

УДК 517.57 + 517.956.224

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ ЭКВИПОТЕНЦИАЛИ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ¹Марковский А. Н.²

LOGARITHMIC CAPACITY OF ENERGY EQUIPOTENTIAL LINES OF POINT CHARGES SYSTEM

Markovskiy A. N.*

* Kuban State University, Krasnodar, Russia, e-mail: mark@kubsu.ru

Abstract: The integral representation for the potential energy of point charges is proved. Capacity value of energy equipotential lines, expressed in terms of charges intensities, is given.

Keywords: point charges, potential energy, logarithmic capacity, Roben potential, equipotential line, lemniscate

1. Эквипотенциаль энергии системы точечных зарядов

Рассмотрим конечное число различных точек комплексной плоскости z_j , называемых в дальнейшем зарядами, и набор *положительных* действительных чисел c_j , называемых интенсивностями ($j = 1, 2, \dots, n$).

Потенциальная энергия системы зарядов z_j с интенсивностями c_j имеет вид

$$U(z) := \sum_{j=1}^n c_j \ln |z - z_j| = \ln |\pi_n(z)|,$$

где

$$\pi_n(z) := \prod_{j=1}^n (z - z_j)^{c_j}. \quad (1.1)$$

Обозначим

$$S(\pi_n, B) := \{z : |\pi_n(z)| = B\} \quad (1.2)$$

эквипотенциаль энергии $U(z)$ отвечающую уровню $\ln(B)$.

В случае, если c_j натуральные числа, то $\pi_n(z)$ — комплексный алгебраический полином с n различными нулями z_j степени

$$\alpha = \sum_{j=1}^n c_j, \quad (1.3)$$

и тогда $S(\pi_n, B)$ — классическая лемниската [1]. В общем случае $\pi_n(z)$ допускает неалгебраические особенности, тогда

$S(\pi_n, \ln B)$ — трансцендентная многофокусная лемниската, которую далее будем называть эквипотенциалью энергии.

Обозначим через Ω множество критических значений функции $\pi_n(z)$

$$\Omega = \left\{ z : \frac{d}{dz} \pi_n(z) = 0 \right\},$$

и пусть

$$B_2 := \max_{z \in \Omega} |\pi_n(z)|,$$

тогда, если $B > B_2$, то $S(\pi_n, B)$ ограничивает односвязную область Q , которой принадлежат все точки z_j [2]. Далее для эквипотенциали $S(\pi_n, B)$ будем предполагать выполнение условия $B > B_2$.

Множество зарядов z_j и соответствующих им интенсивностей c_j , определяющее эквипотенциаль $S(\pi_n, B)$, единственно. Действительно, предположим противное, то есть, что существует другой набор зарядов $\tilde{z}_i$, принадлежащих области Q , и соответствующий набор *положительных* интенсивностей $\tilde{c}_i$ ($i = 1, 2, \dots, \tilde{n}$), таких что для функции

$$\tilde{\pi}_n(z) := \prod_{i=1}^{\tilde{n}} (z - \tilde{z}_i)^{\tilde{c}_i}$$

выполняется

$$S(\pi_n, B) = S(\tilde{\pi}_n, \tilde{B}).$$

Рассмотрим разность

$$F(z) = \ln |\pi_n(z)| - \ln |\tilde{\pi}_n(z)| =$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (11-01-96511) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (14.В37.21.0387).

²Марковский Алексей Николаевич, доцент кафедры компьютерных и математических методов Кубанского государственного университета; e-mail: mark@kubsu.ru.

$$= \sum_{j=1}^n c_j \ln |z - z_j| - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{c}_i \ln |z - \tilde{z}_i|,$$

для которой по построению должно выполняться

$$F(z) = B - \tilde{B}, \quad z \in S.$$

Поскольку в линейной комбинации логарифмов $F(z)$ имеются члены разных знаков, то множество S не может ограничивать односвязную область. Действительно, предположим противное, тогда в области Q существует непрерывный путь, соединяющий, например, точки z_1 и $\tilde{z}_1$. Функция

$$F(z) = c_1 \ln |z - z_1| - \tilde{c}_1 \ln |z - \tilde{z}_1| + \sum_{j=2}^n c_j \ln |z - z_j| - \sum_{i=2}^{\tilde{n}} \tilde{c}_i \ln |z - \tilde{z}_i|,$$

при $z \rightarrow z_1$ стремится к $-\infty$, а при $z \rightarrow \tilde{z}_1$ — к $+\infty$, тогда в силу непрерывности её на

$$\mathbb{C} \setminus \left(\{z_j\}_{j=1}^n \cup \{\tilde{z}_i\}_{i=1}^{\tilde{n}} \right),$$

она принимает любое действительное значение, в том числе и значение $B - \tilde{B}$, значит, существует точка ξ на пути от z_1 к $\tilde{z}_1$ такая, что $F(\xi) = B - \tilde{B}$ и, следовательно, ξ принадлежит S , что приводит к противоречию. Таким образом, множество зарядов z_j и соответствующих им интенсивностей c_j , определяющее множество $S(\pi_n, B)$, единственно.

