УДК 521.11

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ ГАУССА К АНАЛИЗУ ВОЗМОЖНОСТИ УВОДА НЕБЕСНОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ МАЛОЙ ТЯГИ[1]

Санникова Т. Н.[2], *Холшевников К. В.*[3], *Чечёткин В. М.*[4]

APPLICATION OF GAUSS AVERAGING METHOD TO THE ANALYSIS OF THE POSSIBILITY OF A CELESTIAL BODY DEVIATION USING A MICROTHRUST

Sannikova T. N., Kholshevnikov K. V., Chechetkin V. M.

A method of a correction of a celestial body (asteroid) trajectory is considered: maintenance of a small acceleration using a microthrust. Euler equations of osculating elements variations are written in a moving frame of references in which x-axis is directed along the velocity vector of the asteroid, and z-axis is directed along the angular momentum vector. Applying Gauss averaging method under the condition that components of disturbing acceleration are constant we construct a system of 5 differential equations for slow variables, and after solving them the fast variable (e.g. mean anomaly) can be found by a simple quadrature. Equations for semi-major axis, eccentricity, and mean anomaly are integrable in quadratures. The complete system of averaged equations is integrable in quadratures if the disturbing acceleration lies in the orbital plane. As an example we consider an asteroid 50 m large having the density 1 g/cm^3. A 1 newton thrust during 8 months is sufficient to assure its deviation at a safe distance.

Keywords: variation of osculating elements, averaging transform, solution in a closed form.

Введение

Пусть точка нулевой массы $\mathcal{A}$ движется под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения $\mathbf{P}$. Введем систему отсчета $\mathcal{O}_1$ с началом в $\mathcal{S}$ и с вращающимися относительно неподвижной, инерциальной системы координат $\mathcal{O}$ ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$, направленными по вектору скорости астероида, главной нормали к оскулирующей орбите (перпендикуляру к вектору скорости в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Систему $\mathcal{O}_1$ назовем сопровождающей.

Исследуем движение $\mathcal{A}$, считая компоненты вектора $\mathbf{P}$ постоянными в сопровождающей системе координат. В настоящей статье мы воспользуемся уравнениями Эйлера в оскулирующих элементах и применим к ним осредняющее преобразование, считая отношение возмущающего ускорения $|\mathbf{P}|$ к основному $\varkappa^2/r^2$ малой величиной и ограничиваясь возмущениями первого порядка. Здесь $r = \mathcal{SA}$, $\varkappa^2$ — произведение постоянной тяготения на массу тела $\mathcal{S}$.

В рамках поставленной модельной задачи рассмотрим один из методов коррекции траектории опасного небесного тела (астероида): сообщение ему малого ускорения с помощью двигателя малой тяги.

1. Уравнения движения и их осредняющее преобразование

Обратимся к уравнениям движения типа Эйлера в оскулирующих элементах [1, 2]. За последние выберем кеплеровские элементы

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 11-02-00232а) и Программой развития СПбГУ (грант 6.37.110.2011).

[2]Санникова Татьяна Николаевна, аспирант кафедры небесной механики Санкт-Петербургского государственного университета; e-mail: tnsannikova@gmail.com.

[3]Холшевников Константин Владиславович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой небесной механики Санкт-Петербургского государственного университета; e-mail: kvk@astro.spbu.ru.

[4]Чечёткин Валерий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института прикладной математики им. Келдыша РАН; e-mail: chechet@spp.keldysh.ru.

ω, e, i, Ω, σ, M — среднее движение, эксцентриситет, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перицентра и средняя аномалия. Выбор среднего движения вместо большой полуоси a сильно упрощает операции осреднения, поскольку скорость изменения M в невозмущенном движении линейно зависит от ω, но существенно нелинейно от a.

Принято различать вектор медленных переменных $\mathbf{x} = (\omega, e, i, \Omega, \sigma)$, постоянных в невозмущенном движении, и скалярную быструю переменную $y = M$, линейно зависящую от $x_1 = \omega$. Здесь и ниже компоненты трехмерного вектора $\mathbf{P}$ и пятимерных векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{F}$ обозначены теми же буквами с номером компоненты в виде нижнего индекса.

Уравнения типа Эйлера в оскулирующих элементах для сопровождающей системы отсчета имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mu \mathbf{f}(\mathbf{x}, y), \\ \dot{y} &= x_1 + \mu g(\mathbf{x}, y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t, μ — малый параметр, который мы вводим искусственно и считаем постоянным, а $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ и g — вещественно-аналитические функции в окрестности начальных данных.

