

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОНИТОРИНГА ЗАГРЯЗНЕНИЯ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ ГРУНТА И РАБОТА ВОДОЗАБОРА БЕЗ ЗАГРЯЗНЕНИЯ

А.А. Квасов¹, В.Ф. Пивень²

MATHEMATICAL MODELING OF POLLUTION MONITORING IN NON-HOMOGENEOUS
LAYERS OF SOIL AND OPERATION OF A WATER INTAKE WITHOUT POLLUTION

Kvasov A. A., Piven V. F.

The new two-dimensional problem about the evolution of a plume washed out of the complex pollution focus in a non-homogeneous layer has been stated. The problem has been solved in finite form for the case of conic-shaped focuses. When focuses boundaries are modeled by the curves of the Lyapunov class, the study of the problem is reduced to the solution of the inhomogeneous Fredholm integral equation of the second type. The conditions have been specified, when the water intake is not polluted even when operating in the presence of pollution focuses in the layer.

1. Физическая постановка задачи

Важнейшая роль подземных вод в жизни человечества определяет необходимость их надёжной охраны. Если профилактические мероприятия по предупреждению загрязнения подземных вод не проводились или оказались неэффективными, то в области фильтрации появляются очаги загрязнения. Источники загрязнения, из которых в подземные воды поступают загрязняющие вещества, могут быть весьма разнообразны. Это хранилища промстоков, участки складирования нефтепродуктов или газовой продукции, сырья химической промышленности и многие другие участки скопления жидких и твёрдых отходов. Источниками вредных веществ могут быть также загрязнённые реки, районы техногенных катастроф и чрезвычайных происшествий. Потребление же подземных вод выдвигает важную проблему изучения условий, обеспечивающих их чистоту. Прогноз процесса загрязнения, выявление областей (очагов) загрязнения, изучение условий работы водозаборов без загрязнения и другие направле-

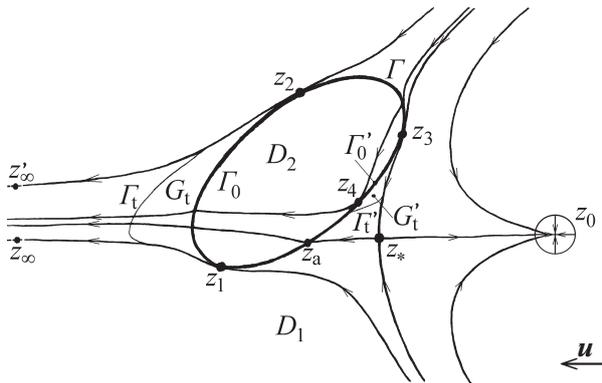
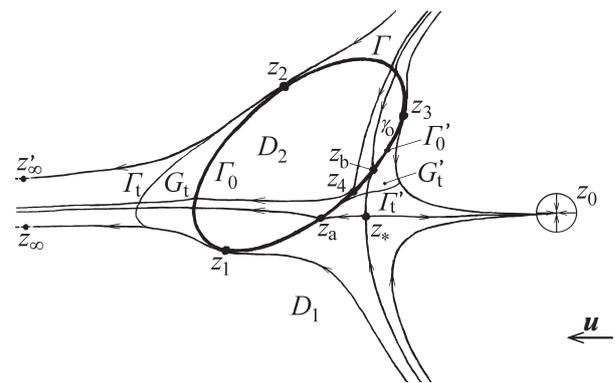
ния исследований относятся к числу основных гидрогеологических задач [1–3].

Поставим задачу об определении шлейфа вымываемого загрязнения в сложном по геологической структуре фильтрационном слое. Считаем, что фильтрация двумерная, установившаяся и происходит в неоднородном изотропном недеформируемом слое; течение описывается линейным законом Дарси; жидкость несжимаема, обладает одинаковой во всей области фильтрации вязкостью; проводимость слоя $P = KH > 0$ (K — коэффициент проницаемости слоя, H — его толщина) с течением времени не изменяется. Подошвой слоя является горизонтальная плоскость, в которой выбрана прямоугольная система координат xOy . Течение рассматривается в комплексной плоскости $z = x + iy$. Проводимость P моделируется непрерывно дифференцируемой функцией вещественных координат x, y или комплексно сопряжённых координат z, \bar{z} . Для краткости записи вместо функций $f(z, \bar{z})$ условимся писать $f(z)$, тогда $P = P(z)$.

Пусть область фильтрации D состоит из чистой области D_1 и очага загрязнения, за-

¹Квасов Андрей Александрович, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры теоретической физики Орловского государственного университета.

²Пивень Владимир Федотович, профессор, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теоретической физики Орловского государственного университета.

Рис. 1. Течение при дебите $q = q_*$ Рис. 2. Течение при $q > q_*$ и $z_* \in D_1$

нимающего область D_2 . Области D_1 и D_2 сопрягаются по кривой Γ . Пусть фильтрационное течение обусловлено поступательным потоком и работой водозабора. Водозабор представляет собой совершенную скважину суммарного дебита Π . Работу водозабора моделируем точечным стоком мощности $q = \Pi/P(z_0)$, расположенным в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ ($z_0 \in D_1$) забоя водозабора. В рамках модели «разноцветных» жидкостей считаем, что жидкость, протекая через область D_2 , загрязняется и, попадая в D_1 , образует шлейф вымываемого загрязнения.

