

УДК 539.4

КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

Леоненко Д. В.¹

VIBRATIONS OF CIRCULAR THREE-LAYER PLATES ON EN PASTERNAK ELASTIC FOUNDATION

Leonenko D. V.*

* Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus, e-mail: leoden@tut.by

Abstract: The axisymmetrical vibrations of elastic circular three-layer plate under the action of the loads of rectangular form on an elastic foundation are considered. Reaction of foundation was described on the base of Pasternak's model. For the kinematics description asymmetrical on the thickness of package accepted hypotheses broken line. Filler is light. Analytical deciding a problem are received and their numeric analysis are conducted.

Keywords: circular three-layer plate, Winkler elastic foundation, Pasternak elastic foundation, axisymmetrical vibrations.

Введение

Многослойные конструкции широко применяются в промышленности и машиностроении. В монографиях [1–3] рассмотрены вопросы статики, динамики и устойчивости трехслойных элементов конструкций, не связанных с упругим основанием. В работах [4, 5] исследовано поведение трехслойных стержней и пластин на упругом основании Винклера. Исследование однородных элементов конструкций на упругом основании проведено в [6].

В настоящей работе рассмотрены свободные и вынужденные колебания сплошных упругих трехслойных пластин круговой формы с легким заполнителем, скрепленных с упругим основанием Пастернака.

1. Постановка задачи

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, ϕ, z . Для изотропных несущих слоев, толщиной $h_1 \neq h_2$, приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине заполнитель является ($h_3 = 2c$) легким, т. е. в нем не учитывается работа напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении. Вертикальная нагрузка $q(r, t)$ распределена по внешней поверхности пластины (рис. 1). К наружной грани второго несущего слоя приложена реакция упругого основания q_R . На границах слоев перемещения непрерывны. На внешнем контуре пластины предполагается наличие

жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют ($u_\phi^{(k)} = 0$, k — номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной плоскости u не зависят от координаты ϕ , то есть рассматриваются $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми.

Уравнения движения рассматриваемой пластины получены из вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W - A) dt = 0, \quad (1.1)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta R - \delta W - \delta A) dt = 0,$$

где $A = A_1 + A_2$ — суммарная потенциальная энергия внешних нагрузок и контурных усилий, W — потенциальная энергия деформации, K — кинетическая энергия системы.

При определении потенциальной энергии внешних нагрузок и контурных усилий считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложена поверхностная нагрузка $q(r, t)$, к наружной поверхности второго несущего слоя — реакция основания q_R , на контур пластины действуют силы и мо-

¹Леоненко Денис Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта; e-mail: leoden@tut.by.

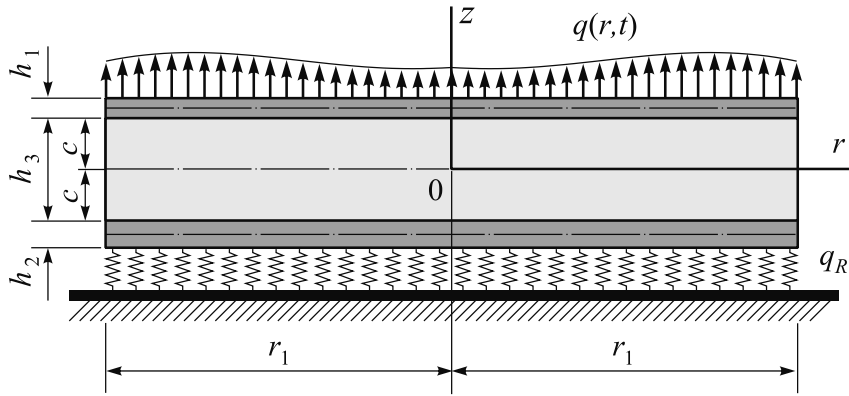


Рис. 1. Расчетная схема

менты T_r^1 , H_r^1 , M_r^1 , Q^1 :

$$\delta A_1 = - \iint_S (q - q_R) \delta w dS,$$

$$\begin{aligned} \delta A_2 = \\ = -r_1 \int_0^{2\pi} (T_r^1 \delta u + H_r^1 \delta \psi + M_r^1 \delta w_{,r} + Q^1 \delta w) d\phi, \end{aligned}$$

