УДК 537.311.3+538.945

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОКОВЫХ СОСТОЯНИЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО МЕЗОСКОПИЧЕСКОГО КОЛЬЦА КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Третяк Д. Н.[1]***, Тумаев Е. Н.***[2]

THE NUMERICAL INVESTIGATION OF CURRENT STATES OF MESOSCOPIC SUPERCONDUCTING RINGS OF FINITE WIDTH IN THE EXTERNAL MAGNETIC FIELD

Tretiak D. N., Tumaev E. N.

A theoretical and numerical study of current states in mesoscopic superconducting rings of finite width and one-dimensional rings is carried. It is shown that in the absence of an external magnetic field of the superconducting current in the ring of finite width hasn't a certain value, and the vector potential is a pure gauge. Theoretical and numerical studies of current states of one-dimensional superconducting ring in an external magnetic field are carried.

Keywords: superconducting ring, parameter of order, Ginzburg-Landau equation, magnetic field.

Сверхпроводящие мезоскопические кольца диаметром несколько микрон и толщиной 40–70 нм, охлажденные до температуры $0{,}95T_c$, где T_c — температура перехода в сверхпроводящее состояние, представляют собой уникальные приемники инфракрасного излучения. Принцип действия таких приемников основан на дискретности токовых состояний сверхпроводника, в результате чего такие кольца используются как сверхчувствительные детекторы реликтового излучения Вселенной, составляя конкуренцию обычно используемым парамагнитным усилителям [1]. Дискретность токовых состояний связана с тем, что, как отмечено в приложении к монографии [2], сверхпроводящие мезоскопические кольца представляют собой макроскопические квантовые объекты. Второе возможное применение сверхпроводящих колец связано с их способностью изменять токовые состояния под действием весьма малых внешних магнитных полей, что позволяет использовать их как датчики магнитного поля в космических исследованиях. В [3] подробное исследование токовых состояний одномерного сверхпроводящего кольца в отсутствие внешнего магнитного поля проведено не прибегая к численным методам. В настоящей работе исследуются токовые состояния сверхпроводящего мезоскопического кольца конечной ширины в присутствии внешнего магнитного поля.

Внешнее магнитное поле будем считать однородным и постоянным, вектор напряженности поля $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ направлен перпендикулярно плоскости кольца, и в этой плоскости вектор-потенциал магнитного поля $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\times\mathbf{r}]$ имеет в полярных координатах (r,φ) только компоненту A_φ. В отличие от работы [3], где токовые состояния исследованы с помощью уравнений Гинзбурга – Ландау – Максвелла (ГЛМ), в настоящем исследовании будем исходить из минимума функционала свободной энергии для системы, состоящей из кольца с током, взаимодействующего с порождаемым им магнитным полем. Согласно [4], общий вид функционала свободной энергии в безразмерных переменных имеет вид

$$F = \int\limits_V \Bigg[-|\Psi|^2 + \frac{|\Psi|^4}{2} + \left|\left(-\frac{i}{\kappa}\nabla - \mathbf{A}\right)\Psi\right|^2 + \mathbf{H}^2\Bigg] dV, \quad (1)$$

---

[1]Третяк Дмитрий Николаевич, аспирант кафедры физики и информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: tretjak86@mail.ru.

[2]Тумаев Евгений Николаевич, д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической физики и компьютерных технологий; e-mail: tumayev@phys.kubsu.ru.

где V — объем, занимаемый системой, Ψ — волновая функция бозе-конденсата куперовских пар, κ — параметр Гинзбурга–Ландау [4]. Вектор-потенциал магнитного поля $\mathbf{A}$ складывается из потенциала внешнего поля, описанного выше, и потенциала поля, порождаемого током в кольце, поэтому в (1) через $\mathbf{H}$ обозначена суммарная напряженность магнитного поля.