2. Интегральное представление потенциальной энергии

Сформулируем в необходимом виде утверждение, данное в работе [2], и дадим новое более простое доказательство, не требующее использования понятия обобщенной функции.

ЛЕММА 1. Пусть

$$U(z) = \ln |\pi_n(z)|,$$

где $\pi_n(z)$ и $S(\pi_n, B)$ определены равенствами (1.1) и (1.2), тогда справедливо интегральное соотношение

$$\begin{aligned} B = U(z) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(\zeta) \ln |z - \zeta| dS_\zeta, \quad (2.1) \\ &z \in S. \end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ — производная по направлению внешней нормали.

Доказательство. Пусть эквипотенциаль S ограничивает область Q . Рассмотрим известное интегральное представление [3], справедливое для функции $f \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ и гладкой границы S

$$\begin{aligned} \alpha f(x) &= \int_Q \Delta f(\zeta) \ln |x - \zeta| d\zeta + \\ &+ \int_S f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |x - \zeta| dS_\zeta - \\ &- \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} f(\zeta) \ln |x - \zeta| dS_\zeta, \quad (2.2) \end{aligned}$$

где $\alpha = 2\pi$ при $x \in Q$ и $\alpha = \pi$ при $x \in S$.

Зафиксируем точку $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{Q}$ и рассмотрим представление (2.2) для гармонической в $\overline{Q}$ функции $f(x) = \ln |w - x|$

$$\begin{aligned} \ln |w - x| &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_S \ln |w - \zeta| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |x - \zeta| dS_\zeta - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |w - \zeta| \ln |x - \zeta| dS_\zeta, \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$x \in Q.$$

Рассмотрим выражение (2.3) в точках $x = z_j \in Q$. Умножим каждое полученное выражение на соответствующее c_j и просуммируем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j \ln |w - z_j| &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n c_j \int_S \ln |w - \zeta| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |z_j - \zeta| dS_\zeta - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n c_j \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |w - \zeta| \ln |z_j - \zeta| dS_\zeta. \end{aligned}$$

Внося сумму под знак интеграла и используя обозначения леммы, имеем

$$\begin{aligned} U(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} U(\zeta) \ln |w - \zeta| dS_\zeta - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_S U(\zeta) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |w - \zeta| dS_\zeta, \quad (2.4) \\ &w \in \mathbb{C} \setminus \overline{Q}. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что второй интеграл в выражении

(2.4) при переходе на границу S обращается в ноль.

Действительно, используя свойство потенциала двойного слоя

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow z \in S} \frac{1}{2\pi} \int_S U(\zeta) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |w - \zeta| dS_\zeta = \\ = -\frac{1}{2} U(z) + \frac{1}{2\pi} \int_S U(\zeta) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |z - \zeta| dS_\zeta, \\ z \in S, \end{aligned}$$

и условие леммы

$$U(z) = B, \quad z \in S,$$

получаем

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow z \in S} \frac{1}{2\pi} \int_S U(\zeta) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |w - \zeta| dS_\zeta = \\ = -\frac{B}{2} + \frac{B}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |z - \zeta| dS_\zeta = 0, \\ z \in S, \end{aligned}$$

поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta} \ln |z - \zeta| dS_\zeta = \frac{1}{2}, \quad z \in S.$$

Лемма доказана. $\square$

3. Плотность и константа Робена эквипотенциали

Пусть L — гладкая кривая, ограничивающая односвязную область D . Потенциал простого слоя, определённый на L ,

$$R(z) = \int_L \varphi_L(\zeta) \ln |z - \zeta| dL_\zeta, \quad (3.1)$$

для которого выполняется условие

$$R(z)|_L = R_L \equiv \text{const}, \quad (3.2)$$

называется потенциалом Робена [3] или равновесным потенциалом [4].

Если выполнено условие нормировки

$$\int_L \varphi_L(\zeta) dL_\zeta = 1, \quad (3.3)$$

то непрерывная функция φ_L , удовлетворяющая условиям (3.1) и (3.2), единственна [3, 4]. Функцию φ_L и константу R_L для кривой L ,

удовлетворяющие условиям (3.1)–(3.3), называют соответственно *плотностью* и *постоянной Робена*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть

$$U(z) = \ln |\pi_n(z)|,$$

где $\pi_n(z)$ и $S(\pi_n, B)$ определены равенствами (1.1) и (1.2), тогда плотность потенциала Робена для эквипотенциали S равна

$$\varphi_S(z) = \frac{1}{2\pi\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(z), \quad (3.4)$$

где α определена (1.3).