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\phi^{(k)} \delta \varepsilon_\phi^{(k)}) dz \right] dS,$$

$$\begin{aligned} \delta K = \\ = \sum_{k=1}^3 \frac{\rho_k}{2} \iint_S \int_{h_k} \delta \left[\left(\dot{u}_r^{(k)} \right)^2 + \dot{w}^2 \right] dz dS. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Связь между реакцией и прогибом принимаем в соответствии с моделью Пастернака, согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w - t_f \Delta w + m_f \ddot{w}, \quad (1.3)$$

где κ_0 — коэффициент сжатия среды, формально совпадающий с коэффициентом жесткости модели Винклера, t_f — коэффициент сдвига среды, m_f — массовый член (удельная масса) упругого основания, Δ — оператор Лапласа в полярных координатах

$$\Delta w = w_{,rr} + \frac{w_{,r}}{r},$$

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате

После подстановки выражений для вариаций энергий (1.2) в (1.1) с учетом (1.3) получаем в перемещениях следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую поперечные колебания круговой трехслойной пластины на упругом основании Пастернака:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0,$$

$$L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0,$$

$$\begin{aligned} L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) + \\ + t_f \Delta w - M_0^* \ddot{w} - \kappa_0 w = -q. \quad (1.4) \end{aligned}$$

где M_0^* — удельная масса пластины и основания

$$M_0^* = M_0 + m_f,$$

коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 , L_3 определяются соотношениями в [3].

В качестве начальных принимаем условия

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (1.5)$$

Задача отыскания функций $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ замыкается присоединением к (1.4) начальных (1.5) и граничных условий.

2. Свободные колебания

Положив $q = 0$, после преобразований система (1.4) сведется к виду

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r,$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r,$$

$$\Delta \Delta w - 2t^2 \Delta w + \kappa^4 w + M_f^4 \ddot{w} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь величины κ , t_f , M_f , b_1 , b_2 — характеристики системы пластина-основание.

Т.к. перемещения в центре пластины ($r = 0$) конечны, то полагаем $C_2 = C_4 = 0$.

Искомый прогиб принимаем в виде

$$w(r, t) = v^*(r)T(t). \quad (2.2)$$

где $v^*(r)$ — неизвестная координатная функция, $T(t)$ — неизвестная функция времени.

После подстановки выражения (2.2) в последнее уравнение системы (2.1) следуют уравнения для определения координатной функции $v^*(r)$ и функции времени T

$$\begin{aligned} \Delta\Delta v^* - 2t^2\Delta v^* - \lambda^4 v^* &= 0, \\ \ddot{T} + \omega^2 T &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ω — частота собственных колебаний,

$$\lambda^4 = \beta_f^4 - \kappa^4, \quad \beta_f^4 = M_f^4 \omega^2.$$

Решение уравнения (2.3) можно представить в виде [7]

$$v^*(\lambda r) = C_5 J_0(s^-(\lambda, t)r) + C_6 I_0(s^+(\lambda, t)r) + C_7 Y_0(s^-(\lambda, t)r) + C_8 K_0(s^+(\lambda, t)r), \quad (2.4)$$

где J_n, Y_n — функции Бесселя n -го порядка первого и второго рода; I_n, K_n — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда; C_5, \dots, C_8 — константы интегрирования; $s^\pm(\lambda, t)$ — параметр, выражаемый через величины t и λ

$$s^\pm(\lambda, t) = \sqrt{\sqrt{t^4 + \lambda^4} \pm t^2}.$$

Поскольку функции $Y_0(\lambda r)$ и $K_0(\lambda r)$ не ограничены вблизи $r = 0$ [8], необходимо в (2.4) положить постоянные интегрирования $C_7 = C_8 = 0$.

При заземленном контуре трансцендентное уравнение для определения λ_n круговой трехслойной пластины, связанной с упругим основанием Пастернака, следует из соответствующих граничных условий

$$s^+ I_1(s^+ r_1) J_0(s^- r_1) + s^- J_1(s^- r_1) I_0(s^+ r_1) = 0. \quad (2.5)$$

После численного решения уравнений (2.5) частоты собственных колебаний ω_n определяются через λ_n .

В общем случае для описания прогиба рассматриваемой пластины при собственных поперечных колебаниях вводится система собственных ортонормированных функций $v_n^* \equiv v_n^*(s_n^\pm)$, где

$$v_n^*(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n^*} \left[J_0(s_n^- r) - \frac{J_0(s_n^- r_1)}{I_0(s_n^+ r_1)} I_0(s_n^+ r) \right]. \quad (2.6)$$

Константы d_n^* определяются из требования нормировки функций (2.6)

$$(d_n^*)^2 = \int_0^{r_1} \left[J_0(s_n^- r) - \frac{J_0(s_n^- r_1)}{I_0(s_n^+ r_1)} I_0(s_n^+ r) \right]^2 r dr.$$

Функции времени T_n определяются из дифференциального уравнения системы (2.3)

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t), \quad (2.7)$$

где A_n и B_n — константы интегрирования, определяемые из начальных условий (1.5).