Для параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$ выберем экспоненциальную параметризацию вида

$$\Psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \exp[i\theta(\mathbf{r})],$$

где $f(\mathbf{r})$ и $\theta(\mathbf{r})$ — амплитуда и фаза волновой функции бозе-конденсата куперовских пар. Для одномерного кольца, рассмотренного в [3,5], амплитуда f постоянна, интегрирование в (1) сводится к умножению подынтегрального выражения на длину окружности кольца $2\pi R$, где R — радиус кольца. Следовательно, выражение (1) для свободной энергии при экспоненциальной параметризации Ψ будет следующим

$$F = h \int\limits_S \left[-f^2 + \frac{f^4}{2} + \frac{1}{\kappa^2}(\nabla f)^2 + \right.$$
$$\left. + f^2 \left(\frac{1}{\kappa}\nabla\theta - \mathbf{A} \right)^2 + \mathbf{H}^2 \right] ds, \quad (2)$$

где h — толщина кольца, которая значительно меньше его радиусов: внутреннего R_1 и внешнего R_2, $ds = r dr d\varphi$, интегрирование по площади кольца S идет в пределах $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ в полярных координатах (r, φ), начало координат совпадает с центром кольца.

Система уравнений Гинзбурга – Ландау, записанная в безразмерной форме [4], имеет следующий вид:

$$-\frac{1}{\kappa^2}\nabla^2 f + f\left(\mathbf{p}^2 - 1 + f^2\right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\kappa^2} f \nabla^2\theta + \frac{2}{\kappa} p \nabla f = 0, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\kappa}\nabla\theta - \mathbf{A} \quad (5)$$

— обобщенный импульс (квазиимпульс) бозе-конденсата куперовских пар, связанный с плотностью сверхпроводящего тока $\mathbf{j}$ равенством

$$\mathbf{j} = f^2 \mathbf{p}. \quad (6)$$

Исходя из симметрии кольца, следует заключить, что $f = \text{const}$. Действительно, наличие зависимости волновой функции $\Psi(\mathbf{r})$ от радиальной координаты $\mathbf{r}$ означает, что ток $\mathbf{j}$ имеет соответствующую компоненту j_r, и, поскольку компонента j_φ присутствует всегда (как отмечено выше, для постоянного однородного магнитного поля вектор $\mathbf{A}$ имеет только компоненту A_φ), то это означает, что вектор $\mathbf{j}$ будет направлен под углом к семейству окружностей $r = \text{const}$, что невозможно в силу симметрии. Аналогичные рассуждения позволяют заключить, что фаза $\theta(\mathbf{r})$ на самом деле зависит только от угла φ. Учитывая эти факты, записываем уравнения (3)–(4) и выражения (5)–(6) в полярной системе координат

$$p_\varphi^2 - 1 + f^2 = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} = 0, \quad (8)$$

$$j_\varphi = f^2 p_\varphi, \quad (9)$$

$$p_\varphi = \frac{1}{\kappa}\nabla\theta - A_\varphi. \quad (10)$$

Решение уравнения (8), удовлетворяющее условию цикличности $\theta(\varphi + 2\pi) = \theta(\varphi)$, имеет вид

$$\theta(\varphi) = n\varphi + C, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

причем без ограничения общности можно положить $C = 0$.

Для определения величины амплитуды f первоначально рассмотрим случай одномерного сверхпроводящего кольца, помещенного во внешнее магнитное поле. В работе [3] с помощью системы уравнений ГЛМ рассмотрены токовые состояния одномерного сверхпроводящего кольца в отсутствие внешнего магнитного поля. Отсутствие внешнего поля позволило дополнить систему уравнений ГЛМ граничным условием в форме обращения магнитного поля в нуль на бесконечности. При наличии внешнего поля последнее условие нарушается, и сделанные в этой работе выводы перестают быть справедливыми, в связи с чем исследование токовых состояний одномерного сверхпроводящего кольца, помещенного во внешнее однородное магнитного поля, в связи с чем исследование токовых состояний одномерного сверхпроводящего кольца, помещенного во внешнее однородное магнитное поле, представляет интерес, как первоначальный этап исследования токовых состояний сверхпроводящего кольца конечной ширины.