Доказательство. Для начала покажем выполнение условия (3.3). Действительно, поскольку для любого $z = z_j \in Q$ выполняется [3]

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \ln |z - \zeta| dS_\zeta = 2\pi,$$

то, интегрируя равенство (3.4), имеем

$$\begin{aligned} \int_S \varphi_S(\zeta) dS_\zeta = \\ = \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{j=1}^n c_j \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \ln |z - z_j| dS_\zeta = \\ = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n c_j = 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение

$$R(z) = \int_S \frac{1}{2\pi\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(\zeta) \ln |z - \zeta| dS_\zeta.$$

По лемме 1 на S справедливо соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(\zeta) \ln |z - \zeta| dS_\zeta = U(z).$$

Поскольку $U(z) = B$ на S , то $R(z) \equiv \text{const}$ при $z \in S$, условие (3.2) выполняется, таким образом, функция, определённая равенством (3.4), является плотностью потенциала Робена для S . Утверждение доказано. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть

$$U(z) = \ln |\pi_n(z)|,$$

где $\pi_n(z)$ и $S(\pi_n, B)$ определены равенствами (1.1) и (1.2), тогда константа Робена для эквипотенциали S равна

$$R_S = \frac{B}{\alpha},$$

где α определена (1.3).

Доказательство. По лемме 1 на S справедливо интегральное соотношение (2.1). Разделим его на α , получим

$$\frac{B}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(\zeta) \ln |z - \zeta| dS_\zeta.$$

Согласно утверждению 1, выражение

$$\frac{1}{2\pi\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(\zeta)$$

есть плотность Робена для S . Таким образом, интеграл справа — потенциал Робена. Поскольку интегральное соотношение выполняется на S , то константа слева является константой Робена, так что $R_S = \frac{B}{\alpha}$. Утверждение доказано. $\square$

4. Емкость компакта

Пусть D — ограниченная область на комплексной плоскости, её граница $L = \partial D$ — ограниченное замкнутое множество, так что $K = D \cup L$ — плоский компакт. Обозначим $\mathfrak{M}(K)$ — множество всех конечных неотрицательных нормированных зарядов на K (множество вероятностных мер), то есть вещественных σ -аддитивных функций μ , определённых на борелевских подмножествах компакта K таких, что $\mu \geq 0$ и $\mu(K) = 1$.

Интеграл

$$I(\mu) = \int_{K^2} \ln |x - y| d\mu(x) d\mu(y)$$

называется *энергией* меры μ . Поскольку функция $\ln |x - y|$ ограничена сверху при $x, y \in K$, то интеграл всегда имеет смысл, хотя может принимать значение минус бесконечности [4].

Рассмотрим экстремальную задачу.

Задача V_1 . Найти

$$E_K = \inf I(\mu) : \mu \in \mathfrak{M}(K)$$

и минимизирующие меры $\bar{\mu}$, на которых этот *infimum* достигается.

Относительно решения задачи V_1 справедливо утверждение [5]: если $E_K > -\infty$, то минимизирующая мера $\bar{\mu}$ существует и единственна.

Постоянную $E_K = I(\bar{\mu})$ называют *энергией* компакта K . *Логарифмической емкостью* компакта K называется число [4]

$$\text{cap}(K) := \exp(E_K). \quad (4.1)$$

Ограничимся случаем гладкой границы ($L \in C^{1+\lambda}$, λ -показатель Ляпунова [3]). Для $d\mu = \rho dx$ (ρ — суммируемая функция, dx — мера Лебега) интеграл энергии запишется в виде

$$I(\rho) = \int_{D \times D} \ln |x - y| \rho(x) \rho(y) dx dy,$$

и соответствующая экстремальная задача для $I(\rho)$ примет следующий вид

Задача V_2 . Найти

$$E_K = \inf I(\rho) :$$

$$\rho \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}), \quad \langle \rho \rangle = 1, \quad (4.2)$$

минимизирующую функцию $\bar{\rho}$, на которой этот *infimum* достигается

$$\langle \rho \rangle = \int_D \rho(x) dx.$$

Покажем, что экстремальное значение интеграла энергии $E_K = \inf I(\bar{\rho})$ равно константе Робена R_L (3.2), то есть

$$E_K = R_L,$$

если $L = \partial K$.

Рассмотрим в области D краевую задачу для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 U(z) = 0, \quad z \in D,$$

$$U(z)|_L = 0,$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(z) \right|_L = \varphi_L(z),$$

где $\varphi_L(z)$ — плотность потенциала Робена для кривой L .