В конечном виде искомый динамический прогиб трехслойной круговой пластины на упругом основании представляется с помощью разложения в ряд по фундаментальной системе собственных ортонормированных функций (2.7)

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n^* T_n(t), \\ \psi(r, t) &= b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^* T_n(t), \\ u(r, t) &= b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^* T_n(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Вынужденные колебания

В задаче о вынужденных колебаниях круговой трехслойной пластины, скрепленной с инерционным упругим основанием Пастернака, внешнюю нагрузку и искомое решение разлагаем в ряды

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n^* T_n(t), \\ \psi(r, t) &= b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^* T_n(t), \\ u(r, t) &= b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^* T_n(t), \\ q(r, t) &= M_0^* \sum_{n=0}^{\infty} v_n^* q_n(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

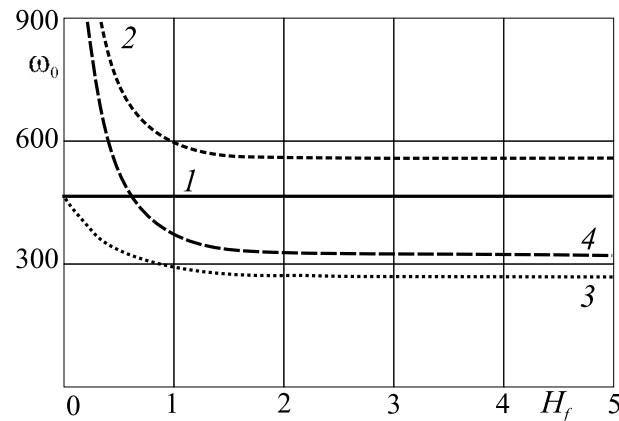


Рис. 2. Изменение частоты собственных колебаний ω_0 в зависимости от толщины сжимаемого слоя основания: 1, 2 — безынерционные основания Винклера и Пастернака; 3, 4 — инерционные основания Винклера и Пастернака

где q_n — коэффициенты разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций (2.6)

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0^*} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n^* r dr.$$

Таким образом, соотношения (3.1) с учетом (2.6) описывают перемещения при вынужденных колебаниях круговой трехслойной пластины, скрепленной с инерционным основанием Пастернака.

Следует отметить, что если в системе уравнений (1.4) положить параметр, характеризующий сдвиговые свойства основания, $t_f = 0$, то при $\kappa_0 = \text{const}$ получим уравнения колебаний рассматриваемой пластины на инерционном основании Винклера [4, 5]. Аналогично из решений задачи при основании Пастернака (2.8) следует соответствующие решения при основании Винклера.

4. Численное исследование

Числовые результаты получены для защемленной по контуру круговой трехслойной пластины, материалы слоев которой Д16Т–фторопласт–Д16Т. Упругие параметры основания вычислены по формулам монографии [6].

На рис. 2 показана зависимость нижней частоты ω_0 от относительной толщины слоя упругого основания H_f . Кривые соответствуют различным моделям упругих оснований: 1 — безынерционное Винклера, 2 — безынерционное Пастернака, 3 — инерционное Винклера, 4 — инерционное Пастернака. Коэффициент жесткости основания Винклера κ_0 остается в процессе изменения толщины

H_f постоянным. При увеличении толщины слоя основания собственные частоты по четырем моделям оснований стабилизируются при толщине $H_f \geq 1,5$.

Для более тонких оснований система пластина-основание будет более жесткой за счет подпирания абсолютно жесткого основания, частота при безынерционной модели Пастернака (2) возрастает в 1,6 раза, по модели Винклера (1) — постоянна. При $H_f \geq 1,5$ частота по безынерционной модели Пастернака в 1,2 раза больше, чем по Винклеру. Учет инерции основания, начиная с $H_f \geq 1,5$, приводит к уменьшению исследуемой частоты по обеим моделям в 1,7 раза.

На рис. 3 показано изменение прогиба во времени в центре трехслойной пластины на безынерционном (а) и инерционном (б) основаниях при действии внезапно приложенной нагрузки на всю ее поверхность. Интенсивность нагрузки принималась $q = 0,1$ МПа: 1 — основание Винклера, 2 — основание Пастернака. На амплитуды прогибов инерция упругих оснований оказывает малое влияние, однако они существенно уменьшаются (35%) при учете сдвига в основании, т. е. при модели Пастернака.

Заключение

Таким образом, увеличение относительной толщины слоя основания H_f сверх 1,5 перестает влиять на собственные частоты системы пластина-основание; при внезапно приложенной нагрузке величина коэффициента сдвига t_f оказывает существенное влияние на максимальные перемещения в пластине; учет инерции основания не сказывает-

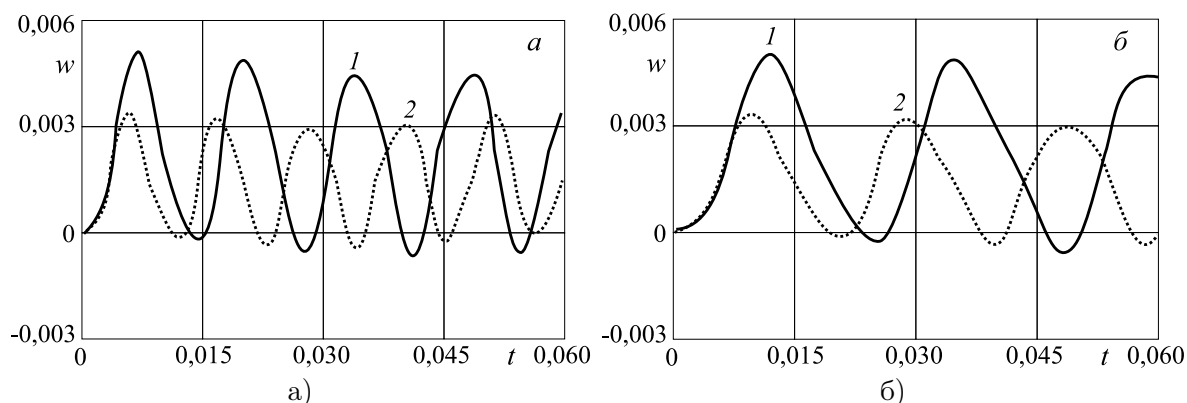


Рис. 3. Изменение прогиба во времени защемленной по контуру трехслойной пластины на безынерционном (а) и инерционном (б) основаниях: 1 — основание Винклера; 2 — основание Пастернака

ся на максимальных прогибах и относитель-

ных сдвигах, но увеличивает период колебаний.

Литература

1. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
2. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
3. Старовойтов Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. Гомель: БелГУТ, 2002. 344 с.
4. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим фунда-

мент. М.: Физматлит, 2011. 560 с.

5. Леоненко Д. В. Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 3. С. 42–47.
6. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. М.: Физматлит, 1960. 491 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. 2. 295 с.

References

1. Grigoljuk Je.I., Chulkov P.P. *Ustojchivost' i kolebanija trehslojnyh obolochek* [Stability and vibration of sandwich shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973, 172 p. (In Russian)
2. Bolotin V.V., Novichkov Ju.N. *Mehanika mnogoslujnyh konstrukcij* [Mechanics of laminated constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980, 375 p. (In Russian)
3. Starovojtov Je.I. *Vjazkouprugoplasticheskie slojstye plastiny i obolochki* [Viscoelastoplastic layered plates and shells]. Gomel, BelGUT Publ., 2002, 344 p. (In Russian)
4. Pleskachevskij Ju.M., Starovojtov Je.I., Leonenko D.V. *Mehanika trehslojnyh sterzhnej i plastin, svjazannyh s uprugim osnovaniem* [The mechanics of three rods and plates, connected with elastic Foundation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 560 p. (In Russian)

5. Leonenko D.V. Svobodnye kolebanija krugovyh trehslojnyh plastin na uprugom osnovanii [Free vibrations of a circular three-layer plates on an elastic base]. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2008, no. 3, pp. 42–47. (In Russian)
6. Vlasov V.Z., Leont'ev N.N. *Balki, plity, obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates, shells on the elastic base]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1960, 491 p. (In Russian)
7. Kamke Je. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nyh uravnenijam* [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 576 p. (In Russian)
8. Bejtmn G., Jerdeji A. *Vysshie transcendentnye funkcii. T. 2* [Higher transcendental functions. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 295 p. (In Russian)