

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛ¹

Ватульян А.О.², Нестеров С.А.³

ABOUT PARTICULARITIES OF IDENTIFICATION INHOMOGENEOUS PROPERTIES OF PRESTRESSED
THERMOELASTIC BODIES

Vatulyan A. O.*, Nesterov S. A.*

* South Federal University, Rostov-on-Don, Russia, e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Abstract: The formulations of the direct and inverse problems for the prestressed thermoelastic rod are considered. The integral equations for the solving of inverse problem are formulated. Results of numerical experiments are shown and discussed.

Keywords: inverse problem of thermoelasticity, initial stresses, inhomogeneous rod, integral equation

Введение

В последние годы в различные области техники все шире внедряются функционально-градиентные материалы, обладающие переменными физическими свойствами и позволяющие значительно улучшить качество элементов конструкций. Однако при технологической обработке таких материалов в результате неравномерного остывания в процессе прокатки, закалки, сварки могут возникнуть начальные напряжения (преднапряжения) и начальная температура (преднагрев или предохлаждение). Начальными или предварительными называют напряжения, существующие в телах при отсутствии внешних тепловых и механических воздействий. Учет предварительных напряжений позволяет адекватно описывать поведение сложных систем, например, трубопроводов, в режиме эксплуатации при наличии сложного термосилового нагружения. Кроме того, остаточные напряжения могут играть решающую роль при наложении на конструкции больших эксплуатационных нагрузок, поэтому их учет важен в прогнозировании критических ситуаций.

Эффективность практического применения предварительно-напряженных неоднородных термоупругих материалов зависит от знания точных законов неоднородности, а для их определения необходимо решать

коэффициентные обратные задачи (КОЗ) термоупругости. В настоящее время накоплен достаточный опыт решения коэффициентных обратных задач теории упругости и теплопроводности в отдельности, основные результаты которых собраны в монографиях [1, 2]. Обратные задачи термоупругости для неоднородных тел исследованы весьма слабо, исследования ограничены в основном идентификацией характеристик вертикально-неоднородной полубесконечной среды [3], слоистых [4] и слабо неоднородных тел [5]. Это связано с трудностями, возникающими при построении нелинейных операторных отношений, связывающих искомые и измеряемые в эксперименте функции. Для преодоления этой трудности в ряде работ [6–9] был построен итерационный процесс, на каждом этапе которого решались линеаризованные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода, однако в этих работах идентификация термомеханических характеристик производилась при отсутствии начальных напряжений и преднагрева. Вместе с тем, для потребностей техники необходимо исследовать влияние предварительных напряжений на граничные физические поля неоднородных термоупругих тел и на процедуру идентификации термомеханических характеристик. С этой целью в данной работе были получены уравнения термоупругости для предварительно-напряженного неоднородно-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (13-01-00196) и Южного математического института (г. Владикавказ).

²Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

³Нестеров Сергей Анатольевич, младший научный сотрудник научно-исследовательской части Южного федерального университета; e-mail: 1079@list.ru.

го термоупругого стержня на основе подхода, предложенного А. Н. Гузем [10] и Л. Робертсоном [11]. Далее, задача о колебаниях неоднородного термоупругого стержня решалась на основе метода сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах и процедуре обращения на основе теории вычетов. Проведен анализ влияния преднапряжений на торцевые характеристики стержня. Для решения КОЗ были получены операторные уравнения и проведен анализ результатов идентификации термомеханических характеристик неоднородного стержня.

1. Решение прямой задачи для неоднородного термоупругого стержня

Рассмотрим продольные колебания жестко закрепленного на торце $x = 0$ неоднородного предварительно напряженного термоупругого стержня длины l под действием приложенной к торцу $x = l$ силы $p_0\lambda(t)$. Начально-краевая задача в случае отсутствия массовых сил, полученная на основе термодинамических соотношений [12], в случае конечных деформаций после линеаризации имеет вид [13]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\sigma_x = (E + \sigma_x^0 + \gamma\theta^0) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(x)\theta, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= c_\varepsilon(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \\ &+ (E + \sigma_x^0 + \gamma\theta^0) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (1.4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma_x \Big|_{x=l} = p_0\lambda(t), \quad (1.5)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь $\sigma_x^0(x)$ — преднапряжение, $\theta^0(x)$ — преднагрев, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и стационарной теплопроводности

$$\frac{d\sigma_x^0}{dx} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{d\theta^0}{dx} \right) = 0$$

соответственно. Из уравнения равновесия следует, что начальное напряжение для

стержня является постоянной величиной $\sigma_x^0 = \text{const}$.

Перейдем в (1.1)–(1.6) к безразмерным параметрам и переменным, обозначая

$$z = \frac{x}{l}, \quad z \in [0, 1], \quad \bar{k}(z) = \frac{k(zl)}{k_0},$$

$$\bar{c}(z) = \frac{c_\varepsilon(zl)}{c_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zl)}{\rho_0}, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(zl)}{E_0},$$

$$\bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma(zl)}{\gamma_0}, \quad t_1 = \frac{l^2 c_0}{k_0}, \quad t_2 = l \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}},$$

$$\tau = \frac{t}{t_2}, \quad W = \frac{\gamma_0 \theta}{E_0}, \quad U = \frac{u}{l}, \quad \Omega = \frac{\sigma_x}{E_0},$$

$$\delta_0 = \frac{\gamma_0}{c_0}, \quad \mu = \frac{p_0}{E_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{t_2}{t_1} = \frac{k_0}{c_0 l} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}},$$

$$\Omega^0 = \frac{\sigma_x^0}{E_0}, \quad W^0 = \frac{\gamma_0 \theta^0}{E_0}, \quad \bar{\chi}(z) = \Omega^0 + \gamma W^0,$$

$$\bar{\eta}(z) = \bar{E}(z) + \bar{\chi}(z), \quad k_0 = \max_{x \in [0, l]} k(x),$$

$$c_0 = \max_{x \in [0, l]} c(x), \quad E_0 = \max_{x \in [0, l]} E(x),$$

$$\rho_0 = \max_{x \in [0, l]} \rho(x), \quad \gamma_0 = \max_{x \in [0, l]} \gamma(x).$$

После обезразмеривания начально-краевая задача (1.1)–(1.6) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (1.7)$$

$$\Omega = \bar{\eta}(z) \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\gamma}(z) W, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \\ &+ \delta_0 \bar{\eta}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$W(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau) = 0, \quad (1.10)$$

$$U(0, \tau) = 0, \quad \Omega(1, \tau) = \mu\lambda(\tau), \quad (1.11)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = 0. \quad (1.12)$$

Прямая задача термоупругости заключается в определении функций $U(z, \tau)$ и $W(z, \tau)$ из (1.7)–(1.12) при известных термомеханических характеристиках ($\bar{E}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$) и функции $\bar{\chi}(z)$.

В **обратной задаче** требуется определить одну из термомеханических характеристик стержня ($\bar{E}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$) при

известных остальных по дополнительной информации о смещении на торце стержня

$$U(1, \tau) = f(\tau), \quad \tau \in [a, b], \quad (1.13)$$

или о температуре на торце стержня

$$W(1, \tau) = g(\tau), \quad \tau \in [c, d]. \quad (1.14)$$

Прямая задача (1.7)–(1.12) после применения преобразования Лапласа по безразмерному времени τ сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах, как в [8, 9]

$$\begin{aligned} \tilde{W}(z, p) &= \int_0^1 K_1(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \\ &\quad + \int_0^1 K_2(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi, \\ \tilde{\Omega}(z, p) &= \int_0^1 K_3(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \\ &\quad + \int_0^1 K_4(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi + f_1(p), \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь ядра $K_j(z, \xi, p)$ ($j = \overline{1, 4}$) и правая часть $f_1(p)$ имеют вид

$$K_1(z, \xi, p) = -\frac{p}{\varepsilon_0} (\bar{c}(\xi) + \bar{r}) \int_0^{\min\{z, \xi\}} \frac{d\varsigma}{\bar{k}(\varsigma)},$$

$$K_2(z, \xi, p) = -\frac{p}{\varepsilon_0} \delta_0 \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{\bar{\eta}(\xi)} \int_0^{\min\{z, \xi\}} \frac{d\varsigma}{\bar{k}(\varsigma)},$$

$$K_3(z, \xi, p) = -p^2 \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{\bar{\eta}(\xi)} \int_{\min\{z, \xi\}}^1 \bar{\rho}(\varsigma) d\varsigma,$$

$$K_4(z, \xi, p) = -p^2 \frac{1}{\bar{\eta}(\xi)} \int_{\min\{z, \xi\}}^1 \bar{\rho}(\varsigma) d\varsigma,$$

$$f_1(p) = \mu \tilde{\lambda}(p),$$

$$\bar{r}(\xi) = \frac{\delta_0 \bar{\gamma}^2(\xi)}{\bar{\eta}(\xi)}.$$

Для решения прямой задачи в случае возбуждения колебаний стержня под действием приложенного к торцу $x = l$ теплового потока $q = q_0 \phi(t)$ (в безразмерном виде нагрузка $\omega \phi(\tau)$, где $\omega = \frac{q_0 \gamma_0 l}{k_0 E_0}$) аналогичным образом получена система интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

Решение системы (1.15) проводилось на основе метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Для нахождения оригиналов применялась теория вычетов [9].

Точность расчетов температуры и смещения проверялась путем сравнения с аналитическим решением, полученным для однородного преднапряженного стержня. При количестве разбиений в квадратурной формуле трапеций, равном $n = 20$, относительная погрешность численного решения составила менее 1%.

Проведено исследование влияния однородного начального напряжения и преднагрева, характеризующихся безразмерным параметром $\bar{\chi} = \Omega^0 + \gamma W^0$ (Ω^0 – безразмерное преднапряжение, W^0 – безразмерный преднагрев) на безразмерное торцевое смещение точек стержня. На рис. 1 изображены графики изменения торцевой температуры от времени при торцевой нагрузке $\lambda(\tau) = H(\tau)$, параметре связанности $\delta_0 = 0,4$ и различных величинах параметра $\bar{\chi}$. Анализ влияния уровня предварительных напряжений на торцевое смещение показал, что это влияние наиболее существенно для $\bar{\chi} \geq 0,005$.

2. Решение коэффициентной обратной задачи термоупругости

Поставленная в работе обратная задача термоупругости является нелинейной. Ранее для решения обратных задач на основе итерационного процесса в [6, 9] было получено обобщенное соотношение взаимности для неоднородных термоупругих тел при отсутствии начальных напряжений. Выполнив аналогичные действия применительно к сформулированной задаче с начальными напряжениями и проведя процедуру линеаризации, были получены два интегральных уравнения Фредгольма 1-го рода в трансфор-

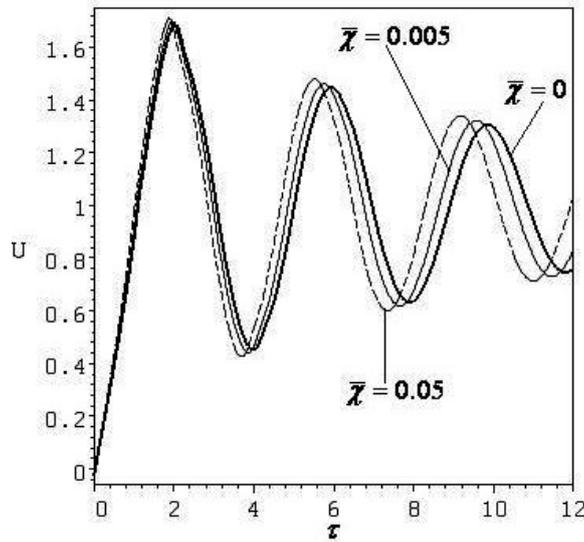


Рис. 1. Влияние начального состояния на торцевое смещение

мантах по Лапласу

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{\eta}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + \\ & + p^2 \int_0^1 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left(\tilde{U}^{(n-1)} \right)^2 dz - \\ & - \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}^{(n-1)} dz = \\ & = -\mu \tilde{\lambda}(p) \left(\tilde{f}(p) - \tilde{U}^{(n-1)}(1, p) \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + \\ & + p \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} \left(\tilde{W}^{(n-1)} \right)^2 dz + \\ & + 2\delta_0 p \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}^{(n-1)} dz = \\ & = \omega \tilde{\phi}(p) \left(\tilde{g}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p) \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если необходимо восстановить только одну из термомеханических характеристик при известных остальных, уравнения (2.1) и (2.2) распадаются на независимые интегральные уравнения.

Так, операторное уравнение в трансформантах для нахождения коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z)$ при торцевой нагрузке $\phi(\tau) = H(\tau)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & p \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz = \\ & = \omega \left(\tilde{g}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p) \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для решения обратной задачи на конечном временном интервале применим к (2.3) теоремы о свертке и о дифференцировании оригинала. Тогда для нахождения поправок $\delta \bar{k}^{(n-1)}(z)$ при торцевой нагрузке $\phi(\tau) = H(\tau)$ будем иметь интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} R(z, \tau) dz = \omega(g(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau)), \\ & \tau \in [c, d], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где ядро интегрального уравнения (2.6) имеет вид

$$R(z, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial^2 W^{(n-1)}(z, t)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial W^{(n-1)}(z, t - \tau)}{\partial z} dt.$$

В работе натурный эксперимент был заменен вычислительным. Безразмерные термомеханические характеристики стержня $\bar{a}(z)$ восстанавливались в два этапа. На первом

этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций $\bar{a}^{(0)}(z) = kz + b$ на основе минимизации функционала невязки на компактном множестве. В случае теплового нагружения функционал невязки имеет вид

$$J_1 = \int_0^1 (g(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau, \quad (2.5)$$

а в случае механического нагружения

$$J_2 = \int_0^1 (f(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau. \quad (2.6)$$

На втором этапе на основе решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на конечном временном интервале находились поправки реконструируемых функций и строился итерационный процесс их уточнения по схеме $\bar{a}^{(n)}(z) = \bar{a}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{a}^{(n-1)}(z)$. Решение интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода является некорректной задачей, для ее регуляризации в работе применялся метод Тихонова А. Н. [14] Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении предельного количества итераций, равного 20, или при достижении соответствующим функционалом невязки (2.5), (2.6) порогового значения, равного 10^{-6} .

Следует заметить, что, исходя из уравнения (2.1), можно найти поправки для восстановления функции $\bar{\eta}(z) = \bar{E}(z) + \bar{\chi}(z)$. Для нахождения модуля Юнга при известном $\bar{\chi} = \text{const}$ необходимо из найденной в результате решения обратной задачи функции $\bar{\eta}(z)$ вычесть значения параметра $\bar{\chi}$.

3. Результаты вычислительных экспериментов

При проведении вычислительных экспериментов было принято: $n = 20$, $\varepsilon_0 = 10^{-6}$, $\lambda = 0,1$, $\omega = 0,05$. В качестве зондирующей нагрузки была взята нагрузка в виде функции Хевисайда $H(\tau)$. Измерения проводились на временном интервале $[0, 0,5]$ при 4 точках наблюдения внутри него.

В ходе вычислительных экспериментов исследовалось влияние параметра начального состояния $\bar{\chi}$ и параметра связанности δ_0

на результаты реконструкции термомеханических характеристик стержня. Ранее в работах [6–9] были выяснены особенности реконструкции при $\bar{\chi} = 0$.

В данной работе выяснено, что при малом параметре связанности, например, $\delta_0 = 0,03$ теплофизические характеристики ($\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$) восстанавливаются с хорошей точностью при любых значениях $\bar{\chi} \leq 0,05$. Так, при $\bar{\chi} = 0,05$ погрешность реконструкции монотонных функций не превосходит 4%, а немонотонных — 11%. При увеличении параметра связанности до $\delta_0 = 0,4$ погрешность реконструкции незначительно увеличивается на 1–2%. Несколько иная картина наблюдается при реконструкции механических характеристик ($\bar{E}(z)$, $\bar{\rho}(z)$). Здесь результаты реконструкции практически не зависят от параметра связанности δ_0 , но сильно зависят от значения параметра $\bar{\chi}$. При $\bar{\chi} = 0$ погрешность восстановления механических характеристик не превышает 3% для монотонных функций и 7% — для немонотонных. Однако при увеличении $\bar{\chi}$ погрешность реконструкция модуля Юнга $\bar{E}(z)$ быстро растет. Так, для монотонных функций погрешность восстановления $\bar{E}(z)$ при $\bar{\chi} = 0,005$ увеличивается до 6%, при $\bar{\chi} = 0,05$ до 12%, а при $\bar{\chi} = 0,1$ реконструкция становится уже невозможной.

На рисунках сплошной линией изображен точный закон, точками — восстановленный при отсутствии предварительных напряжений, пунктиром — восстановленный при параметре $\bar{\chi} = 0,01$.

На рис. 2 представлен результат восстановления убывающей функции $\bar{c}(z) = \cos(z)$ при известных торцевых значениях удельной теплоемкости. Начальное приближение $\bar{c}_0(z) = 1,1 - 0,5z$, параметр связанности $\delta_0 = 0,4$. Для достижения порогового значения в функционале (2.5) потребовалось 4 итерации. Погрешность реконструкции на последней итерации при $\bar{\chi} = 0$ не превысила 0,5%, а при $\bar{\chi} = 0,01$ увеличилась до 1,5%.

На рис. 3 приводится пример реконструкции немонотонной функции $\bar{E}(z) = z^2 - z + 1$. Начальное приближение $\bar{c}_0(z) = 0,9 - 0,35z$, параметр связанности $\delta_0 = 0,03$. Для достижения порогового значения в функционале (2.6) потребовалось 6 итераций. Погрешность реконструкции на последней итерации при $\bar{\chi} = 0$ не превысила 1%, а при $\bar{\chi} = 0,01$ — увеличилась до 6%.

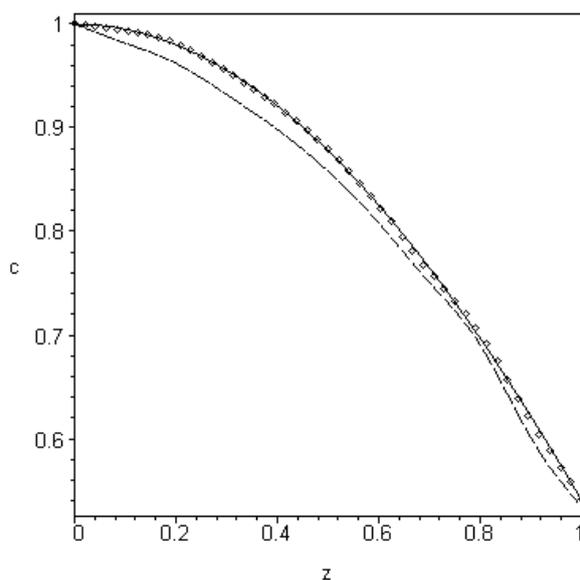


Рис. 2. Результаты реконструкции удельной теплоемкости

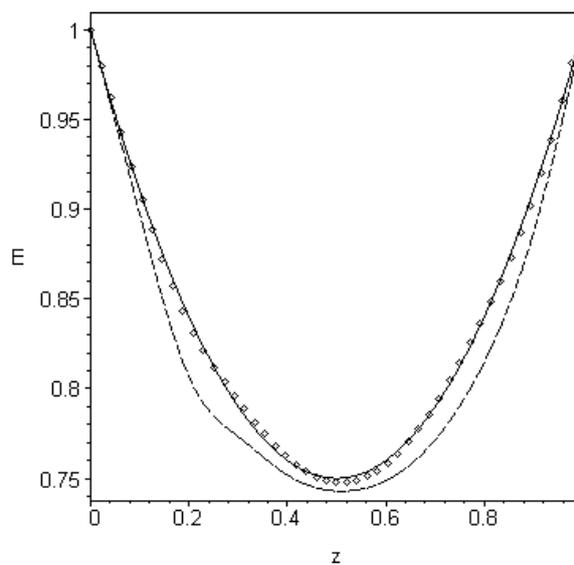


Рис. 3. Результаты реконструкции модуля Юнга

Литература

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
2. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
3. Апбасов С. О., Яхно В. Г. Обратная задача динамической несвязанной термоупругости // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений и дискретной математики. Новосибирск: НГУ, 1986. С. 63–70.
4. Lukaszewicz S. A., Babaei R., Qian R. E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // J. of Thermal Stresses. 2003. Vol. 26, №1. Pp. 13–23.
5. Ломазов В. А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: ОрелГТУ, 2002. 168 с.
6. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. №3. С. 24–30.
7. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях идентификации неоднородных свойств термоупругих тел // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. №1. С. 29–36.
8. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном подходе к восстановлению неоднородных свойств термоупругих тел // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2012. №4. С. 25–29.
9. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. №1. С. 217–224.
10. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. М. Введение в акустоупругость. Киев: Наукова думка, 1977. 150 с.
11. Robertson R. L. Determining residual stress from boundary measurements: a linearized approach // J. of Elasticity. 1998. Vol. 52. Pp. 63–73.
12. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
13. Недин Р. Д., Нестеров С. А. О некоторых обратных задачах при определении предварительного напряженного состояния // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013. Том II. С. 116–120.
14. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

References

1. Alifanov O.M., Artjuhin E.A., Rumjancev S.V. *Jekstremal'nye metody reshenija nekorrektnyh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 288 p. (In Russian)
2. Vatul'jan A.O. *Obratnye zadachi v mehanike deformiruемого tverdogo tela* [Inverse Problems in Solid Mechanics]. Moscow,

- Fizmatlit Publ., 2007, 224 p. (In Russian)
3. Apbasov S.O., Jahno V.G. Obratnaja zadacha dinamičeskoj nesvjazannoj termouprugosti [The inverse problem of dynamic thermoelasticity unbound] *Nekotorye voprosy differencial'nyh uravnenij i diskretnoj matematiki*. Novosibirsk, NGU Publ., 1986, pp. 63–70. (In Russian)
 4. Lukasievicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects. *J. of Thermal Stresses*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 13–23.
 5. Lomazov V.A. *Zadachi diagnostiki neodnorodnyh termouprugih sred* [Diagnostic tasks inhomogeneous thermoelastic media]. Orel, OrelSTU Publ., 2002, 168 p. (In Russian)
 6. Vatul'jan A.O., Nesterov S.A. Kojefficientnye obratnye zadachi termouprugosti dlja neodnorodnyh tel [Coefficient inverse problem of thermoelasticity for inhomogeneous bodies]. *Ekologičeskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomičeskogo sotrudničestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2009, no. 3, pp. 24–30. (In Russian)
 7. Vatul'jan A.O., Nesterov S.A. Ob osobennostjah identifikacii neodnorodnyh svojstv termouprugih tel [On peculiarities of identification properties of inhomogeneous thermoelastic bodies]. *Ekologičeskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomičeskogo sotrudničestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2011, no. 1, pp. 29–36. (In Russian)
 8. Vatul'jan A.O., Nesterov S.A. Ob odnom podhode k vosstanovleniju neodnorodnyh svojstv termouprugih tel [An approach to the recovery of thermoelastic properties of heterogeneous bodies]. *Izvestija vuzov. Sev.-Kavkaz. region. Estestv. nauki* [Proc. of the Universities. North-Caucasus region. Natural sciences], 2012, no. 4, pp. 25–29. (In Russian)
 9. Vatul'jan A.O., Nesterov S.A. Ob odnom sposobe identifikacii termouprugih harakteristik dlja neodnorodnyh tel [A method of identification of thermoelastic characteristics for inhomogeneous bodies]. *Inženerno-fizičeskij žurnal* [Journal of Engineering Physics], 2014, vol. 87, no. 1, pp. 217–224. (In Russian)
 10. Guz' A.N., Mahort F.G., Gushha O.M. *Vvedenie v akustouprugost'* [Introduction to acoustoelasticity]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1977, 150 p. (In Russian)
 11. Robertson R.L. Determining residual stress from boundary measurements: a linearized approach. *J. of Elasticity*, 1998, vol. 52, pp. 63–73.
 12. Novackij V. *Dinamičeskie zadachi termouprugosti* [Dynamic problems of thermoelasticity]. Moscow, Mir Publ., 1970, 256 p. (In Russian)
 13. Nedin R.D., Nesterov S.A. O nekotoryh obratnyh zadachah pri opredelenii predvaritel'nogo naprjazhennogo sostojanija [On some inverse problems in determining the pre-stressed state]. *Trudy XII Vserossijskoj konferencii "Mehanika deformiruемого tverdogo tela"* (Proc. of the 7th All-Russian Conference "Solid Mechanics"), Rostov-on-Don, 2013, vol. 2, pp. 116–120. (In Russian)
 14. Tihonov A.N., Gončarskij A.V., Stepanov V.V., Jagola A.G. *Čislennye metody reshenija nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 230 p. (In Russian)