Согласно интегральному представлению функции [3], с учётом граничного условия $U(z) = 0$ решение задачи представляется в виде

$$U(z) = \int_D \Delta U(y) \ln |z - y| dy - \int_L \varphi_L(y) \ln |z - y| dL_y, \quad z \in Q.$$

Переходя на границу, получим

$$0 = \int_D \Delta U(y) \ln |z - y| dy - \int_L \varphi_L(y) \ln |z - y| dL_y, \quad z \in L.$$

Интеграл справа — потенциал Робена для кривой L , так что

$$\int_D \Delta U(y) \ln |z - y| dy = R_L, \quad z \in D. \quad (4.3)$$

В силу единственности решения $U(z)$ краевой задачи бигармонического уравнения с заданными краевыми условиями константа R_L , для которой выполняется условие (4.3), единственна. Обозначим $\bar{\rho} = \Delta U$. Ввиду известного равенства [3]

$$\int_D \Delta U(y) dy = \int_L \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(y) dL_y,$$

получаем

$$\int_D \bar{\rho}(y) dy = \int_L \varphi_L(y) dL_y = 1. \quad (4.4)$$

Из свойств логарифмического потенциала [4] следует неравенство

$$\int_D \bar{\rho}(y) \ln |z - y| dy \geq R_L, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.5)$$

Из симметрии ядра $E(x, y) = \ln |x - y|$ и теоремы Фубини получаем

$$I(\rho) = \int_D \left[\int_D \ln |x - y| \rho(y) dy \right] \rho(x) dx,$$

тогда с учётом (4.4) и (4.5) окончательно имеем

$$E_K = I(\bar{\rho}) = R_L.$$

Отсюда, в частности, получаем известное равенство емкости компакта K и его границы ∂K

$$\text{cap}(K) = \text{cap}(\partial K). \quad (4.6)$$

5. Емкость эквипотенциали энергии системы точечных зарядов

Пусть

$$U(z) = \ln |\pi_n(z)|,$$

Литература

1. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. М.: ГИФ-МЛ, 1960. 296 с.
2. Марковский А. Н. Интегральное представление линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа // Экологический вестник научных центров. Черноморского экономического сотрудничества. 2011. №4. С. 49–54.

$$\pi_n(z) := \prod_{j=1}^n (z - z_j)^{c_j}.$$

ТЕОРЕМА 1. Если S — эквипотенциаль энергии системы точечных зарядов, то есть

$$|\pi_n(z)| = |z - z_1|^{c_1} |z - z_2|^{c_2} \dots |z - z_n|^{c_n} = B,$$

$$z \in S,$$

то

$$\text{cap}(S) = B^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (5.1)$$

где

$$\alpha = \sum_{j=1}^n c_j.$$

Доказательство. Действительно, поскольку функции π_n и U связаны соотношением $U(z) = \ln |\pi_n(z)|$, то лемниската S является эквипотенциалью энергии U с соответствующей константой $\ln(B)$.

Согласно утверждению 2, постоянная Робена R_S для эквипотенциали S есть

$$R_S = \frac{1}{\alpha} \ln(B).$$

С учётом равенств (4.1) и (4.6) логарифмическая емкость $\text{cap}(S)$ и постоянная Робена R_S связаны соотношением

$$\text{cap}(S) = \exp(R_S),$$

откуда следует требуемое равенство (5.1). Теорема доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частном случае, если кратности c_j — натуральные числа, то функция $\pi_n(z)$ — алгебраический полином натуральной степени α , а теорема 1 в точности составляет содержание следствия известной теоремы Фекете о емкости образа (трансфинитном диаметре) ограниченного замкнутого множества [6, стр. 291].

3. Владимиров В. С., Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
4. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 516 с.
5. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988. 256 с.
6. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.

References

1. Savelov A.A. *Ploskie krivye. Sistematika, svoystva, primeneniya* [Flat curves. Systematics, properties, application]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1960, 296 p. (In Russian)
2. Markovskij A.N. Integral'noe predstavlenie linejnoj kombinacii fundamental'nyh reshenij uravneniya Laplasya [Integral representation of a linear combination of the fundamental solutions of the Laplace equation]. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2011, no. 4, pp. 49–54. (In Russian)
3. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 512 p. (In Russian)
4. Landkof N.S. *Osnovy sovremennoj teorii potentsiala* [The foundations of modern potential theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 516 p. (In Russian)
5. Nikishin E.M., Sorokin V.N. *Racional'nye approksimacii i ortogonal'nost'* [Rational approximations and orthogonality]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 256 p. (In Russian)
6. Goluzin G.M. *Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 628 p. (In Russian)

Статья поступила 12 октября 2013 г.

© Марковский А. Н., 2014