Одномерное кольцо инвариантно относительно поворотов вокруг оси кольца, следовательно, амплитуда параметра порядка принимает на кольце постоянное значение, и $\nabla f = 0$. В этих условиях функционал (2) превращается в функцию $F(\mathbf{A})$ вектор-потенциала $\mathbf{A}$, минимум которой достигается при обращении в нуль двух последних слагаемых. Предпоследнее слагаемое обращается в нуль при $\mathbf{A} = \kappa^{-1}\nabla\theta$, но, в таком случае вектор-потенциал пропорционален градиенту фазы волновой функции бозе-конденсата куперовских пар, т.е., является чистой калибровкой, что отмечено в [6]. Однако, в этом случае последнее слагаемое в (2) также обращается в нуль, и выражение для свободной энергии имеет вид

$$F = 2\pi R\left(-f^2 + \frac{f^4}{2}\right).$$

Экстремум свободной энергии определяется из уравнения

$$\frac{dF}{df} = -f + f^3 = 0, \tag{12}$$

имеющего два решения. Решение $f = 0$, отвечающее локальному максимуму, не описывает сверхпроводящее состояние и является, как показано в [3] неустойчивым. Решение $f = 1$ описывает сверхпроводящее состояние одномерного кольца.

Рассмотрим теперь случай симметричного сверхпроводящего кольца конечной ширины, ограниченного концентрическими окружностями R_1 и $R_2 > R_1$. В этом случае в силу симметрии, а также цикличности, фаза волновой функции будет также иметь вид (11). Вектор-потенциал магнитного поля определяется ее градиентом

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\kappa}\nabla\theta = \frac{n}{\kappa r}\mathbf{e}_\varphi, \tag{13}$$

где $\mathbf{e}_\varphi$ — соответствующий орт полярной системы координат.

Вектор $\mathbf{p}$, являющийся аналогом классического импульса куперовских пар и плотность сверхпроводящего тока $\mathbf{j}$, которые в параметризации $\Psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\exp[i\theta(\mathbf{r})]$, даются выражениями (9) и (10), оказываются, согласно (13), в отсутствие внешнего поля тождественно равными нулю. Аналогично, уравнение для вектор-потенциала $\nabla^2\mathbf{A} = -\mathbf{j}$ выполняется тождественно.

Следует однако отметить, что выражение (13), минимизирующее свободную энергию, приводит к парадоксальному выводу: в отсутствие магнитного поля вектор квазиимпульса $\mathbf{p}$ и сверхпроводящий ток $\mathbf{j}$ равны нулю, в то время, как магнитное поле нулю не равно. Действительно, величина потока магнитного поля, захваченного кольцом, согласно теореме Стокса, равна циркуляции вектор-потенциала по окружности любого радиуса r в пределах кольца

$$\Phi = \oint\limits_l A_l dl = \int\limits_0^{2\pi} A_\varphi r d\varphi.$$

Используя (13), находим

$$\Phi = \frac{2\pi n}{\kappa}. \tag{14}$$

Формула (14) описывает эквидистантное квантование магнитного потока внутри широкого кольца.

Полученные результаты могут быть объяснены следующим образом: в сверхпроводящих кольцах, на которые не производится внешнее воздействие, как магнитным полем, так и с помощью токоподводов, сверхпроводящий ток по-видимому будет отсутствовать, в то время, как магнитный поток будет захвачен кольцом даже в отсутствие внешнего магнитного поля. Чтобы определить количество квантов магнитного потока, захваченных в сверхпроводящем кольце, необходимо вмешаться в его состояние, т.е. измерить величину потока магнитного поля. Однако, согласно общим принципам квантовой механики, такое измерение изменяет состояние квантового эффекта, что и приводит к фиксации сверхпроводящего тока. Здесь мы имеем еще одно свидетельство того, что сверхпроводящее кольцо является макроскопическим квантовым объектом. Возможно, подобные квантовые эффекты наблюдаются не только в сверхпроводящих кольцах, но и в мезоскопических кольцах из нормального металла, поскольку в таких кольцах также наблюдается устойчивый захват магнитного потока. В кольцах из нормального металла это, возможно, обусловлено достаточной длинной когерентности.