Применим к (1.1) процедуру осреднения, в результате чего (1.1) перейдет в систему:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mu \mathbf{F}(\mathbf{X}, Y) + \ldots,$$

$$\dot{Y} = X_1 + \mu G(\mathbf{X}, Y) + \ldots.$$

В дальнейшем мы ограничимся возмущениями первого порядка и *не будем указывать на наличие членов более высокого порядка.*

В нашем случае лишь одна переменная M является быстрой, поэтому малые знаменатели не появляются и решение находится элементарно. Согласно методу осреднения [3] за $\mathbf{F}$, G следует взять среднее значение функций $\mathbf{f}$, g:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathcal{E}\mathbf{f}(\mathbf{X}, Y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}(\mathbf{X}, Y)\, dY,$$

$$G(\mathbf{X}) = \mathcal{E}g(\mathbf{X}, Y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathbf{g}(\mathbf{X}, Y)\, dY.$$

Таким образом, функции $\mathbf{F}$, G не зависят от Y.

Правые части уравнений (1.1) в функции эксцентрической аномалии E:

$$f_1 = -\frac{3}{a}\sqrt{\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}}\mathfrak{T},$$

$$f_2 = \frac{2\sqrt{a}\left(1 - e^2\right)\cos E}{\varkappa\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}\,\mathfrak{T} - {} \\ - \frac{r\sqrt{p}\sin E}{\varkappa a\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}\mathfrak{N},$$

$$f_3 = \frac{a}{\varkappa\sqrt{p}}\,[\cos\sigma(\cos E - e) - \eta\sin\sigma\sin E]\,W,$$

$$f_4 = \frac{a}{\varkappa\sqrt{p}\sin i}\,[\sin\sigma(\cos E - e) + \eta\cos\sigma\sin E]\,W,$$

$$f_5 = \frac{2\sqrt{p}\sin E}{\varkappa e\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}\mathfrak{T} + {} \\ + \frac{\sqrt{a}(e + \cos E)}{\varkappa e}\sqrt{\frac{1 - e\cos E}{1 + e\cos E}}\mathfrak{N} - \cos i f_4,$$

$$g = \omega - \frac{2\sqrt{a}\left(1 - e^3\cos E\right)\sin E}{\varkappa e\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}\,\mathfrak{T} + {} \\ + \frac{\sqrt{p}(e - \cos E)}{\varkappa e}\sqrt{\frac{1 - e\cos E}{1 + e\cos E}}\mathfrak{N},$$

где

$$p = a(1 - e^2), \quad r = a(1 - e\cos E),$$

$$\eta = \sqrt{1 - e^2}$$

и, как обычно, в системе $\mathcal{O}_1$ принято $\mathbf{P} = (\mathfrak{T}, \mathfrak{N}, W)$.

Средние значения функций $\mathbf{f}$, g легко вычисляются. В результате уравнения типа Эйлера в средних элементах примут вид:

$$\dot{\omega} = -\frac{6}{\pi a}\mathbf{E}(e)\mathfrak{T}, \quad \dot{e} = -\frac{4\eta^2 e}{\pi\omega a}\mathbf{D}(e)\mathfrak{T},$$

$$\dot{i} = -\frac{3e}{2\omega a\eta}\cos\sigma W,$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3e}{2\omega a\eta\sin i}\sin\sigma W,$$

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{\pi\omega a}\left[-2(1 - e^2)\mathbf{D}(e) + \mathbf{E}(e)\right]\mathfrak{N} + {} \\ + \frac{3e\operatorname{ctg} i}{2\omega a\eta}\sin\sigma W,$$

$$\dot{M} = \omega + \frac{2\eta}{\pi\omega a}\left[2(1+e^2)\mathbf{D}(e) + \mathbf{E}(e)\right]\mathfrak{N}. \quad (1.2)$$

Правые части уравнений движения в средних элементах выражаются через полные эллиптические интегралы и имеют простой вид.

Можно показать, что разности оскулирующих и средних элементов — ограниченные малой величиной периодические функции средней аномалии, и при изучении эволюции орбиты ими можно пренебречь.

2. Решение системы осредненных уравнений движения

Очевидно, что уравнения для большой полуоси, эксцентриситета и средней аномалии интегрируются в квадратурах. При $W = 0$ в квадратурах интегрируется полная система осредненных уравнений.

Пусть $\mathfrak{N} = W = 0$ (тяга по или против вектора скорости астероида). Тогда (1.2) примет вид:

$$\dot{\omega} = -\frac{6}{\pi a}\mathbf{E}(e)\mathfrak{T}, \quad \dot{e} = -\frac{4\eta^2 e}{\pi\omega a}\mathbf{D}(e)\mathfrak{T},$$

$$\dot{i} = \dot{\Omega} = \dot{\sigma} = 0,$$

$$\dot{M} = \omega. \quad (2.1)$$

В случае круговой орбиты ($e = 0$) получаем *точное* решение системы (2.1):

$$\omega = \omega_0(1 - Bt)^3, \quad a = a_0(1 - Bt)^{-2},$$

$$M = M_0 + \frac{\omega_0}{4B}[1 - (1 - Bt)^4]$$

при

$$B = \frac{\mathfrak{T}}{\varkappa^{2/3}\omega_0^{1/3}}.$$

Оценим значения параметров, полагая

$$\varkappa = 1,152 \cdot 10^{10}\ \text{м}^{3/2}/\ \text{с},$$

$$\text{диаметр астероида } = 50\ \text{м},$$

$$\text{плотность } = 1\ \text{г/см}^3,\ \text{масса } = 6,5 \cdot 10^7\ \text{кг},$$

$$\text{тяга } = 1\ \text{Н},\ a_0 = 1,1\ \textit{а.е.} = 1,65 \cdot 10^{11}\ \text{м},$$

$$\omega_0 = 1,72 \cdot 10^{-7}\ \text{рад/с} = 5,43\ \text{рад/год}:$$

$$|\mathfrak{T}| = 1,53 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$B = 5,4 \cdot 10^{-13}\ \text{с}^{-1} = 1,7 \cdot 10^{-5}\ \text{год}^{-1},$$

поэтому на временах в сотни и даже тысячи лет безразмерная величина Bt остается малой.

Разности возмущенной и невозмущенной большой полуоси и средней аномалии

$$\frac{\Delta a}{a_0} = (1 - Bt)^{-2} - 1 \approx 2Bt,$$

$$\Delta M = -\left(\frac{3\omega_0 t}{2}\right)Bt\left(1 - \frac{2}{3}Bt + \frac{1}{6}B^2t^2\right) \approx$$

$$\approx -\left(\frac{3\omega_0 t}{2}\right)Bt.$$

Эти две величины совпадают при $t \approx 3$ месяца.

Разность возмущенного и невозмущенного положения в первом порядке малости

$$\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{a_0} \approx \sqrt{\frac{\Delta a^2}{a_0^2} + \Delta M^2} \approx$$

$$\approx \frac{3B\omega_0 t^2}{2}\sqrt{1 + \frac{16}{9\omega_0^2 t^2}}.$$

Итак, астероид удаляется на расстояние 10 Мм за 8 месяцев работы двигателя тягой в 1 Н. Зависимость уклонения от времени квадратична. При тяге в 0,1 Н и 10 Н время уклонения составит 31 и 3 месяца, соответственно.

При малых e ситуация аналогична, особенно при $\mathfrak{T} > 0$ (разгон), когда эксцентриситет убывает. Случай больших e, особенно при $\mathfrak{T} < 0$ (торможение), когда эксцентриситет возрастает, требует исследования.

Заключение

В случае постоянства $\mathbf{P}$ в сопровождающей системе $\mathcal{O}_1$ найдены дифференциальные уравнения изменения средних элементов. Правые части уравнений для средних элементов выражаются через полные эллиптические интегралы. В случае круговой орбиты и при возмущающем ускорении, лежащем в плоскости орбиты, в квадратурах интегрируется полная система осредненных уравнений. Решение уравнений показывает, что увод опасного 50-метрового астероида от траектории столкновения с Землей достигается двигателем с тягой в 1 ньютон за 8 месяцев.

Литература

1. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
2. *Санникова Т. Н., Холшевников К. В.* Уравнения движения в оскулирующих элементах в различных системах отсчета // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2013. Сер. 1. Вып. 4. С. 159–170.
3. *Холшевников К. В.* Асимптотические методы небесной механики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 208 с.

Ключевые слова: изменение оскулирующих элементов, осредняющее преобразование, решение в замкнутой форме.

Статья поступила 11 октября 2013 г.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
Институт прикладной астрономии РАН, г. Санкт-Петербург
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, г. Санкт-Петербург
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва