УДК 521.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ОРБИТЫ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ДАЛЬНОСТИ И СКОРОСТИ ЕЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ТРИ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ[1]

Шефер В. А.[2]

A STUDY ON THE EFFICIENCY OF METHODS FOR THE CALCULATION OF INTERMEDIATE PERTURBED ORBIT FROM RANGE AND RANGE RATE MEASUREMENTS AT THREE TIMES

Shefer V. A.

Two methods that the author developed for finding the orbit of a small celestial body from three pairs of range and range rate observations are applied to the determination of orbits of some artificial Earth satellites. The efficiency of using these methods is investigated in comparison with the commonly used procedure based on the construction of the unperturbed Keplerian orbit. The comparison shows that the methods proposed are an efficient means for studying perturbed motion.

Keywords: preliminary orbit determination, intermediate perturbed orbit, dynamics of artificial Earth satellites.

Современные радиотехнические и лазерные средства наблюдений позволяют измерять расстояние между точкой наблюдения и небесным телом (дальность) и радиальную скорость (скорость изменения дальности) с точностью, которая на несколько порядков выше, чем точность оптических наблюдений. Использование таких высокоточных наблюдений в традиционных методах определения предварительной орбиты, основанных на решении невозмущенной задачи двух тел [1, 2], может привести к тому, что точность полученной орбиты окажется значительно хуже точности опорных наблюдений.

В работе [3] предложен метод вычисления промежуточной возмущенной орбиты по измерениям дальности и скорости ее изменения в три момента времени. Степень аппроксимации реального движения построенной этим методом орбиты в окрестности среднего момента времени на два порядка выше, чем у кеплеровской орбиты, определенной традиционными методами. Нами разработан также метод нахождения орбиты по указанному набору наблюдательных данных, имеющей степень аппроксимации реальной траектории на три порядка выше по сравнению с кеплеровской орбитой. Идея последнего изложена в [4]. Ниже рассматриваются численные примеры, демонстрирующие эффективность предложенных методов.

Для краткости алгоритм, реализующий первый из вышеуказанных методов, назовем Алгоритмом А1, а второй — Алгоритмом А2. Исследование эффективности алгоритмов проводилось в сравнении с вариантом этих же алгоритмов, позволяющим построить невозмущенную кеплеровскую орбиту (при условии исключения действия возмущающих сил). Назовем его Алгоритмом А. Указанные алгоритмы были запрограммированы на языке ФОРТРАН-95.

В качестве объектов, на примерах которых тестировались программы, были выбраны: 1) гипотетический ИСЗ с высокоэксцентрической орбитой; 2) ИСЗ, находящийся на геостационарной орбите (геостационарный спутник); 3) ИСЗ навигационной системы NAVSTAR GPS (GPS-спутник); 4) ИСЗ с орбитой типа «Лагеос» (спутник типа «Ла-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-02-00220-а).

[2]Шефер Владимир Александрович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры астрономии и космической геодезии Томского государственного университета, заведующий лабораторией НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета; e-mail: shefer@niipmm.tsu.ru.

Таблица 1. Оскулирующие элементы орбит

Элементы орбиты	Спутник с высокоэксцентрической орбитой	Геостационарный спутник	GPS-спутник	Спутник типа «Лагеос»
a, км	135673,35	42165,00	26560,04	12265,32
e	0,9500	0,0010	0,0022	0,0044
i, град	30,00	1,00	54,67	30,00

Таблица 2. Оценки точности определения высокоэксцентрической орбиты ($\rho_2 = 53276,28$ км)