Если дебит водозабора $q \leq q_*$ (q_* зависит от проводимости слоя, размера и формы очага загрязнения, расположения водозабора относительно загрязнённой области D_2), то нейтральная линия [4] (линия, ограничивающая область захвата водозабора и проходящая через критическую точку течения z_* , не пересекает очага загрязнения. Она может лишь касаться области D_2 при $q = q_*$) (рис. 1). Вымываемый шлейф загрязнения G_t имеет стационарные границы (Γ_0 и две линии тока z_1z_∞ , $z_2z'_\infty$) и нестационарную границу (Γ_t). Возможна ситуация, когда при $q \leq q_*$ образуются два шлейфа G_t и G'_t . При этом последний в водозабор не попадает (рис. 1), а при неограниченном возрастании времени — локализован (заключён между частью границы загрязнения Γ'_0 и нейтральной линией тока $z_3z_*z_a$).

Таким образом, при $q \leq q_*$ шлейф вымываемого загрязнения не попадает в водозабор, и он будет работать без загрязнения. Величину q_* называют допустимым дебитом скважины, работающей без загрязнения [4], или критическим дебитом.

При $q > q_*$ нейтральная линия тока пересекает область загрязнения D_2 . Шлейф G_t , подобно схеме, представленной на рис. 1, при неограниченном возрастании времени уходит в бесконечность и имеет стационарные границы (линии тока z_1z_∞ , $z_2z'_\infty$ и часть границы загрязнения Γ_0 , заключённую между точками z_1 и z_2). Вторая часть шлейфа вымываемого загрязнения G'_t в случае, когда критическая точка $z_* \in D_1$ (рис. 2), имеет стационарные границы (Γ'_0 часть границы загрязнения Γ , заключённую между точками z_3 и z_a , одну из ветвей нейтральной линии тока $z_az_*z_0$ и линию тока z_3z_0). Если критическая точка $z_* \in D_2$, то шлейф G'_t имеет стационарные границы: Γ'_0 (часть границы загрязнения Γ , заключённая между точками z_3 и z_4) и линии тока z_3z_0 , z_4z_0 . Характерно, что при $q > q_*$ (рис. 2) шлейф G'_t подтягивается к водозабору и в определённый момент времени попадает в него. Следовательно, водозабор, работающий в условиях поступательного потока грунтовых вод с дебитом $q > q_*$, загрязняется. В этом случае важно оценить степень загрязнения вод в водозаборе [4]. Для этого необходимо указать ту часть границы загрязнения Γ , откуда вымываемое загрязнение попадает в водозабор. Так, на рис. 2 этой границей является граница γ_0 (часть Γ'_0 , заключённая между точками z_3 , z_b).

Таким образом, задача состоит в следующем: при заданных проводимости слоя, дебите и положении эксплуатационной скважины, скорости поступательного потока, очаге загрязнения необходимо найти шлейф вымываемого загрязнения в каждый момент времени.

Решение этой задачи позволит также найти условия, при которых водозабор не загрязняется (указать расположение водозабора в области фильтрации и его критический дебит), а в случае загрязнения водозабора — определить относительное загрязнение вод в водозаборе (коэффициент загрязнения водозабора).

2. Математическая постановка задачи

Для описания фильтрационного течения введём комплексный потенциал

$$W(z) = \varphi(z) + i \frac{\psi(z)}{P(z)}, \quad (2.1)$$

который удовлетворяет уравнению [5]

$$\frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} + A(z) [W(z) - \bar{W}(z)] = 0, \quad z \in D, D = D_1 \cup D_2, \quad (2.2)$$

следующему из закона Дарси и уравнения неразрывности.

Здесь $A(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln \sqrt{P(z)}$, $2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$.

Грунт в областях D_1 и D_2 характеризуется непрерывными коэффициентами проницаемости K_1 и K_2 . Считаем, что скачок проницаемости на границе сопряжения Γ имеет вид

$$K_\nu(z) = k_\nu K(z) \quad (\nu = 1, 2; \quad k_1, k_2 = const).$$

Полагаем, что толщина слоя H непрерывна во всей области фильтрации D , тогда проводимость слоя в областях D_1 и D_2 характеризуется функциями $P_\nu(z) = k_\nu P(z)$, $\nu = 1, 2$. Течение в областях D_1 и D_2 опишем комплексными потенциалами

$$W_\nu(z) = k_\nu \varphi_\nu(z) + i \frac{\psi_\nu(z)}{P(z)}, \quad (2.3) \quad z \in D_\nu, \nu = 1, 2.$$

Границу сопряжения Γ моделируем кривой класса Ляпунова. Пусть она задана параметрическим уравнением

$$z = z(l) \quad (x = x(l), y = y(l)), \quad (2.4) \quad \text{где } l \text{ — параметр.}$$

Комплексные потенциалы (2.3) в областях D_ν ($\nu = 1, 2$) удовлетворяют уравнению (2.2),

а на границе сопряжения Γ — условиям непрерывности давления и расхода жидкости, которые в комплексной форме принимают вид [6]

$$(1 - \lambda)W_1^+(z) = W_2^-(z) + \lambda \bar{W}_2^-(z), \quad (2.5) \quad z \in \Gamma,$$

где $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$. Здесь $\lambda \in [-1, 1)$, знаками «+» и «-» обозначены предельные значения соответствующих функций при подходе к Γ из области D_1 и D_2 соответственно.

