ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2014. №1. С. 25–33

УДК 519.633; 551.511

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СУТОЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Гайденко О. С.[1], *Гайденко С. В.*[2]

NUMERICAL METHOD OF SOLUTION OF MATHEMATICIAN MODEL OF DIURNAL VARIATIONS OF METEOROLOGICAL FIELDS

Gaidenko O. S.*, Gaidenko C. V.*

* *Kuban State University, Krasnodar, Russia, e-mail: O_Gaidenko@mail.ru*

Abstract: The discrete analog of the system of nonstationary differential equations, which describe the dynamics of height changes of physical parameters of boundary stratum of atmosphere, is constructed on the basis of generalized solution. The iterative process of finding periodical by the time horizontal components of wind velocity, potential temperature, coefficient of turbulent viscosity, kinetic energy and the scale of turbulence is suggested.

Keywords: boundary stratum of atmosphere, ground stratum of atmosphere, potential temperature, coefficient of turbulent viscosity, Galerkin's method, periodical solutions.

Работа посвящена построению дискретного аналога системы нестационарных дифференциальных уравнений, описывающих динамику изменения по высоте физических параметров пограничного слоя атмосферы. Исследуемая математическая модель приведена в [1, 2].

Согласно принятой в метеорологии классификации [3], пограничный слой атмосферы вследствие турбулентного обмена характеризуется хорошо выраженным ходом температуры и других метеорологических величин (скорости ветра, характеристик влажности). Высота этого слоя в среднем составляет 1000–1500 м. В нижней части пограничного слоя принято выделять приземный слой атмосферы, в пределах которого метеорологические величины резко изменяются с высотой. Обычно определяют толщину приземного слоя из условия изменения физических параметров атмосферы не более 20 % их абсолютных значений, что для большинства метеорологических величин приводит к оценке приземного слоя порядка 50–100 м. Нижняя граница приземного слоя z_0 — параметр шероховатости, который характеризует динамическое взаимодействие атмосферы и подстилающей поверхности, принимающей периодически поток солнечной радиации. Значения этого параметра колеблются от долей миллиметра до одного метра.

Рассматриваемая математическая модель предполагает воздушный поток однородным по горизонтали. Ось x прямоугольной системы координат ориентирована по направлению геострофического ветра, то есть вдоль изобар. Искомые физические параметры пограничного слоя являются функциями времени t и высоты z. Перечислим неизвестные функции:

u, v — горизонтальные компоненты средней скорости ветра;

θ — потенциальная температура, которая в сухоадиабатическом термодинамическом процессе связана со средней абсолютной температурой равенством $\theta = T\left(\frac{1000\ \text{гПа}}{\text{p}}\right)^{0{,}286}$, здесь $p = p\,(z)$ — атмосферное давление на высоте z;

$b^2 = \frac{1}{2}\overline{(u')^2} + \frac{1}{2}\overline{(v')^2}$ — величина, пропорциональная средней кинетической энергии турбулентности ρb^2, ρ — плотность воздуха, u', v' — пульсационные значения компонент скорости, черта сверху означает усреднение;

l — масштаб турбулентности (путь смешения) — длина, характеризующая средний размер турбулентных возмущений;

K_M — коэффициент турбулентной вязкости;

ε — средняя скорость диссипации турбулентной энергии.

[1]Гайденко Олег Станиславович, аспирант кафедры высшей алгебры и геометрии Кубанского государственного университета; e-mail: O_Gaidenko@mail.ru.

[2]Гайденко Станислав Викторович, канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: SVGaidenko@mail.ru.

Известными предполагаются следующие параметры:

G — скорость геострофического ветра;

z_0 — параметр шероховатости;

$f = 2\omega \sin\phi$ — параметр Кориолиса, ω — угловая скорость вращения Земли, ϕ — географическая широта местности;

β — параметр плавучести, как и параметр Кориолиса определяется только географическим положением места наблюдения;

κ — постоянная Кармана, у большинства исследователей $\kappa = 0,4$;

θ_m — амплитуда суточных колебаний температуры на уровне шероховатости;

$\theta_{0\,0}$ — среднесуточное значение температуры (по шкале Кельвина) на этом уровне.

Замкнутая математическая модель, описывающая суточные изменения параметров пограничного слоя атмосферы, состоит из следующих уравнений.

Уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_M \frac{\partial\, u}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f\,(G - u) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_M \frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Уравнение колебаний температуры

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_H \frac{\partial \theta}{\partial z}\right).$$

Уравнение турбулентной энергии

$$\frac{\partial b^2}{\partial t} = K_M \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] - \\ - \beta K_H \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_Q \frac{\partial b^2}{\partial z}\right) - \varepsilon.$$

Здесь согласно полуэмпирической теории турбулентности полагают

$$K_H = \alpha_H K_M, \quad K_Q = \alpha_Q K_M, \quad K_M = c_0 b l,$$

$$\varepsilon = c_\varepsilon b^3 / l,$$

где α_H, α_Q, c_0, c_ε — эмпирические безразмерные константы. Постоянные α_H и α_Q — величины порядка единицы, для сокращения записи вводят одну константу $c = c_0^4 = c_\varepsilon^{4/3} = 0,046$.

Формула для масштаба турбулентности

$$l = -\kappa \frac{b/l}{\partial\,(b/l)\,/\partial z}$$

получена на основе гипотезы приближенного подобия и обобщает формулу Кармана $l = \kappa z$, справедливую вблизи поверхности почвы.

Поскольку функции K_M и ε задаются явно через b и l, то их можно исключить из числа неизвестных и далее рассматривать систему пяти дифференциальных уравнений с пятью неизвестными функциями. По временной переменной t все функции считаются периодическими с периодом сутки: $2\pi\omega$. На уровне шероховатости z_0 в данной модели заданы следующие граничные условия:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \theta = \theta_{0\,0} + \theta_m \sin \omega t,$$

$$\frac{\partial b^2}{\partial z} = 0, \quad l = \kappa z_0.$$

На верхней границе H пограничного слоя атмосферы приняты граничные условия

$$u = G, \quad v = 0, \quad \theta = \theta_{0\,0}, \quad b^2 = 0.$$

Последнее граничное условие для кинетической энергии противоречит равенству $K_M = c_0 b l$ и современным представлениям о физике атмосферы: «В свободной атмосфере турбулентный обмен (в смысле пульсаций скорости ветра) выражен ничуть не слабее, чем в пограничном слое. Однако роль трения в свободной атмосфере мала по сравнению с другими силами потому, что здесь малы вертикальные градиенты скорости ветра» [3]. Следует также отметить, что в большинстве принятых ранее моделей суточного хода температуры и скорости ветра коэффициент турбулентного обмена задавался априорно неубывающей функцией высоты, близкой к постоянной величине вне приземного слоя. Поэтому в настоящей работе принято более слабое граничное условие на верхней границе пограничного слоя атмосферы

$$\frac{\partial b^2}{\partial z} = 0.$$

1. Дифференциальная задача в безразмерных и нормированных переменных

В [1] при $f > 0$ ведены безразмерные переменные

$$t_n = f\,t, \quad z_n = \frac{f\,z}{G}, \quad u_n = \frac{u}{G}, \quad v_n = \frac{v}{G},$$

$$\theta_n = \frac{\theta - \theta_{0\,0}}{\theta_m}, \quad l_n = \frac{f\,l}{G}, \quad b_n^2 = \frac{\sqrt{c}\,b^2}{G^2},$$

$$K_n = \frac{f\,K_M}{G^2}, \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{f\,G^2},$$

а также безразмерные параметры $R_0 = \frac{G}{fz_0}$ — число Россби, $S_m = \frac{\beta\theta_m}{fG}$ — параметр температурной стратификации.

Реальная высота пограничного слоя $H = 1000$ м для средних широт ($\phi = \frac{\pi}{4}$) и скорости геострофического ветра $G = 10$ м/сек в безразмерных величинах есть величина $H_n = \frac{f\,H}{G}$ порядка 0,01. Временной суточный промежуток в безразмерных величинах $T_n = 4\pi\sin\phi \approx 8,9$. Для удобства сравнения численных результатов нормируем безразмерные независимые переменные

$$z' = \frac{R_0\,z_n - 1}{R_0 H_n - 1} \in [0;1]\,, \quad t' = \frac{t_n}{4\pi\sin\phi} \in [0;1]\,.$$

Также для удобства введем обозначения постоянных

$$p = \frac{1}{4\pi\sin\phi} \approx 0{,}1,$$

$$q = \frac{R_0}{R_0 H_n - 1} \approx 10^3 \div 10^2$$

и функции $b_n^2 = E$. Приближения указаны для средних широт при параметре шероховатости $z_0 \approx 1 \div 10$ см.