$t_3 - t_1$, мин	ρ_1, км	ρ_3, км	A	A1	A2
			Δr, км	Δr, км	Δr, км
0,5	53237,56	53709,25	$9{,}2\times10^{-2}$	$5{,}7\times10^{-4}$	$2{,}6\times10^{-5}$
1	53181,79	53749,97	$7{,}5\times10^{-2}$	$5{,}8\times10^{-4}$	$1{,}0\times10^{-5}$
2	53087,24	53844,95	$8{,}2\times10^{-2}$	$2{,}4\times10^{-3}$	$8{,}6\times10^{-5}$
4	52897,93	54034,72	$2{,}7\times10^{-1}$	$4{,}4\times10^{-3}$	$5{,}2\times10^{-4}$
8	52518,51	54413,49	$7{,}5\times10^{-1}$	$9{,}8\times10^{-3}$	$3{,}1\times10^{-3}$
10	52328,40	54602,47	$9{,}5\times10^{-1}$	$1{,}3\times10^{-2}$	$4{,}4\times10^{-3}$
20	51373,67	55543,55	1,23	$1{,}7\times10^{-1}$	$3{,}9\times10^{-2}$
40	49442,88	57406,88	78,44	13,88	$4{,}0\times10^{-1}$

геос»). В табл. 1 приведены значения трех элементов орбит спутников (большой полуоси орбиты a, эксцентриситета e и наклона орбиты к плоскости экватора Земли i) на условную эпоху $t_0 = 0$. Значения остальных элементов приняты нулевыми. Вычисления выполнялись с машинной точностью, равной 2.22×10^{-16}.

Движение ИСЗ рассматривается в геоцентрической прямоугольной экваториальной системе координат. На ИСЗ действуют возмущающие силы, вызванные несферичностью Земли и притяжением Луны. Модель движения подробно описана в [3].

Мы поставили задачу оценить погрешности алгоритмов в зависимости от длины опорного интервала времени. По начальным параметрам движения были вычислены траектории ИСЗ. Назовем их номинальными. Уравнения движения интегрировались классическим методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Положения и скорости на номинальных траекториях считаются точными. На номинальных траекториях выбирались совокупности геоцентрических положений $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ и скоростей $\dot{\mathbf{x}}_1$, $\dot{\mathbf{x}}_2$, $\dot{\mathbf{x}}_3$ в эпохи t_1, t_2 и t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$) соответственно. Затем вычислялись топоцентрические дальности ρ_i, скорости их изменения $\dot{\rho}_i$ и моменты времени $t_i^0 = t_i + \rho_i/c$ (c — скорость света), соответствующие геоцентрическим положениям $\mathbf{x}_i$ и скоростям $\dot{\mathbf{x}}_i$ на номинальной траектории в выбранные моменты времени t_i ($i = 1, 2, 3$). Полученные таким образом величины t_i^0, ρ_i и $\dot{\rho}_i$ играли в нашем эксперименте роль наблюдательных данных.

В качестве станций наблюдения взяты обсерватории «Зеленчукская» (Специальная астрофизическая обсерватория) и «Симеиз» (Крымская астрофизическая обсерватория).

Второе наблюдение моделировалось на неизменный в каждом варианте вычислений момент времени $t_2 = 220$ мин. Первое и третье наблюдения выбирались соответствующими положениям спутника через равные интервалы времени. Наблюдения строились с учетом прямой видимости спутника из места наблюдения.

Решение системы уравнений относительно неизвестных векторов положения и скорости на момент t_2 выполнялось методом Ньютона–Рафсона. Необходимые для реализации вычислительной процедуры значения частных производных находились методом конечных разностей по формуле второго порядка. Точность, которая определяла условие сходимости итераций для компонент вектора положения, выбрана равной 10^{-8} км.