Определение комплексных потенциалов $W_1(z)$ и $W_2(z)$ является задачей сопряжения [4].

Область фильтрации может быть ограничена сингулярной линией L_0 , на которой проводимость $P(z)$ обращается в ноль либо в бесконечность, и линией сброса (либо эквипотенциалью) L .

Граничные условия на L_0 и L

$$P(z) \frac{\partial \varphi_\nu(z)}{\partial n} = 0, \quad (2.6) \quad \text{либо } \varphi_\nu(z) = const, \quad \nu = 1 \text{ и (или) } 2, z \in L_0;$$

$$\frac{\partial \varphi_\nu(z)}{\partial n} = 0, \quad (2.7) \quad \text{либо } \varphi_\nu(z) = const, \quad \nu = 1 \text{ и (или) } 2, z \in L.$$

Пусть в отсутствии границ L и Γ ($k_1 = k_2 = 1$) течение описывается комплексным потенциалом $W_0(z)$ вида (2.1). Полагая, что его действительная часть $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию (2.6), $W_0(z)$ представим в виде

$$W_0(z) = G^*(z) + qF^*(z, z_0), \quad (2.8)$$

где функция $G^*(z)$ описывает поступательный поток со скоростью u , $F^*(z, z_0)$ — функция, описывающая течение к стоку единичной мощности, расположенному в точке z_0 , и имеющая в этой точке особенность логарифмического типа.

При наличии в области фильтрации границы смены неоднородностей Γ и границы L течение возмущается. Учитывая течение, описываемое комплексным потенциалом (2.8), комплексные потенциалы (2.3) представим в виде [6]

$$W_\nu(z) = W_0(z) + W_*(z), \quad \nu = 1, 2, \quad (2.9)$$

где $W_*(z) = \varphi_*(z) + i\psi_*(z)/P(z)$ — комплексный потенциал возмущений, вызванных наличием границ Γ и L ($\varphi_*(z)$ и $\psi_*(z)$ — квазипотенциал и функция тока возмущений).

Сформулируем задачу сопряжения (2.2), (2.5)–(2.7) для комплексного потенциала возмущения $W_*(z)$. С учётом (2.9) условия (2.5)–(2.7) принимают вид

$$(1 - \lambda)W_*^+(z) = W_*^-(z) + \lambda\overline{W_*^-(z)} + \lambda [W_0(z) + \overline{W_0(z)}], z \in \Gamma, \quad (2.10)$$

$$P(z)\frac{\partial\varphi_*(z)}{\partial n} = 0, \quad (2.11)$$

либо $\varphi_*(z) = 0, z \in L_0,$

$$\frac{\partial\varphi_*(z)}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi_0(z)}{\partial n}, \quad (2.12)$$

либо $\varphi_*(z) = \text{const} - \varphi_0(z), z \in L.$

Согласно [7], для единственности решения задачи сопряжения (2.2), (2.5)–(2.7) имеем условие в бесконечности

$$\begin{aligned} \varphi_*(z) &= O(|z|^{-1}), \\ K(z)|\nabla\varphi_*(z)| &= O(|z|^{-2}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

при $|z - \zeta| \rightarrow \infty (\zeta \in \Gamma \cup L).$

Таким образом, задача сопряжения для потенциала возмущений $W_*(z)$ состоит в следующем: заданы проводимость слоя $P(z)$, комплексный потенциал (2.8), очаг загрязнения (параметр λ и уравнение границы Γ (2.4)), необходимо найти комплексный потенциал возмущений $W_*(z)$, удовлетворяющий уравнению (2.2) и условиям (2.10)–(2.13), в классе обобщённо-аналитических функций.

Решив задачу сопряжения (2.2), (2.10)–(2.13), получим комплексный потенциал $W_*(z)$, а согласно формуле (2.9) — комплексные потенциалы $W_\nu(z)$, описывающие течение в областях $D_\nu (\nu = 1, 2)$. Это позволяет найти и исследовать шлейфы G_t, G'_t вымываемого из области D_2 загрязнения.

Для определения шлейфов вымываемых загрязнений укажем их границы. Для этого найдём такие линии тока, которые имеют с Γ только одну общую точку $z_m = x_m + iy_m, m = 1, 2, 3, \dots$. Для исследования шлейфа вымываемого загрязнения выясним взаимное расположение области захвата водозабора и очага загрязнения, для чего отыщем координату $z_* = x_* + iy_*$ критической точки. Так как

в точках $z_m, m = 1, 2, 3, \dots$ нормальная составляющая к Γ скорости фильтрации должна обращаться в нуль, то они определяются из совместного решения задающего границу загрязнения уравнения (2.4) и условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1(z)}{\partial n_z} &= 0, \quad (2.14) \\ z &= z_m, \quad z_m \in \Gamma, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В критической точке z_* скорость фильтрации равна нулю, поэтому для определения z_* , имеем уравнение

$$\begin{aligned} K_\nu(z)\frac{\partial\varphi_\nu(z)}{\partial\bar{z}} &= 0, \quad (2.15) \\ z &= z_*, \quad z_* \in D \cup \Gamma \cup L_0 \cup L, \\ \nu &= 1, 2. \end{aligned}$$

Далее, выделяя из комплексного потенциала (2.9) мнимые части и построив линии тока

$$\psi_\nu(z) = \psi_\nu(z_r), \quad \nu = 1 \text{ и (или) } 2, \quad (2.16)$$

проходящие через точки $z_r \in \{z_m, z_*\}, m = 1, 2, 3, \dots$, определяем стационарные границы вымываемого шлейфа загрязнения и указываем ту его часть, которая попадает в водозабор.