Далее в обозначениях безразмерных функций не будем указывать индекс, а также опустим штрих в обозначении нормированных независимых переменных. Рассматриваемая математическая модель в безразмерных функциях и нормированных независимых переменных представлена следующими дифференциальными задачами:

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial u}{\partial t}(z,t) = \\ \quad = v + q^2\dfrac{\partial}{\partial z}\left(K(z,t)\dfrac{\partial u}{\partial z}(z,t)\right) + \\ \qquad\qquad + f(z,t)\,, \\ p\dfrac{\partial v}{\partial t}(z,t) = 1 - u + \\ \quad + q^2\dfrac{\partial}{\partial z}\left(K(z,t)\dfrac{\partial v}{\partial z}(z,t)\right) + \\ \qquad\qquad + g(z,t)\,, \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = u_N(t)\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial \theta}{\partial t}(z,t) = \\ \quad = \alpha_H q^2\dfrac{\partial}{\partial z}\left(K(z,t)\dfrac{\partial \theta}{\partial z}(z,t)\right) + \\ \quad + f(z,t)\,, \\ \theta(0,t) = \theta_0(t)\,, \\ \theta(1,t) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial E}{\partial t} = \sqrt{c}qK\left[q\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \right. \\ \quad \left. + q\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \alpha_H S_m\dfrac{\partial \theta}{\partial z}\right] + \\ \quad + \alpha_Q q^2\dfrac{\partial}{\partial z}\left(K\dfrac{\partial E}{\partial z}\right) - \sqrt{c}\dfrac{E^2}{K}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial z}(0;t) = \dfrac{\partial E}{\partial z}(1;t) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} q\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{b}{l}\right) = -\kappa\left(\dfrac{b}{l}\right)^2\dfrac{1}{b}, \\ l(0;t) = \dfrac{\kappa}{R_0}. \end{cases}$$

Последняя дифференциальная задача легко интегрируется

$$l(z,t) = b(z,t)\,\kappa \times \\ \times\left(\frac{1}{R_0\,b(0,t)} + \frac{1}{q}\int\limits_0^z \frac{d\eta}{b(\eta,t)}\right). \tag{1.4}$$

Здесь в линейных задачах с целью их дальнейшего тестирования и возможного обобщения модели введены свободные члены дифференциальных уравнений. В реальной задаче граничная функция $u_N(t)$ равна единице, а $\theta(0;\,t) = \sin 2\,\pi\,t$.

В рассматриваемых задачах все функции по переменной t периодические с периодом 1. Следует отметить, что в математических моделях окружающей среды решения дифференциальных задач по временной переменной, как правило, должны удовлетворять условию периодичности. Однако предлагаемые при этом численные методы решения таких задач предполагают известным начальные значения искомых решений [4]. В данной работе выполнение условия периодичности предлагается обеспечить методом стрельбы в результате многократного решения аналогичных задач с начальными условиями.

Задача для компонент скорости ветра связана с задачей для потенциальной температуры только посредством коэффициента турбулентного обмена K. В нелинейной задаче для энергии турбулентности задействованы все неизвестные метеорологические величины. Предлагается следующий итерационный процесс.

Вначале задается коэффициент турбулентного обмена K, например по образцам, описанным в [1, 3] на основе эмпирических данных. Затем решаются задачи (1.1) и (1.2), после чего задача (1.3) решается относительно функции $E = b^2$, из равенства (1.4) вычисляется l и обновляется коэффициент турбулентного обмена $K = lb$. Итерационный процесс продолжается до стабилизации вычисляемых функций в пределах заданной точности.

Данные задач, вообще говоря, не являются гладкими функциями, поскольку получаются как численные решения других дифференциальных задач, либо являются аппроксимациями локальных измерений. Поэтому решения рассматриваемых дифференциальных задач естественно понимать в слабом смысле как элементы пространства С.Л. Соболева $W_2^{1,1}\left((0;1)\times(0;1)\right)$.

Отметим также, что в математической постановке задачи приземный слой никак не выделен. Учитывая эмпирическую информацию о существенном изменении метеорологических величин в пределах этого слоя, возможно, следует в дискретной модели сгустить сетку на одной десятой нижней части отрезка изменения переменной z.

Все описанные ниже алгоритмы протестированы на сетках порядка трехсот узлов по каждой переменой. Коэффициент турбулентной вязкости задавался кусочно-линейной по z функцией, которая выше приземного слоя постоянна. Абсолютные погрешности — величины порядка квадрата шага, что соответствует погрешности аппроксимации дифференциальных задач их дискретными аналогами. Метод стрельбы приводит к периодическим решениям с указанной точностью за 3–4 шага итераций при не очень близких начальных условиях.

2. Линейные задачи для компонент вектора горизонтальной скорости ветра и потенциальной температуры

Под обобщенным решением смешанной задачи (1.1) понимаем пару функций

$$u\left(z,t\right), v\left(z,t\right) \in W_2^{1,1}\left((0;1)\times(0;1)\right),$$

которая удовлетворяет при почти всех $t\in(0;1)$ краевым условиям и следующим интегральным тождествам:

$$\int\limits_0^1 p\frac{\partial u}{\partial t}\left(z,t\right)\phi\left(z\right)dz = -q^2\int\limits_0^1 K\left(z,t\right)\frac{\partial u}{\partial z}\left(z,t\right)\phi'\left(z\right)dz + \int\limits_0^1\left(v\left(z,t\right)+f\left(z,t\right)\right)\phi\left(z\right)dz,$$

$$\int\limits_0^1 p\frac{\partial v}{\partial t}\left(z,t\right)\phi\left(z\right)dz = -q^2\int\limits_0^1 K\left(z,t\right)\frac{\partial v}{\partial z}\left(z,t\right)\phi'\left(z\right)dz + \int\limits_0^1\left(1-u\left(z,t\right)+g\left(z,t\right)\right)\phi\left(z\right)dz$$

для всех функций $\phi(z) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0;1)$ (ноль сверху означает нулевые граничные значения).

Поскольку в одномерном случае пространство С.Л. Соболева $W_2^1(0;1)$ вложено в пространство $C[0;1]$, то граничные условия выполняются по непрерывности. Выполнение начальных условий или условий периодичности по t предполагается также по непрерывности для почти всех $z\in(0;1)$.

Приближенные обобщенные решения ищем в виде линейных комбинаций

$$u^{(N)}\left(z,t\right)=\sum_{j=1}^{N-1}u_j\left(t\right)\phi_j\left(z\right)+u_N\left(t\right)\phi_N\left(z\right),$$

$$v^{(N)}\left(z,t\right)=\sum_{j=1}^{N-1}v_j\left(t\right)\phi_j\left(z\right).$$

Здесь N — натуральное число, которому соответствует разбиение отрезка $0\leqslant z\leqslant 1$ точками $z_j = jh$ с шагом $h=\frac{1}{N}$, $j=0,\ldots,N$, $\phi_j(z)$ — кусочно-линейные непрерывные финитные функции из пространства $W_2^1(0;1)$, каждая из которых равна единице в «своем» узле z_j и равна нулю в остальных узлах.

Тем самым неизвестные коэффициенты как функции аргумента t являются приближенными значениями искомых решений при фиксированном значении $z = z_j$. Для этих коэффициентов далее методом Галёркина, который основан на принятом нами определении обобщенного решения, будут получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с условием периодичности.

Функции $K(z,t), f(z,t)$ и $g(z,t)$ в дискретной задаче заменяем их кусочно-линейными приближениями вида

$$K^{(N)}(z,t) = \sum_{j=0}^{N} K_j(t)\phi_j(z).$$

Обобщенное решение задачи (1.2) определяется аналогично предыдущему. Приближенное решение также представим в виде

$$\theta^{(N)}(z,t) = \theta_0(t)\phi_0(z) + \sum_{j=1}^{N-1} \theta_j(t)\phi_j(z).$$

При преобразовании дифференциальных задач в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве функций $\phi(z)$ в интегральных тождествах берем $\phi_i(z)$, что приводит к необходимости вычисления скалярных произведений в $L_2(0;1)$ базисных функций и их обобщенных производных. С учетом вычисленных скалярных произведений после умножения всех уравнений на $6/h$ получаем относительно вектор-функций

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_{N-1}(t))^T,$$

$$\mathbf{v}(t) = (v_1(t), \ldots, v_{N-1}(t))^T$$

в матричной форме следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} p\mathbf{B}_1\mathbf{u}'(t) = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{v}(t) + \mathbf{F}(t), \\ p\mathbf{B}_1\mathbf{v}'(t) = -\mathbf{B}_1\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}_1\mathbf{v}(t) + \mathbf{G}(t). \end{cases}$$

Здесь введены две симметричные трехдиагональные матрицы размером $(N-1) \times (N-1)$: матрица $\mathbf{B}_1$ постоянная с четверками на диагонали, единицами над и под диагональю; матрица $\mathbf{C}_1(t)$ представлена произведением константы $\frac{3q^2}{h^2}$ на трехдиагональную симметричную матрицу с диагональными элементами $-[K_{i-1}(t) + 2K_i(t) + K_{i+1}(t)]$ и соседними элементами $[K_{i-1}(t) + K_i(t)]$ — слева, $[K_i(t) + K_{i+1}(t)]$ — справа, $i = 1, \ldots, N-1$.

Компоненты векторов свободных членов

$$F_i(t) = f_{i-1}(t) + 4f_i(t) + f_{i+1}(t),$$
$$i = 1, \ldots, N-2,$$

$$F_{N-1}(t) = f_{N-2}(t) + 4f_{N-1}(t) + f_N(t) + \\ + \frac{3q^2}{h^2}[K_{N-1}(t) + K_N(t)]u_N(t) - pu'_N(t),$$
$$G_i(t) = g_{i-1}(t) + 4g_i(t) + g_{i+1}(t) + 6,$$
$$i = 1, \ldots, N-2,$$

$$G_{N-1}(t) = g_{N-2}(t) + 4g_{N-1}(t) + \\ + g_N(t) + 6 - u_N(t).$$

Аналогично в матричной форме система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора

$$\mathbf{\Theta}(t) = (\theta_1(t), \ldots, \theta_{N-1}(t))^T$$

примет вид

$$p\mathbf{B}_1\mathbf{\Theta}'(t) = \alpha_H\mathbf{C}_1(t)\mathbf{\Theta}(t) + \mathbf{F}(t),$$

где

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}_1\mathbf{f}(t) + \mathbf{F}_\theta(t),$$
$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_{N-1}(t)),$$

в векторе $\mathbf{F}_\theta(t)$ могут быть отличны от нуля только первая компонента

$$-p\theta'_0(t) + \alpha_H\frac{3q^2}{h^2}[K_0(t) + K_1(t)]\theta_0(t) + f_0(t)$$

и последняя $f_N(t)$.

Численно для каждой системы будем решать задачу Коши с дальнейшей «пристрелкой» начальных условий, чтобы удовлетворить условиям периодичности. Для всех систем по переменной t введем равномерную сетку $t_l = l\tau$, $l = 0, \ldots, M$, M — натуральное число. Тем самым все коэффициенты как функции аргумента t ищем приближенно в узлах этой сетки. Поскольку искомые приближенные решения $\theta^{(N)}(z,t)$, $u^{(N)}(z,t)$, $v^{(N)}(z,t)$, $K^{(N)}(z,t)$, $E^{(N)}(z,t)$ связаны системой дифференциальных задач, то при построении алгоритма поиска приближенных решений этой системы необходимо учитывать, что коэффициенты, свободные члены и иные слагаемые в этих дифференциальных задачах доступны только в узлах сетки (z_i, t_l) с кусочно-линейным восполнением по переменной z на каждом временном слое t_l. Дискретное задание правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений приводит в численных методах к необходимости использовать значения этих функций только в узлах сетки, то есть методы типа Рунге–Кутта недоступны. Возможно лишь применение явного метода Эйлера с локальной погрешностью порядка τ^2 или неявного метода трапеций с локальной погрешностью τ^3. Последний метод предпочтительней из-за лучшей точности и устойчивости соответствующей разностной схемы, его глобальная погрешность — величина порядка τ^2. Шаги h и τ будут близки, кусочно-линейная аппроксимация по z функций класса $C^2\,[0;1]$ дает погрешность порядка h^2, то есть порядок погрешности одинаков по обеим переменным.

Основываясь на квадратурной формуле трапеций, приходим к неявному одношаговому методу решения задачи Коши. В узловой точке $t_l = l\tau$ относительно $(N-1)$-мерных векторов $\mathbf{u}_l \approx \mathbf{u}\,(t_l)$ и $\mathbf{v}_l \approx \mathbf{v}\,(t_l)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left(p\mathbf{B}_1 - \dfrac{\tau}{2}\mathbf{C}_1\,(t_{l+1})\right)\mathbf{u}_{l+1} - \dfrac{\tau}{2}\mathbf{B}_1\mathbf{v}_{l+1} = \\ = \left(p\mathbf{B}_1 + \dfrac{\tau}{2}\mathbf{C}_1\,(t_l)\right)\mathbf{u}_l + \dfrac{\tau}{2}\mathbf{B}_1\mathbf{v}_l + \\ \quad + \dfrac{\tau}{2}\left(\mathbf{F}\,(t_l) + \mathbf{F}\,(t_{l+1})\right), \\ \dfrac{\tau}{2}\mathbf{B}_1\mathbf{u}_{l+1} + \left(p\mathbf{B}_1 - \dfrac{\tau}{2}\mathbf{C}_1\,(t_{l+1})\right)\mathbf{v}_{l+1} = \\ = -\dfrac{\tau}{2}\mathbf{B}_1\mathbf{u}_l + \left(p\mathbf{B}_1 + \dfrac{\tau}{2}\mathbf{C}_1\,(t_l)\right)\mathbf{v}_l + \\ \quad + \dfrac{\tau}{2}\left(\mathbf{G}\,(t_l) + \mathbf{G}\,(t_{l+1})\right). \end{cases}$$

Это система $2\,(N-1)$ уравнений относительно такого же количества компонент векторов $\mathbf{u}_{l+1}$ и $\mathbf{v}_{l+1}$. Сведем эту систему к последовательному решению систем порядка $N-1$.

Введем симметричную трехдиагональную матрицу

$$\mathbf{A}_1 = \frac{2}{\tau}p\mathbf{B}_1 - \mathbf{C}_1\,(t_{l+1})\,.$$

После умножения на $2/\tau$ полученная на $(l+1)$-м временном слое система запишется в виде

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{u} - \mathbf{B}_1\mathbf{v} = \mathbf{\Phi}, \\ \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{A}_1\mathbf{v} = \mathbf{\Psi}. \end{cases}$$

Здесь временно опущены индексы у $(N-1)$-мерных векторов $\mathbf{u}_{l+1}$ и $\mathbf{v}_{l+1}$, а также введены обозначения $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ для векторов свободных членов.

Заметим, что постоянная матрица $\mathbf{B}_1$ обратима (диагональные элементы доминируют), поэтому второе матричное уравнение равносильно равенству

$$\mathbf{u} = -\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{v} + \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{\Psi}.$$

Подставив это представление вектора $\mathbf{u}$в первое матричное уравнение, получим систему $(N-1)$-го порядка относительно вектора v:

$$\left(\mathbf{A}_1\mathbf{P} - \mathbf{B}_1\right)\mathbf{v} = \mathbf{\Phi} - \mathbf{A}_1\mathbf{r},$$

где матрица

$$\mathbf{P} = -\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{C}_1\,(t_{l+1}) - \frac{2}{\tau}p\mathbf{E},$$

вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{\Psi}.$$

Трехдиагональная матрица $\mathbf{B}_1$ постоянна, обратную к ней можно вычислить один раз. К сожалению, обратная к трехдиагональной матрица $\mathbf{B}_1^{-1}$ оказывается заполненной, поэтому полученную для $\mathbf{v}_{l+1}$ систему $(N-1)$-го порядка приходится решать методом Гаусса. После отыскания вектора $\mathbf{v}_{l+1}$ вектор $\mathbf{u}_{l+1}$ находится явно:

$$\mathbf{u}_{l+1} = \mathbf{P}\mathbf{v}_{l+1} + \mathbf{r}.$$

Для потенциальной температуры аналогично получаем одношаговый неявный метод второго порядка точности. Так, в узле $t_l = l\tau$ относительно вектора $\mathbf{\Theta}_{l+1} \approx \mathbf{\Theta}\,(t_{l+1})$ возникает система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \left(p\mathbf{B}_1 - \alpha_H\frac{\tau}{2}\mathbf{C}_1\,(t_{l+1})\right)\mathbf{\Theta}_{l+1} = \\ = \left(p\mathbf{B}_1 + \alpha_H\frac{\tau}{2}\mathbf{C}_1\,(t_l)\right)\mathbf{\Theta}_l + \\ + \frac{\tau}{2}\left(\mathbf{F}\,(t_l) + \mathbf{F}\,(t_{l+1})\right). \end{aligned}$$

Матрица слева трехдиагональная, система решается методом прогонки.

3. Нелинейная задача для кинетической энергии турбулентности

Дифференциальное уравнение задачи (1.3) рассмотрим в виде

$$p\frac{\partial E}{\partial t} = \alpha_Q q^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(K(z;t)\frac{\partial E}{\partial z}\right) - \\ - \sqrt{c}\frac{E^2(z;t)}{K(z;t)} + f(z;t),$$

где к функции $f(z;t)$ отнесены слагаемые из линейных задач

$$\sqrt{c}qK\left[q\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + q\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \alpha_H S_m \frac{\partial \theta}{\partial z}\right],$$

которые в итерационном процессе в момент решения нелинейной задачи предполагаются известными. Функция $K(z;t)$ задана в виде кусочно-линейного по z приближения

$$K^{(N)}(z;t) = \sum_{j=0}^{N} K_j(t)\,\phi_j(z),$$

а выражения в квадратных скобках известны в виде кусочно-постоянных по z функций с гладкими по t коэффициентами (в вычислительном алгоритме коэффициенты доступны только в узловых точках). На этапе тестирования к $f(z;t)$ могут быть отнесены также дополнительные слагаемые, соответствующие тестовым решениям.

С учетом однородных граничных условий второго рода под обобщенным решением задачи (3) понимаем функцию $E(z;t) \in W_2^{1,1}((0;1)\times(0;1))$, которая удовлетворяет при почти всех $t \in (0;1)$ интегральному тождеству

$$p\int_0^1 \frac{\partial E}{\partial t}(z,t)\,\phi(z)\,dz = \\ = -\alpha_Q q^2 \int_0^1 K(z,t)\frac{\partial E}{\partial z}(z,t)\,\phi'(z)\,dz - \\ - \sqrt{c}\int_0^1 \frac{E^2(z,t)\,\phi(z)}{K(z,t)}dz + \int_0^1 f(z,t)\,\phi(z)\,dz$$

для всех функций $\phi(z) \in W_2^1(0;1)$. Условие периодичности (либо начальное условие) выполняется непосредственно по непрерывности при почти всех $z \in (0;\ 1)$.

Далее ищем приближенное решение в виде

$$E^{(N)}(z,t) = \sum_{j=0}^{N} E_j(t)\,\phi_j(z),$$

где $E_j(t)$ — неизвестные функции, которые в методе Галёркина должны быть решениями нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$p\sum_{j=0}^{N} E_j'(t)(\phi_j,\phi_i) = \\ = -\alpha_Q q^2 \sum_{j=0}^{N} E_j(t)\,(K(z,t)\,\phi_j,\phi_i) - \\ - \sqrt{c}\int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{N} E_j(t)\,\phi_j(z)\right)^2 \frac{\phi_i(z)}{K(z,t)}dz + \\ + \int_0^1 f(z;t)\,\phi_i(z)\,dz.$$

С учетом явного задания функции $f(z;\ t)$ последний интеграл вычисляется точно. Далее введем вектор-функцию $\mathbf{F}(t)$ с компонентами

$$F_i(t) = \int_0^1 f(z;t)\,\phi_i(z)\,dz$$

для $i = 0, 1, \ldots, N$.

Для квадратичной части интегрального равенства также введем вектор-функцию $\mathbf{D}[\mathbf{E}(t)]$ с компонентами

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{N} E_j(t)\,\phi_j(z)\right)^2 \frac{\phi_i(z)}{K(z,t)}dz = \\ = a_i(t)\,E_{i-1}^2(t) + b_i(t)\,E_i^2(t) + \\ + c_i(t)\,E_{i+1}^2(t) + 2m_i(t)\,E_{i-1}(t)\,E_i(t) + \\ + 2n_i(t)\,E_i(t)\,E_{i+1}(t),$$

где для $i = 1, \ldots, N$ все коэффициенты квадратичных форм вычисляются точно.

В векторной форме нелинейная дифференциальная система относительно функции

$$\mathbf{E}(t) = (E_0(t), \ldots, E_N(t))^T$$

имеет вид

$$p\mathbf{B}_0\mathbf{E}'(t) = \\ = \mathbf{C}_0(t)\,\mathbf{E}(t) - \frac{6}{h}\sqrt{c}\mathbf{D}[\mathbf{E}(t)] + \frac{6}{h}\mathbf{F}(t).$$

Здесь постоянная трехдиагональная матрица $\mathbf{B}_0$ отличается от введенной ранее матрицы $\mathbf{B}_1$ помимо размера тем, что ее крайние диагональные элементы не четверки, а двойки. Симметричная трехдиагональная матрица $\mathbf{C}_0\left(t\right)$ отличается от матрицы $\mathbf{C}_1\left(t\right)$ множителем α_Q и дополнительными крайними строками: первая срока начинается элементами $-\left[K_0+K_1\right]$ и $\left[K_0+K_1\right]$, а последняя заканчивается элементами $\left[K_{N-1}+K_N\right]$ и $-\left[K_{N-1}+K_N\right]$.

Основываясь по-прежнему на квадратурной формуле трапеций, после интегрирования между временными слоями получаем неявную разностную схему. Относительно неизвестного вектора $\mathbf{E}\left(t_{l+1}\right)$это система с квадратичной нелинейностью:

$$\begin{cases} \beta_0E_0+\gamma_0E_1+ \\ \qquad +\dfrac{6\sqrt{c}}{h}\left(b_0E_0^2+c_0E_1^2+2n_0E_0E_1\right)=\Phi_0^{(l)}, \\ \alpha_iE_{i-1}+\beta_iE_i+\gamma_iE_{i+1}+ \\ \qquad +\dfrac{6\sqrt{c}}{h}\big(a_iE_{i-1}^2+b_iE_i^2+c_iE_{i+1}^2+ \\ \qquad +2m_iE_{i-1}E_i+2n_iE_iE_{i+1}\big)=\Phi_i^{(l)}, \\ \qquad i=1,\ldots,N-1, \\ \alpha_NE_{N-1}+\beta_NE_N+\dfrac{6\sqrt{c}}{h}\big(a_NE_{N-1}^2+ \\ \qquad +b_NE_N^2+2m_NE_{N-1}E_N\big)=\Phi_N^{(l)}. \end{cases}$$

Здесь греческими буквами обозначены элементы трехдиагональной матрицы $\frac{2}{\tau}p\mathbf{B}_0-\mathbf{C}_0\left(t_{l+1}\right)$, и введен вектор

$$\mathbf{\Phi}^{(l)}=\left(\mathbf{C}_0\left(t_l\right)+p\frac{2}{\tau}\mathbf{B}_0\right)\mathbf{E}\left(t_l\right)- \\ -\frac{6}{h}\sqrt{c}\mathbf{D}\left[\mathbf{E}\left(t_l\right)\right]+\frac{6}{h}\left(\mathbf{F}\left(t_l\right)+\mathbf{F}\left(t_{l+1}\right)\right).$$

Введем также обозначение для нелинейного оператора в левой части системы, которую в операторной форме запишем в виде

$$\mathbf{\Omega}\left(\mathbf{E}\left(t_{l+1}\right)\right)-\mathbf{\Phi}^{(l)}=0.$$

Для решения последней системы применим метод Ньютона с трехдиагональной матрицей Якоби:

$$\mathbf{E}^{(k+1)}=\mathbf{E}^{(k)}-\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{E}^{(k)}\right)\left(\mathbf{\Omega}\left(\mathbf{B}^{(k)}\right)-\mathbf{\Phi}^{(l)}\right), \\ k=0,1,2,\ldots.$$

В качестве начального приближения $\mathbf{E}^{(0)}$ можно брать найденное на предыдущем временном слое приближение к $\mathbf{E}\left(t_l\right)$. Матрицу Якоби $\mathbf{J}\left(\mathbf{E}^{(k)}\right)$ можно не обращать, достаточно на каждом шаге итераций в методе Ньютона прогонкой решать алгебраическую систему

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{E}^{(k)}\right)\boldsymbol{\eta}=\mathbf{\Omega}\left(\mathbf{E}^{(k)}\right)-\mathbf{\Phi}^{(l)},$$

а затем полагать

$$\mathbf{E}^{(k+1)}=\mathbf{E}^{(k)}-\boldsymbol{\eta}.$$

Оканчиваются итерации, как только все компоненты вектора $\boldsymbol{\eta}$ по модулю будут меньше заданной точности, которую можно брать величиной порядка локальной погрешности одношагового метода трапеций, то есть τ^3. Ввиду высокой скорости сходимости метода Ньютона для достижения указанной точности достаточно двух или трех шагов итераций, что подтверждается тестированием описанного алгоритма.

4. Вычисление коэффициента турбулентной вязкости

Из равенства (1.4), умноженного на $b\left(z,t\right)=\sqrt{E\left(z,t\right)}$, имеем

$$K\left(z,t\right)= \\ =E\left(z,t\right)\kappa\left(\frac{1}{R_0b\left(0,t\right)}+\frac{1}{q}\int\limits_0^z\frac{d\eta}{b\left(\eta,t\right)}\right).$$

Отсюда для коэффициентов линейной комбинации

$$K^{(N)}\left(z,t\right)=\sum_{i=0}^{N}K_i\left(t\right)\phi_i\left(z\right)$$

получаем явное представление

$$K_i\left(t\right)=E_i\left(t\right)\kappa\left(\frac{1}{R_0\sqrt{E_0\left(t\right)}}+\frac{1}{q}\int\limits_0^{z_i}\frac{d\eta}{\xi}\right),$$

$$\xi=\sqrt{\sum_{j=0}^{i}E_j\left(t\right)\phi_j\left(\eta\right)}.$$

Последний интеграл вычисляется точно

$$\int\limits_0^{z_i}\frac{d\eta}{\xi}=2h\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{\sqrt{E_{j-1}\left(t\right)}+\sqrt{E_j\left(t\right)}}.$$

Литература

1. *Зилитинкевич С. С.* Динамика пограничного слоя атмосферы. Ленинград: Гидрометеорологическое издательство, 1970. 284 с.
2. *Семенчин Е. А., Наац В. И., Наац И. Э.* Математическое моделирование нестационарного переноса примеси в пограничном слое атмосферы. М.: Издательство физико-математической литературы, 2003. 291 с.
3. *Матвеев Л. Т.* Физика атмосферы. Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 2000. 779 с.
4. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.

References

1. Zilitinkevich S.S. *Dinamika pogranichnogo sloja atmosfery* [The dynamics of the atmospheric boundary layer]. Leningrad, Gidrometeorologicheskoe izdatel'stvo Publ., 1970. 284 p.
2. Semenchin E.A., Naac V.I., Naac I.Je. *Matematicheskoe modelirovanie nestacionarnogo perenosa primesi v pogranichnom sloe atmosfery* [Mathematical modelling of non-stationary pollutant transfer in the boundary layer of the atmosphere]. Moscow, Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury Publ., 2003. 291 p.
3. Matveev L.T. *Fizika atmosfery* [Atmospheric physics]. Saint-Petersburg, Gidrometeoizdat Publ., 2000. 779 p.
4. Marchuk G.I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhajushhej sredy* [Mathematical modeling in environmental problems]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 319 p.

Статья поступила 14 июня 2013 г.