических объектов по данным обработки обзорных фотоснимков на ЭВМ // Астрономический журнал. 1982. Т. 59. Вып. 6. С. 1212–1217.
9. Кузнецов В. Б. Определение круговой орбиты: сравнение методов Гаусса и Лапласа // Материалы конференции: Всерос. конф. «Астероидно-кометная опасность – 2005» (АКО-2005), СПб., 3–7 октября 2005 г. 2005. С. 204–205.
10. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.

Ключевые слова: круговая орбита, метод Лапласа, метод Гаусса.

Статья поступила 5 октября 2013 г.

Институт прикладной астрономии, г. Санкт-Петербург

© Кузнецов В. Б., 2013