Следует отдельно отметить, что состояния, соответствующие разным значениям квантового числа n соответствуют одному и тому же значению свободной энергии (2), следовательно, они одинаково устойчивы.

Полученные результаты остаются справедливыми и для асимметричных колец, область которых ограничена двумя окружностями разного радиуса, а центры находятся на некотором расстоянии Δ друг от друга. При этом выражение для вектор-потенциала, минимизирующее свободную энергию, дается выражением $\mathbf{A} = \kappa^{-1}\nabla\theta$, причем произвол выбора фазы волновой функции не влияет на физически измеримые величины, такие как магнитный поток и плотность сверхпроводящего тока. Более того, аналогичные соображения справедливы также для замкнутых областей, имеющих более сложную геометрическую форму, за исключением одномерного сверхпроводящего кольца, поскольку в случае кольца конечной ширины вектор-потенциал $\mathbf{A} = \kappa^{-1}\nabla\theta$ не дает вклада в слагаемое $\mathbf{H}^2$ в выражении (2), а в случае одномерного кольца

$$\mathbf{A} = \frac{HR}{2}\mathbf{e}_\varphi$$

(R — радиус кольца), поэтому в отсутствие внешнего поля последнее выражение в (2) не исчезает. В этом случае свободная энергия будет иметь следующий вид:

$$F = -f^2 + \frac{f^4}{2} + f^2\left(\frac{n}{\kappa R} - A_\varphi\right)^2 + 2\left(\frac{A_\varphi}{R}\right)^2,$$

и, если положить

$$A_\phi = \frac{n}{\kappa R},$$

то последнее слагаемое не обращается в ноль. Поэтому для одномерного кольца наблюдается отступление от правила эквидистантного квантования потока магнитного поля, что и было отмечено в [3].

Рассмотрим случай, когда одномерное сверхпроводящее кольцо помещено во внешнее однородное магнитное поле напряженностью H, вектор-потенциал которого дается тем же выражением, что и вектор-потенциал магнитного поля, сознаваемого сверхпроводящим током

$$A_\varphi = \frac{HR}{2}. \tag{15}$$

В такой калибровке вектор-потенциал имеет единственную компоненту, касательную к сверхпроводящему кольцу. Вектор обобщенного импульса равен

$$p_\phi = \frac{n}{\kappa R} - \frac{HR}{2}.$$

Тогда, согласно (7) и (9), получаем следующие выражения для квадрата амплитуды волновой функции бозе-конденсата куперовских пар и для сверхпроводящего тока:

$$f^2 = 1 - \left(\frac{n}{\kappa R} - \frac{HR}{2}\right)^2,$$

$$j_\varphi = f^2\left(\frac{n}{\kappa R} - \frac{HR}{2}\right).$$

Свободная энергия одномерного сверхпроводящего кольца равна

$$F = f^2\left[\left(\frac{n}{\kappa R} - \frac{HR}{2}\right)^2 - 1 + \frac{f^2}{2}\right] + {} + 2\left(\frac{A_\varphi}{R}\right)^2, \tag{16}$$

при этом целое число n выбирается так, чтобы свободная энергия была минимальна. Используя (15), запишем выражение (16) в виде

$$F = f^2\left[\left(\frac{n}{\kappa R} - \frac{HR}{2}\right)^2 - 1 + \frac{f^2}{2}\right] + {} + \frac{H^2}{2}. \tag{17}$$

Последнее слагаемое в этом выражении зависит только от внешнего магнитного поля, то есть является фиксированной величиной, следовательно, минимум свободной энергии (17) достигается при минимуме выражения

$$\left(\frac{n}{\kappa R} - \frac{HR}{2}\right)^2.$$

Поскольку n — целочисленное квантовое число, то минимум выражения (17) достигается, если оно равно округлённому значению выражения

$$\frac{\kappa HR^2}{2},$$

$$n = \left[\frac{\kappa HR^2}{2}\right], \text{ если } \left\{\frac{\kappa HR^2}{2}\right\} < \frac{1}{2}, \tag{18}$$

или

$$n = \left[\frac{\kappa HR^2}{2}\right] + 1, \text{ если } \left\{\frac{\kappa HR^2}{2}\right\} > \frac{1}{2}, \tag{19}$$

где символами $[\ldots]$ и $\{\ldots\}$ обозначена целая и дробная части соответствующего выражения. Формулы (18) и (19) демонстрирует отмеченный в литературе факт [2, 7], что при

$$\left\{\frac{\kappa HR^2}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

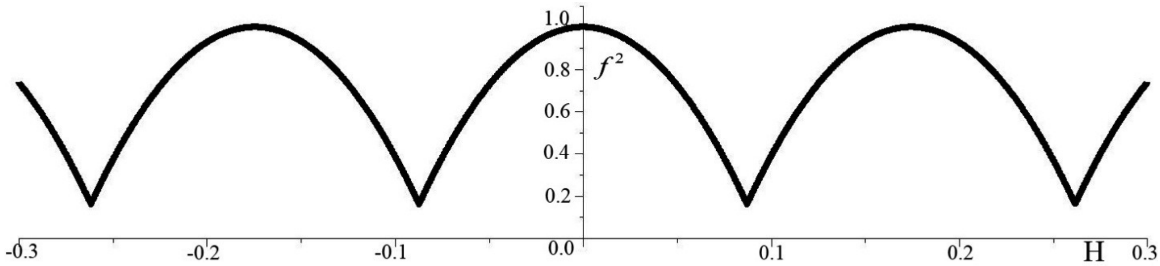

Рис. 1. Зависимость квадрата амплитуды параметра порядка от напряженности внешнего магнитного поля для одномерного кольца с $R = 21$, $\kappa = 0,026$, демонстрирующая отсутствие щелей

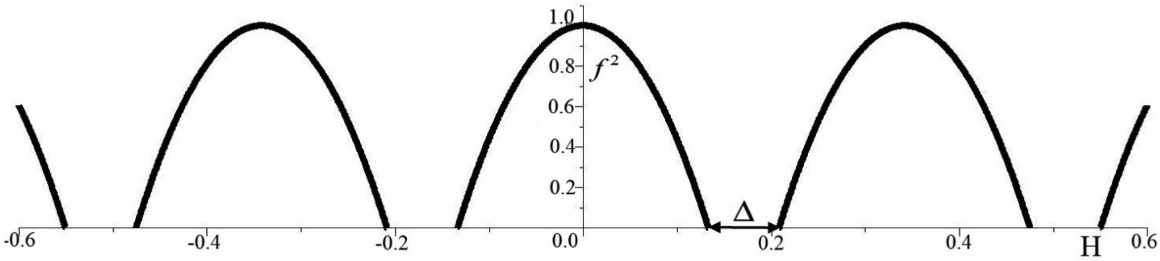

Рис. 2. Зависимость квадрата амплитуды параметра порядка от напряженности внешнего магнитного поля для одномерного кольца с $R = 15$, $\kappa = 0,026$, демонстрирующая наличие щелей

сверхпроводящие состояния со значениями n, даваемые обеими формулами, обладают одинаковой свободной энергией, поэтому флуктуации внешнего магнитного поля вызывают переключение токовых состояний с разной конфигурацией параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$.