Результаты вычислений приводятся в табл. 2–5. В таблицах приняты обозначения: ρ_i — i-е топоцентрическое расстояние, $\Delta r = |\mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_2|$ — ошибка в векторе положения в эпоху t_2. Здесь $\mathbf{x}_2$ — вектор положения на номинальной траектории в момент t_2, $\mathbf{x}_2^*$ —

Таблица 3. Оценки точности определения орбиты геостационарного спутника ($\rho_2 = 38637,15$ км)

$t_3 - t_1$, мин	ρ_1, км	ρ_3, км	A Δr, км	A1 Δr, км	A2 Δr, км
1	38637,24	38973,32	$5{,}8\times10^{-2}$	$1{,}3\times10^{-4}$	$2{,}9\times10^{-5}$
2	38637,22	38973,20	$6{,}4\times10^{-2}$	$4{,}2\times10^{-4}$	$4{,}3\times10^{-5}$
4	38637,15	38973,03	$6{,}3\times10^{-2}$	$1{,}2\times10^{-3}$	$3{,}0\times10^{-4}$
8	38637,45	38972,90	$6{,}4\times10^{-2}$	$2{,}5\times10^{-3}$	$9{,}2\times10^{-4}$
10	38637,53	38972,84	$7{,}9\times10^{-2}$	$3{,}6\times10^{-3}$	$1{,}4\times10^{-3}$
20	38637,96	38972,55	$9{,}3\times10^{-2}$	$3{,}8\times10^{-2}$	$1{,}2\times10^{-2}$
40	38638,97	38972,13	$2{,}5\times10^{-1}$	$4{,}5\times10^{-1}$	$1{,}0\times10^{-1}$
80	38641,52	38971,82	1,32	6,29	$8{,}9\times10^{-1}$

Таблица 4. Оценки точности определения орбиты GPS-спутника ($\rho_2 = 29216,83$ км)

$t_3 - t_1$, мин	ρ_1, км	ρ_3, км	A Δr, км	A1 Δr, км	A2 Δr, км
0,5	29210,13	28701,23	$7{,}9\times10^{-2}$	$1{,}6\times10^{-4}$	$9{,}2\times10^{-6}$
1	29201,42	28709,87	$8{,}7\times10^{-2}$	$9{,}4\times10^{-5}$	$1{,}2\times10^{-5}$
2	29185,99	28726,15	$9{,}1\times10^{-2}$	$1{,}7\times10^{-4}$	$3{,}4\times10^{-5}$
4	29155,09	28758,68	$5{,}3\times10^{-1}$	$6{,}6\times10^{-4}$	$8{,}4\times10^{-5}$
8	29093,09	28823,59	$3{,}7\times10^{-1}$	$4{,}0\times10^{-3}$	$6{,}6\times10^{-4}$
10	29061,99	28855,97	$3{,}6\times10^{-1}$	$7{,}2\times10^{-3}$	$3{,}8\times10^{-3}$
20	28905,55	29017,05	5,43	$1{,}4\times10^{-1}$	$1{,}8\times10^{-2}$
40	28588,15	29334,79	76,43	5,89	$1{,}6\times10^{-1}$

вектор положения, оцененный в момент t_2 с помощью сравниваемых алгоритмов. Длина опорного интервала $t_3 - t_1$ уменьшалась до тех пор, пока ограничение на порядки чисел в компьютере не приводило к заметному ухудшению точности вычислений.

В табл. 2 представлены погрешности определения положения спутника с высокоэксцентрической орбитой. Видно, что для рассматриваемых опорных интервалов времени точности вычисления положения спутника с помощью Алгоритма A1 приблизительно на 1–2 порядка выше в сравнении с соответствующими оценками, полученными при помощи Алгоритма A. Для всех приведенных в таблице интервалов времени Алгоритм A2 точнее Алгоритма A1 в 3–60 раз. Наилучшие точности при использовании A1 и A2 достигаются для интервалов 0,5–1 мин. и составляют 60 и 1–3 см соответственно.

Оценки точности определения геостационарной орбиты даны в табл. 3. Для опорных интервалов времени 1–10 мин. применение A1 по сравнению с A также позволяет уменьшить ошибки вычисления орбиты на 1–2 порядка. На всех рассматриваемых интервалах времени A2 точнее A1 в 3–10 раз. Наибольшие точности определения положения спутника с помощью A1 и A2 равны 13 и 3 см соответственно. Они получены для интервала 1 мин.

В табл. 4 приводятся ошибки определения орбиты спутника GPS. Из их сравнения следует, что для опорных интервалов, не превышающих 8 мин, точности вычисления положения спутника с помощью A1 на 2–3 порядка, а с помощью A2 на 3–4 порядка выше соответствующих точностей, достигнутых Алгоритмом A. Преимущество A1 и A2 в 1–2 порядка по точности сохраняется вплоть до наибольшего из приведенных интервалов времени. На интервалах 0,5–1 мин. погрешности в положении, определенные Алгоритмами A1 и A2, составляют приблизительно 10 и 1 см соответственно.

Результаты оценки точности вычисления орбиты ИСЗ типа «Лагеос» даны в табл. 5. Ошибки в положении спутника на интервалах времени до 4 мин. для A1 на 1–2 порядка, а для A2 на 2–3 порядка меньше, чем в случае применения A. Как и в предыдущих примерах, с увеличением опорного интервала различия в точностных оценках, полученных с помощью сравниваемых алгорит-

Таблица 5. Оценки точности определения орбиты спутника типа «Лагеос» ($\rho_2 = 14506,81$ км)

$t_3 - t_1$, мин	ρ_1, км	ρ_3, км	A Δr, км	A1 Δr, км	A2 Δr, км
1	14572,81	14931,18	$4{,}6\times10^{-1}$	$1{,}3\times10^{-3}$	$2{,}7\times10^{-4}$
2	14638,41	14867,57	$3{,}5\times10^{-1}$	$3{,}7\times10^{-3}$	$4{,}6\times10^{-4}$
4	14768,35	14739,07	$3{,}7\times10^{-1}$	$1{,}2\times10^{-2}$	$3{,}7\times10^{-3}$
8	15023,09	14477,05	$8{,}4\times10^{-1}$	$2{,}8\times10^{-1}$	$2{,}7\times10^{-2}$
10	15147,83	14343,60	3,34	$8{,}6\times10^{-1}$	$2{,}3\times10^{-1}$
20	15743,84	13653,61	109,67	22,97	1,98

мов, уменьшаются. Максимальные точности предложенных методов, равные 130 см в случае применения A1 и 30 см в случае применения A2, достигаются для интервала 1 мин.

Таким образом, рассмотренные численные примеры дают основание утверждать, что предложенные в [3, 4] методы определения промежуточной возмущенной орбиты по имеющимся в три момента времени дальностям и скоростям их изменения позволяют существенно повысить точность вычисления первоначальных орбит ИСЗ по сравнению с алгоритмом, основанным на нахождении невозмущенной кеплеровской орбиты. Чем короче орбитальная дуга, задаваемая крайними моментами времени, тем выше точность аппроксимации реального движения орбитами, построенными предложенными методами. Это является важным преимуществом перед методами, реализующими традиционный подход.

Литература

1. *Baker R. M. L., Makemson M. W.* An Introduction to Astrodynamics. New York: Academic Press, 1967. 439 p.
2. *Roy A. E.* Orbital Motion. Bristol: IOP Publishing, 2005. 526 p.
3. *Шефер В. А.* Метод определения промежуточной орбиты по измерениям дальности и скорости ее изменения в три момента времени // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55. № 10/2. С. 11–18.
4. *Шефер В. А.* Метод высокоточного определения орбиты по измерениям дальности и скорости ее изменения в три момента времени // Современная баллистика и смежные вопросы механики: Материалы Всерос. науч. конф., г. Томск, 17–19 ноября 2009 г. Томск, 2010. С. 326–328.

Ключевые слова: определение предварительной орбиты, промежуточная возмущенная орбита, динамика ИСЗ.

Статья поступила 7 октября 2013 г.

Томский государственный университет, г. Томск