Нестационарные (подвижные) границы Γ_t и Γ'_t шлейфов вымываемого загрязнения будем описывать параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} z &= z(l, t) \quad (x = x(l, t), y = x(l, t)), \\ z &\in \Gamma_t \cup \Gamma'_t. \end{aligned}$$

Полагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ границы Γ_t и Γ'_t совпадают с Γ , тогда, в силу (2.4), начальное положение Γ_0, Γ'_0 подвижных границ Γ_t и Γ'_t задается уравнениями

$$z_0 = z(l, 0), \quad z \in \Gamma_0 \cup \Gamma'_0. \quad (2.17)$$

В рамках модели «разноцветных» жидкостей для нахождения положения границ Γ_t и Γ'_t в моменты времени $t > 0$ запишем дифференциальное уравнение их движения. Учитывая связь скорости фильтрации с физической скоростью жидкости [8]

$$\frac{dx}{dt} = K(x, y)\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = K(x, y)\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y},$$

имеем уравнение движения границ Γ_t и Γ'_t в комплексной форме

$$\frac{dz}{dt} = 2K(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\varphi_0(z) + \varphi_*(z)], \quad (2.18)$$

$$z \in \Gamma_t \cup \Gamma'_t.$$

3. Экологические проблемы, решаемые в рамках поставленной задачи

Исследование поставленной задачи об определении шлейфа вымываемого загрязнения позволяет решить ряд важных для практики задач экологии, связанных с мониторингом загрязнения в грунте. С этой целью находим шлейф вымываемого загрязнения и исследуем эволюцию загрязнения. Имея стационарные границы шлейфа вымываемого загрязнения, указываем область, в которой водозабор может работать без загрязнения. Исследование задачи об определении шлейфа вымываемого загрязнения при различных значениях дебита водозабора q позволяет в ходе проведения численного эксперимента [9] найти критический дебит q_* .

В случае, если водозабор работает с дебитом $q > q_*$, в него попадает прошедшая через область D_2 загрязнённая жидкость. В этих условиях оценим степень загрязнения эксплуатационной скважины. Это позволит выбрать такой режим её эксплуатации (подобрать её дебит), при котором она работает с допустимой нормой загрязнения. Степень загрязнения водозабора характеризуется относительным загрязнением вод в водозаборе [4]. Введём в рассмотрение коэффициент загрязнения водозабора ρ , характеризующий относительное загрязнение воды в водозаборе

$$\rho = \Delta\Pi/\Pi, \quad (3.1)$$

где $\Delta\Pi$ — количество загрязнённой жидкости в водозаборе, Π — суммарный дебит водозабора. Для определения $\Delta\Pi$ вычислим поток жидкости через кривую γ_0 , являющуюся общей частью границы загрязнения Γ и той части шлейфа вымываемого загрязнения, которая попадает в водозабор. Обозначая через v_n нормальную составляющую скорости на γ_0 , имеем

$$\Delta\Pi = \int_{\gamma_0} H(\zeta) v_n(\zeta) dl_\zeta \quad (3.2)$$

или, после интегрирования

$$\Delta\Pi = \psi(z_1) - \psi(z_2), \quad (3.3)$$

где z_1 и z_2 — начальная и конечная точки кривой γ_0 . Согласно (3.3), расход жидкости через γ_0 не зависит от формы этой кривой и определяется только значениями функции тока в её крайних точках.

4. Решение задачи для канонических границ загрязнения

Решение задачи сопряжения (2.2), (2.10)–(2.13) для канонических границ Γ и L можно получить в конечном виде методами классической теории аналитических функций комплексного переменного и теории обобщённых аналитических функций.

Исследуем вымываемые шлейфы в кусочно-однородном слое ($P(z) = 1$). Пусть область фильтрации неограничена, а граница очага загрязнения моделируется прямой (осью Oy). Используя фильтрационную теорему о прямой, находим для работающей в условиях поступательного потока грунтовых вод эксплуатационной скважины решение задачи сопряжения (2.2), (2.5) в виде

$$W_1(z) = -uz e^{-i\beta} - \frac{q}{2\pi} \left(\ln(z - x_0) + \lambda \ln(-\bar{z} - x_0) \right), \quad (4.1)$$

$$W_2(z) = \frac{-uz}{1 + \lambda} \left(e^{-i\beta} + \lambda e^{i\beta} \right) - \frac{q(1 - \lambda)}{2\pi} \ln(z - x_0),$$

где β — угол между вектором скорости поступательного потока и отрицательным направлением оси Ox , проходящей через водозабор, отсчитываемый против часовой стрелки, $\beta \in [0; \pi/2)$. Проведённый анализ расположения точек z_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) и z_* позволил указать условия появления шлейфа вымываемого загрязнения. Так, при дебите водозабора, не превышающем значения

$$q = \frac{2\pi u x_0 \cos \beta}{1 - \lambda}, \quad (4.2)$$

шлейфа вымываемого загрязнения не образуется. В случае, если дебит водозабора рассчитывается по формуле

$$q = \frac{2\pi u x_0 \cos \beta}{1 - \lambda} \left(1 + \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \operatorname{tg} \beta \right)^2 \right), \quad (4.3)$$

то критическая точка течения z_* попадает на границу загрязнения. Численный эксперимент показал, что критический дебит больше значения (4.2), но не превышает значения, рассчитываемого по формуле (4.3). Определяя согласно формулам (3.1), (3.3), (2.1), (4.1) степень загрязнения водозабора, когда критическая точка находится в области D_2 , заключаем, что с увеличением дебита водозабора его степень загрязнения увеличивается. При этом исследования показали, что

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \rho = \frac{1 - \lambda}{2}.$$

Усложним рассмотренную задачу введением линии сброса L , ограничивающей область фильтрации D , которую совместим с осью Ox . Скорость поступательного потока грунтовых вод направлена в противоположную сторону этой оси. Наряду с задачей, в которой граница загрязнения моделируется осью Oy , рассмотрим задачу, когда очаг загрязнения — полуокружность с центром на линии сброса. Используя функцию Грина, границу L учтём в комплексном потенциале (2.8). Тогда условия (2.12) становятся однородными, а для решения задачи сопряжения (2.2), (2.10), (2.12), (2.13) используем фильтрационные теоремы о прямой и окружности [4]. Проводя анализ расположения точек z_m и z_* в области фильтрации D , найденных из уравнений (2.4), (2.14), (2.15) в случае расположения водозабора под лучом, исходящим из общей точки границ Γ и L (для полуокружности из двух таких точек следует выбрать ближайшую к водозабору) и наклонённым к оси абсцисс под углом $\frac{\pi}{6}$, получим аналитические решения. Так, для границы Γ в виде полупрямой

$$q_* = \frac{\pi u}{1 - \lambda} \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0}, \quad (4.4)$$

а в случае, когда Γ — полуокружность

$$q_* = \pi u \frac{(x_0 - a)^2 + y_0^2}{x_0 - a}. \quad (4.5)$$

В частных случаях, при $y_0 = 0$ и $\lambda = -1$, формулы (4.4), (4.5) совпадают с результатами, полученными О. В. Голубевой и А. Н. Куликовым.

Для кусочно-неоднородных слоёв проводимость моделируем степенной функцией координат $P = y^s$ ($s = \text{const} > 0$). Особенностью слоя является наличие в нём сингулярной линии L_0 ($y = 0$), на которой проводимость слоя обращается в нуль. Исследуем течения, когда границу очага загрязнения удаётся моделировать полупрямой, ортогональной сингулярной линии (Γ моделируется осью Oy) либо полуокружностью с центром в начале координат. Используя фильтрационные теоремы о полупрямой либо полуокружности [5], решение задачи сопряжения (2.2), (2.10), (2.11), (2.13) представимо в конечном виде. Исследования показали, что в случае границы загрязнения в виде полупрямой расчёт критического дебита водозабора, расположенного у сингулярной линии, можно проводить по формуле

$$q_* = \frac{2u\sqrt{\pi} r_0^{s+2}}{1 - \lambda x_0 y_0^s} \frac{\Gamma(s/2 + 1/2)}{s\Gamma(s/2)}, \quad (4.6)$$

($\Gamma(x)$ — гамма-функция). При $s \rightarrow 0$ формула (4.6) переходит в (4.4). Численный эксперимент и анализ частных случаев ($s = 0$, $s = 2$) позволяют утверждать, что область расположения водозабора, для которого имеет место формула (4.6), с ростом s увеличивается. Если водозабор удалён от сингулярной линии L_0 на значительные расстояния по сравнению с расстоянием до прямолинейной границы загрязнения, то проводимость слоя на критический дебит q_* практически не влияет и

$$q_* = \frac{2\pi u x_0}{1 - \lambda}.$$

Проведённые исследования показали, что влияние закона изменения проводимости слоя на q_* незначительно и им можно пренебречь, если ордината водозабора вдвое больше его абсциссы.

В осесимметричном случае течений в слое проводимости $P = y^s$ ($s = 1$) получены новые аналитические формулы для расчёта критического дебита водозабора [10]. Так, для границы загрязнения, моделируемой полуокружностью с центром на оси абсцисс, с погрешностью, не превышающей 5%, критический де-

бит $Q_* = \Pi_*/\alpha$, приходящийся на единицу угла α раскрытия слоя, определяется формулой

$$Q_* = 12ux_0^2(x_0 - a)^2 \left[x_0(3 + \lambda) \times \right. \\ \left. \times (2x_0 - \lambda(x_0 - a)) + \lambda(1 + \lambda)(x_0 - a)^2 \right]^{-1}.$$

Эта формула позволяет исследовать влияние на критический дебит удалённости водозабора от очага загрязнения, параметра λ , характеризующего скачок проницаемостей грунта на Γ , размера загрязнения. Так, согласно проведённым исследованиям, критический дебит с ростом λ уменьшается. При $\lambda > 0$ с увеличением размера очага загрязнения критический дебит увеличивается, а при $\lambda < 0$, уменьшается.

5. Численное решение задач в случае сложных границ загрязнения

В случае, если очаг загрязнения не замыкает к сингулярной линии L_0 или имеет сложную форму, решение задачи сопряжения (2.2), (2.10)–(2.13) сведём к интегральному уравнению. Для этого границу загрязнения моделируем кривой класса Ляпунова, а потенциал возмущений $W_*(z)$ ищем в виде потенциала двойного слоя, непрерывно распределённого с плотностью $g(\zeta)$, $g(\zeta)$ — вещественная функция на границе Γ

$$W_*(z) = \int_{\Gamma} g(\zeta)P(\zeta) \frac{\partial F_1(z, \zeta)}{\partial n_{\zeta}} dl_{\zeta}, \quad (5.1) \\ z \in D_{\nu}, \nu = 1, 2.$$

Здесь $F_1(z, \zeta)$ — первое фундаментальное решение уравнения (2.2) [5], имеющее в точке $\zeta = \xi + i\eta$ особенность логарифмического типа, \mathbf{n}_{ζ} — орт нормали к границе Γ , направленный внутрь области D_1 . Функция $F_1(z, \zeta)$ удовлетворяет условиям (2.11), (2.12). Предельные значения на Γ комплексного потенциала (5.1) имеют вид [6]

$$W_*^{\pm}(z) = W^*(z) \pm \frac{g(z)}{2}, \quad z \in \Gamma. \quad (5.2)$$

В силу свойств потенциала двойного слоя, комплексный потенциал $W_*(z)$, удовлетворяет условиям (2.11), (2.12), (2.13), а из (2.10),

учитывая (5.2), имеем уравнение для искомой функции $g(z)$

$$g(z) - 2\lambda \int_{\Gamma} g(\zeta)P(\zeta) \frac{\partial \Phi_1(z, \zeta)}{\partial n_{\zeta}} dl = \\ = 2\lambda\varphi_0(z), \quad z \in \Gamma, \quad (5.3)$$

где $\Phi_1(z, \zeta) = \text{Re } F_1(z, \zeta)$. Уравнение (5.3) представляет собой неоднородное интегральное уравнение второго рода типа Фредгольма. Из (5.3) численно находим функцию $g(z)$ [11]. Тогда получаем комплексный потенциал возмущений (5.1), а учитывая формулы (2.9), (2.8), находим комплексный потенциал $W_{\nu}(z)$, описывающий процесс фильтрации в области D_{ν} , $\nu = 1, 2$.

Для определения границ вымываемого шлейфа загрязнения представим (2.14)–(2.16) в виде

$$\frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial n_z} - \frac{1}{P(z)} \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial l_z} dl_{\zeta} = 0, \\ z = z_m, z_m \in \Gamma, m = 1, 2, \dots, \quad (5.4)$$

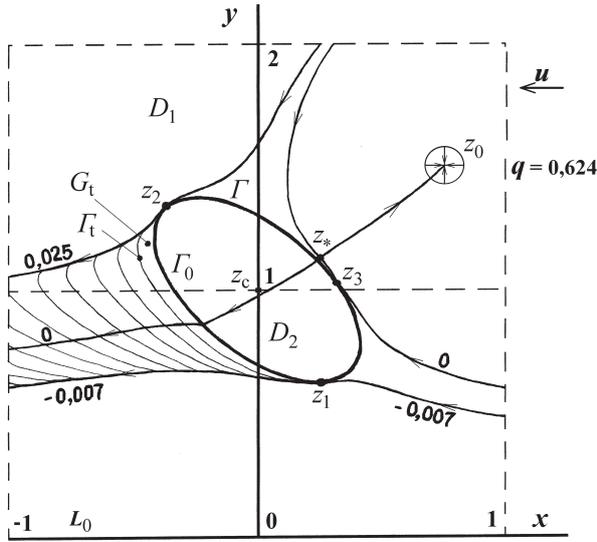
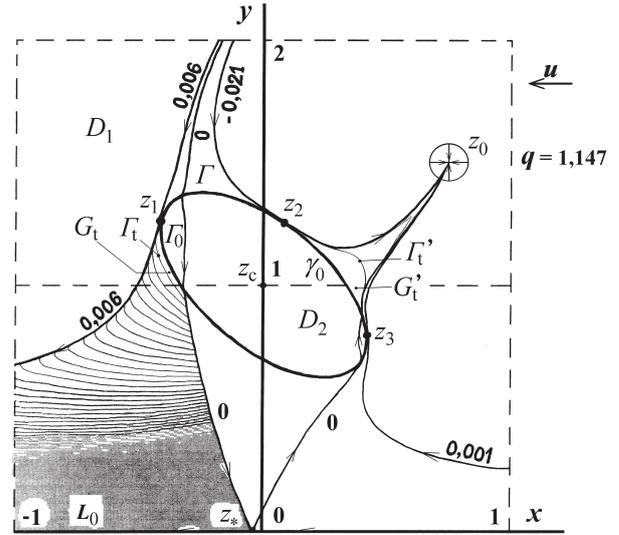
$$K(z) \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial \bar{z}} + \frac{i}{H(z)} \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial \bar{z}} dl_{\zeta} = 0, \\ z = z_*, z_* \in D \cup \Gamma \cup L_0 \cup L, \quad (5.5)$$

$$\psi_0(z) + \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} \Psi_2(z, \zeta) dl_{\zeta} = \psi(z_r), \\ z_r \in \{z_m, z_*\}, \\ m = 1, 2, \dots, \quad \nu = 1 \text{ и (или) } 2,$$

где $\Psi_2(z, \zeta) = P(z) \text{Im } F_2(z, \zeta)$, $F_2(z, \zeta)$ — второе фундаментальное решение уравнения (2.2) [5].

Применяя численные методы [12], решая уравнение (5.3), из (5.4) и (5.5) находим координаты точек z_m ($m = 1, 2, \dots$), z_* . Далее, построив проходящие через эти точки линии тока (5.6), найдем стационарные границы вымываемых шлейфов загрязнения G_t и G'_t .

Для определения положения нестационарных границ Γ_t и Γ'_t шлейфов загрязнения

Рис. 3. Дебит водозабора $q = q_*$, $z_* \in D_1$ Рис. 4. Дебит водозабора $q > q_*$, $z_* \in L_0$

G_t и G'_t уравнение (2.18) представим в форме

$$\frac{dz}{dt} = 2 \left(K(z) \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial \bar{z}} + \frac{i}{H(z)} \times \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial \bar{z}} dl_{\zeta} \right), \quad z \in \Gamma_t \cup \Gamma'_t. \quad (5.7)$$

Решение дифференциального уравнения (5.7) при начальных условиях (2.17) ищем численными методами.

Учитывая формулы (3.1), (3.3) и вид функции тока (левая часть формулы (5.6)), коэффициент загрязнения водозабора, работающего с дебитом $q > q_*$, принимает вид

$$\rho = \frac{1}{\Pi} \left(\psi_0(z_1) - \psi_0(z_2) + \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} (\Psi_2(z_1, \zeta) - \Psi_2(z_2, \zeta)) dl_{\zeta} \right). \quad (5.8)$$

В случае, если функцию тока комплексного потенциала (2.8) не удастся представить в простом аналитическом виде, для построения линий тока используем дифференциальное уравнение линий тока [8], а расчёт количества загрязнённой жидкости в водозаборе проведём по формуле (3.2). Линии тока стро-

им численно из уравнения

$$\frac{\frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial x} - \frac{1}{P(z)} \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial y} dl_{\zeta}}{\frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial y} + \frac{1}{P(z)} \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial x} dl_{\zeta}} = \frac{dx}{dy}. \quad (5.9)$$

Коэффициент загрязнения водозабора находим по формуле

$$\rho = \frac{1}{\Pi} \left[\int_{\gamma_0} \left(H(z) \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial n_z} - \frac{1}{K(z)} \times \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} \frac{\Psi_2(z, \zeta)}{\partial l_z} dl_{\zeta} \right) dl_z \right], \quad z \in \gamma_0. \quad (5.10)$$

Отметим, что использование любой из формул (5.8)–(5.10) требует применение численных методов [12]. Так, применяя формулу прямоугольников при подсчёте интегралов, входящих в (5.8), (5.10), коэффициент загрязнения водозабора определяем с требуемой точностью.

В качестве примера решения задачи на основе интегрального уравнения рассмотрим кусочно-однородный слой, толщина которого меняется по закону $H = y^2$. Очаг загрязнения моделируем эллипсом. Большая и малая полуоси a и b имеют соответственно значения 0,5 и 0,25. Центр эллипса отстоит от сингулярной

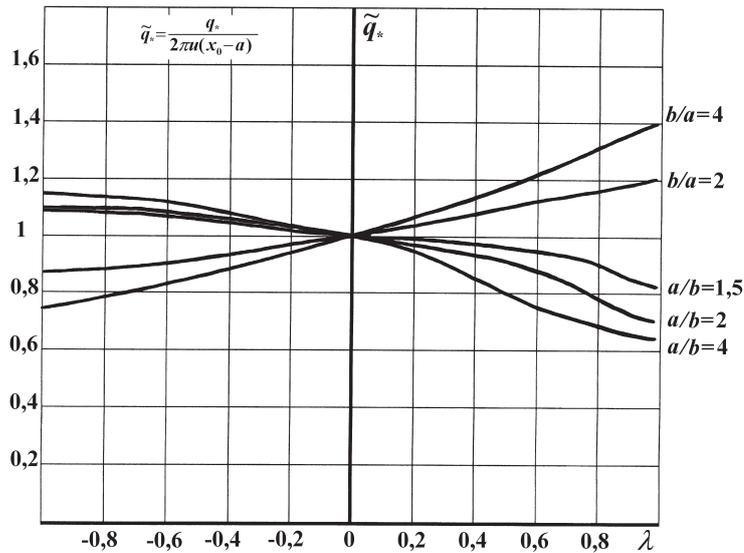


Рис. 5. Зависимость q_* от λ для эллиптических очагов загрязнения с одинаковой площадью

линии $y = 0$ на расстояние, выбранное за единицу измерения. Большая полуось эллипса составляет угол $\alpha = -40^\circ$ с положительным направлением оси Ox . Водозабор расположен в точке с координатой $z_0 = 0,75 + 1,5i$. Решаем задачу сопряжения (2.2), (2.10), (2.11), (2.13) численно, используя интегральное уравнение (5.3). Формулы (5.4), (5.5), (5.9), (5.7) позволяют построить шлейфы вымываемых загрязнений. На рис. 3, рис. 4 указаны характерные особенности течения вблизи сингулярной линии. Так, с ростом дебита водозабора, критическая точка удаляется от него по потоку, приближаясь к L_0 . При этом, в случае работы водозабора с критическим дебитом q_* , точка z_* расположена в области D_1 (рис. 3). С увеличением дебита водозабора, критическая точка может попасть в область D_2 . Существует такое значение мощности эксплуатационной скважины, когда z_* попадает на L_0 (рис. 4). При дальнейшем увеличении мощности водозабора критических точек будет две. При этом все они располагаются на сингулярной линии.

Применение метода дискретных особенностей к решению уравнения (5.3) позволило наряду с ляпуновскими границами загрязнения рассмотреть и кусочно-ляпуновские, что существенно расширило класс решаемых задач. Моделирование очагов загрязнения широким классом кривых позволило исследовать влияние формы очага загрязнения на критиче-

ский дебит водозабора. Так, для кусочно-неоднородной среды на рис. 5 представлены графики зависимостей $q_* = q_*(\lambda)$ в случае вытянутых вдоль направления скорости поступательного потока грунтовых вод и перпендикулярно этому направлению эллиптических очагов загрязнения. Водозабор расположен на линии, параллельной скорости поступательного потока и проходящей через одну из полуосей эллиптического очага загрязнения. Для эллиптических очагов загрязнения ($b/a > 1$), вытянутых перпендикулярно скорости поступательного потока, критический дебит увеличивается с увеличением параметра λ (рис. 5). Если очаг загрязнения вытянут вдоль направления скорости поступательного потока ($a/b > 1$), то критический дебит скважины уменьшается с увеличением λ . Из анализа графиков на рис. 5 заключаем, что при $\lambda \in (-1; 0)$ критический дебит максимален, если очаг загрязнения вытянут вдоль направления скорости поступательного потока. При $\lambda \in (0; 1)$ критический дебит максимален, если очаг загрязнения вытянут перпендикулярно скорости поступательного потока. Отметим, что если эллиптическая граница загрязнения вырождается в окружность, то критический дебит скважины не зависит от коэффициентов проницаемости чистой и загрязнённой областей, что согласуется с известным результатом [4].

Проведённые исследования значительно расширяют класс решённых двумерных граничных задач фильтрации в кусочно-неоднородных слоях грунта и вносят вклад в теорию их решения. Поставленная и исследованная задача позволяет моделировать возникающие при чрезвычайных происшествиях и экологических катастрофах очаги загрязнения и вымываемые из них шлейфы, осуществлять мониторинг загрязнения в грунте и указать условия, при которых вымываемое из очага загрязнение не попадает в водозабор.

Литература

1. *Бочевер Ф. М., Ородовская А. Е.* Гидрогеологическое обоснование защиты подземных вод и водозаборов от загрязнения. М.: Недра, 1972. 129 с.
2. *Гольдберг В. М.* Гидрогеологические прогнозы качества подземных вод на водозаборах. М.: Недра, 1976. 152 с.
3. *Минкин Е. Л.* Гидрогеологические расчёты для выделения зон санитарной охраны водозаборов подземных вод. М.: Недра, 1967. 124 с.
4. *Радыгин В. М., Голубева О. В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983. 160 с.
5. *Пивень В. Ф.* Теория двумерных процессов в неоднородных слоях со степенным законом изменения их проводимостей // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 595–605.
6. *Piven V. F., Aksyukhin A. A., Kvasov A. A., Nicolskii D. N., Frolov M. A.* Research of boundary problems of conjunction of two-dimensional seepage in inhomogeneous layers // Modern approaches to flows in porous media. Intern. Conference dedicated to P. Ya. Polubarinova-Kochina. Moscow, Sept. 1999. P. 92–94.
7. *Пивень В. Ф.* Единственность решения граничных задач сопряжения физических процессов в неоднородной среде // МДОЗМФ-2001: Труды X Международного симпозиума. Херсон: ООО «Айлант», 2001. С. 265–269.
8. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. школа, 1972. 368 с.
9. *Квасов А. А., Пивень В. Ф.* О работе водозабора без загрязнения // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: Тез. докл. VIII Четаевской междунар. конф. Казань, 2002. С. 263.
10. *Квасов А. А.* Осесимметричная задача о работе несовершенной скважины в слое с резко отличающимися границами загрязнения // Сборник научных трудов ОГУ. Вып. 2. Орёл, 2002. С. 15–20.
11. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
12. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.