Проведенный анализ позволяет рассмотреть зависимость амплитуды параметра порядка от внешнего магнитного поля. Это будет периодическая функция с периодом, равным $\frac{2}{\kappa R^2}$, представляющая собой совокупность парабол, направленных своими ветвями вниз. Максимальных значений амплитуда параметра порядка достигает при

$$H = \frac{2m}{\kappa R^2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для колец радиуса $R > \frac{1}{2\kappa}$ область существования сверхпроводящего состояния, соответствующая $f^2 > 0$, будет сплошной. Для колец с $R \leqslant \frac{1}{2\kappa}$ будут наблюдаться щели в зависимости f^2 от напряженности внешнего магнитного поля H в середине периода, т.е. сверхпроводящее состояние реализуется не при всех значениях H. Центры этих щелей находятся в точках

$$H = \frac{2m+1}{\kappa R^2}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

ширины всех щелей одинаковы и равны

$$\Delta = \frac{2}{R}\left(\frac{1}{\kappa R} - 2\right).$$

Описанные зависимости иллюстрируются рис. 1 и 2, расчет произведен для алюминиевых колец, использовавшихся в экспериментах А.В. Никулова и др. [7], для которых $\kappa = 0,026$.

График вектора квазиимпульса p представляет собой пилообразную функцию, подобную описанной в [4] (рис. 3), ее период совпадает с периодом квадрата амплитуды параметра порядка f^2.

Рассмотрим зависимость плотности сверхпроводящего тока j от напряженности внешнего магнитного поля, исходя из выражения (6). Эта зависимость представляет собой произведение квадратичной (от магнитного поля) функции f^2 и линейной функции p, таким образом он будет описываться кубической функцией напряженности внешнего магнитного поля. На рис. 4 и 5 представлены графики зависимостей j от величины H при отсутствии (рис. 4) и наличии (рис. 5) щелей в сверхпроводящих состояниях.

Скачок плотности тока в переходных областях для колец с $R > \frac{1}{2\kappa}$ будет равен величине

$$\Delta j = \frac{1}{\kappa R} - \frac{1}{4\kappa^3 R^3}$$

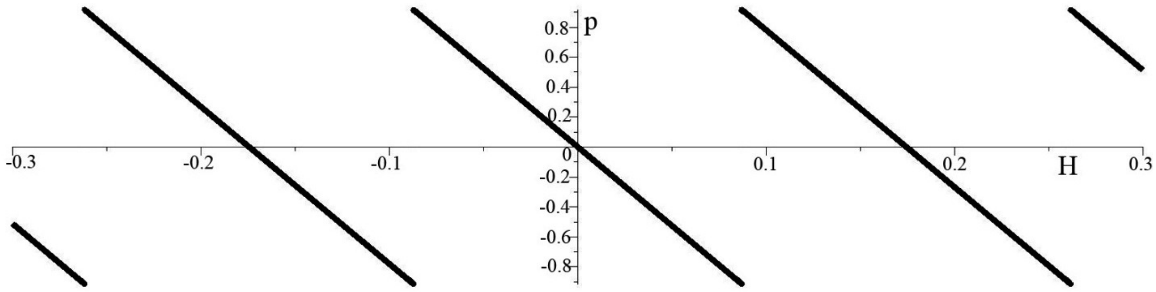

Рис. 3. Зависимость квазиимпульса от напряженности внешнего магнитного поля для одномерного кольца с $R = 21$, $\kappa = 0,026$

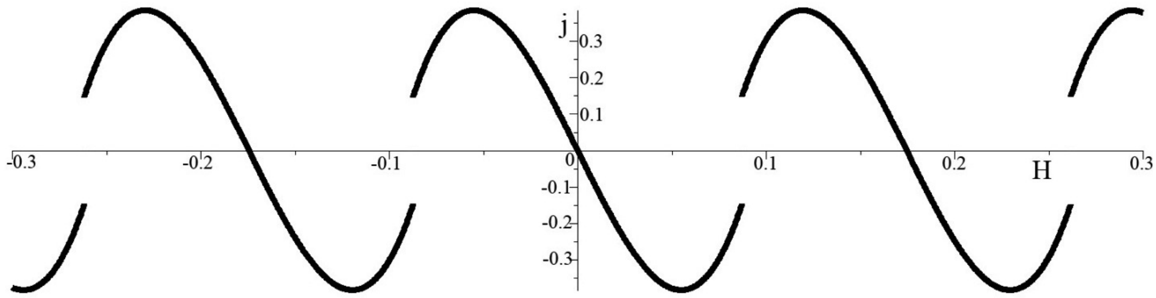

Рис. 4. Плотность сверхпроводящего тока j как функция напряженности внешнего магнитного поля H для кольца радиуса $R = 21$, $\kappa = 0,026$

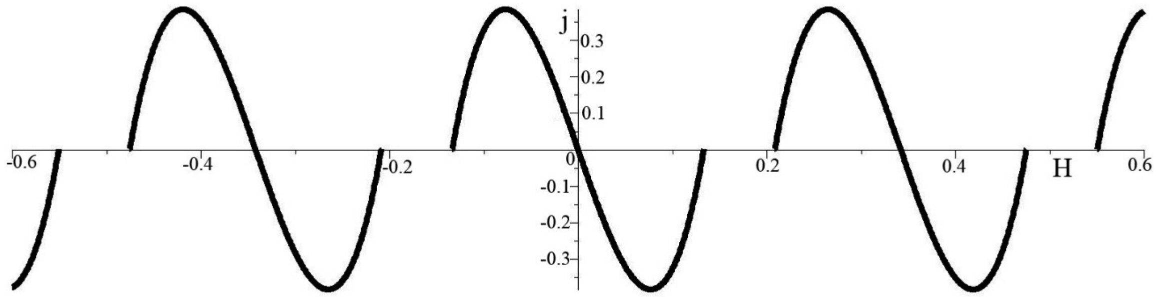

Рис. 5. Плотность сверхпроводящего тока j как функция напряженности внешнего магнитного поля H для кольца радиуса $R = 15$, $\kappa = 0,026$

Максимальному значению плотности тока для колец радиуса $R < \frac{\sqrt{3}}{2\kappa}$ соответствует магнитное поле, равное

$$H = \frac{2}{R}\left(\frac{m}{\kappa R} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Следует отметить, что при $R \to \infty$ или $\kappa \to \infty$ кубическая зависимость плотности тока вырождается в линейную.

Последней зависимостью, представляющей интерес, является зависимость свободной энергии от внешнего магнитного поля. Её график приведен на рис. 6 (для кольца без щелей в сверхпроводящем состоянии) и рис. 7 (для кольца с щелями в сверхпроводящем состоянии).

Суммируя вышесказанное, можно сделать следующие заключения.

1. В сверхпроводящих кольцах достаточно малого радиуса сверхпроводящие состояния существуют не при всех значениях напряженности внешнего магнитного поля, т. е. возникают эквидистантные щели, разделяющие сверхпроводящие состояния. При больших значениях радиуса щели исчезают, и сверхпроводящее состояние кольца существует при всех значениях напряженности внешнего магнитного поля.

2. Зависимость плотности сверхпроводящего тока от напряженности внешнего магнитного поля в общем случае имеет кубический характер.

3. Вектор-потенциал магнитного поля, создаваемого сверхпроводящим током в кольце конечной ширины является калибровкой, и поэтому не вносит вклад в свобод-

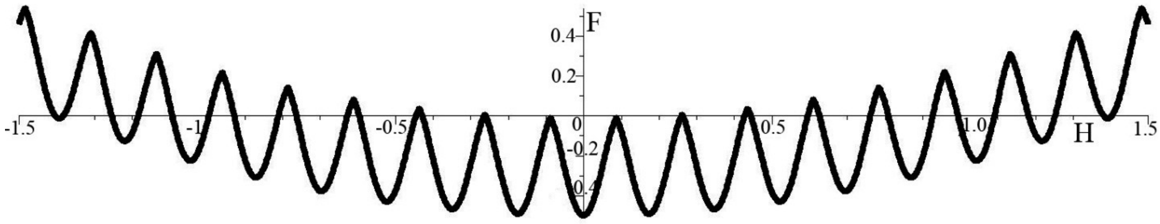

Рис. 6. Свободная энергия F как функция напряженности внешнего магнитного поля H для кольца радиуса $R = 21$, $\kappa = 0,026$

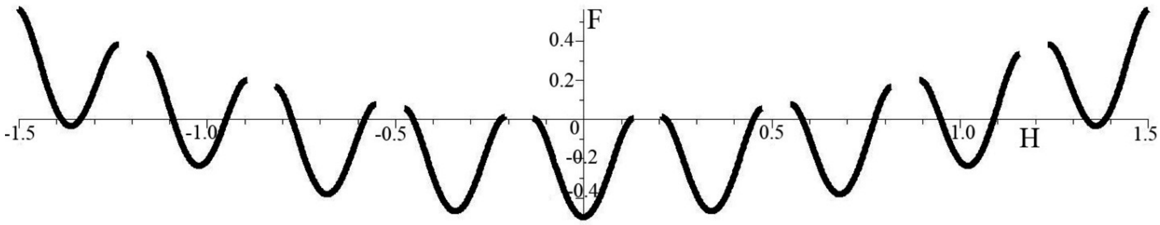

Рис. 7. Свободная энергия F как функция напряженности внешнего магнитного поля H для кольца радиуса $R = 15$, $\kappa = 0,026$

ную энергию, что позволяет использовать его как калибровочную добавку к вектор-потенциалу внешнего магнитного поля. Связанный с этим магнитным полем сверхпроводящий ток не имеет определенного значения, однако измерение тока фиксирует его значение в согласии с трактовкой сверхпроводящего кольца как макроскопического квантового объекта.

4. При определенных значениях напряженности внешнего магнитного поля в одномерном кольце происходит наблюдавшееся в эксперименте скачкообразное изменение параметра порядка (связности волновой функции сверхпроводящего состояния).

Литература

1. *Третяк Д. Н., Тумаев Е. Н.* Численное исследование токовых состояний сверхпроводящего мезоскопического кольца конечной ширины во внешнем магнитном поле // Тезисы докладов междунар. конф. «Околоземная астрономия-2013», Краснодар, 2013. С. 132.
2. *Гринштейн Дж., Зайонц А.* Квантовый вызов. Современные исследования оснований квантовой механики. М.: ИД «Интеллект», 2008. 399 с.
3. *Третяк Д. Н., Тумаев Е. Н.* Неоднозначность токового состояния одномерного сверхпроводящего кольца // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2013. №1. С. 60–67.
4. *Абрикосов А. А.* Основы теории металлов. М.: Физматлит, 2010. 600 с.
5. *Vodolazov D. Y., Baelus B. J., Peeters F. M.* Stationary-phase slip state in quasi-one-dimensional rings // Physical Review B. 2002. Vol. 66. 054531. P. 1–6.
6. *Вайнберг С.* Квантовая теория поля. Т. 2. Современные приложения. М.: Физматлит, 2003. 528 с.
7. *Гуртовой В. Л., Дубонос С. В., Никулов А. В. и др.* Зависимость величины и направления устойчивого тока от величины магнитного потока в сверхпроводящих кольцах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2007. Т. 132. С. 1320–1339.

Ключевые слова: сверхпроводящее кольцо, параметр порядка, уравнение Гинзбурга-Ландау, магнитное поле.

Статья поступила 11 ноября 2013 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар