

УДК 519.173.1, 519.245

СВЯЗНОСТЬ АВТОНОМНЫХ БЕСПРОВОДНЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ В МЕСТНОСТЯХ С ПЛОХОЙ ИНФРАСТРУКТУРОЙ¹

Миков А. И.²

CONNECTIVITY OF AUTONOMOUS WIRELESS COMPUTER NETWORKS IN LOCALITIES OF POOR INFRASTRUCTURE

Mikov A. I.*

* *Kuban State University, Krasnodar, Russia, e-mail: alexander_mikov@mail.ru*

Abstract: Mathematical model of a wireless computer ad hoc network is discussed. Extremal packing of network nodes on the plane is described. The probability characteristics of random networks such as connectivity, nodes degrees, number of edges, node isolating property are estimated. Also the influence of shape of a region for wireless network properties is studied.

Keywords: computer network, autonomous computing, geometric graph, connectivity, packing, statistical modeling.

Введение

Мобильные беспроводные компьютерные ad hoc сети находят широкое применение. Особенную роль они играют при необходимости выполнения масштабных работ в местностях с плохо развитой или разрушенной вследствие стихийных бедствий инфраструктурой. Такие сети создаются в период ликвидации чрезвычайных ситуаций, обеспечивая информационное взаимодействие участников операции. В связи с ограниченным радиусом действия приемопередатчиков компьютерных узлов сети остро стоит вопрос обеспечения связности и живучести сети. Минимальным требованием является связность сети, т.е. наличие хотя бы одного маршрута передачи данных между двумя любыми узлами. Однако ввиду мобильности узлов надежность односвязной сети недостаточна, в любой момент времени сеть может распасться на несколько компонент. Поэтому достаточная живучесть сети обеспечивается только в многосвязной самоуправляемой сети.

Такая сеть относится к классу автономных вычислительных систем. Она управляет своими информационными и технологическими процессами децентрализованно без вмешательства извне на основе своей математической модели. Модель позволяет предсказывать и предупреждать негативные тренды в сети (в частности, изменение характеристик связности), выбирать маршруты передачи данных, давать рекомендации пользо-

вателям информационной системы, поддерживаемой компьютерной ad hoc сетью.

В работе предлагаются математические модели оценки связности для автономных компьютерных сетей.

1. Геометрические графы

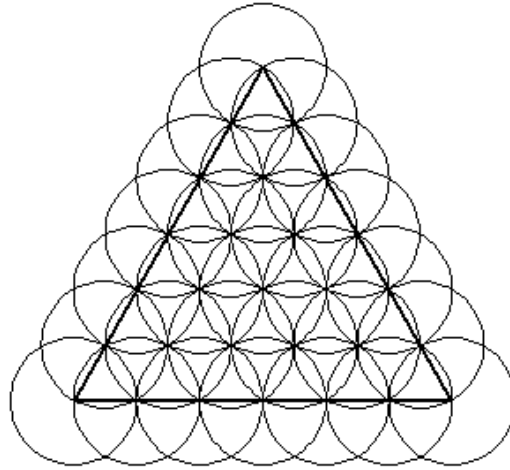
Характеристики связности беспроводной компьютерной сети зависят от координат узлов сети, однако при изменении координат узлов эти характеристики изменяются дискретным образом, т.е. являются кусочно-постоянными функциями. Для учета одновременно геометрических и топологических свойств сети строится ее математическая модель в виде геометрического графа [1].

Определение. *Статический однородный геометрический граф* — это набор $GG = \{V, P, r, S\}$, где V — множество вершин, P — отображение $P : V \rightarrow S$ (локализация вершин), r — радиус действия приемопередатчиков компьютерных узлов (вершин графа), S — ориентированная ограниченная поверхность, на которой располагаются вершины.

Поверхность (область) S определяется рельефом местности, на которой располагается компьютерная сеть. В общем случае она не является выпуклой и отображает также и препятствия распространению радиосигналов микроволнового и/или оптического диапазона.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (13-07-96506а) и НИР 8.2934.2011 (12/19г).

²Миков Александр Иванович, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: alexander_mikov@mail.ru.

Рис. 1. Критическая конфигурация сети на основе упаковки L_2

В динамическом геометрическом графе отображение P и, возможно, поверхность S зависят от времени.

Геометрический граф $GG = \{V, P, r, S\}$ порождает обыкновенный граф $G = \{V, E\}$ следующим образом: вершины обыкновенного графа соответствуют вершинам геометрического графа; вершины обыкновенного графа v_i и v_j смежны, т.е. $(v_i, v_j) \in E$, если длина отрезка между точками $P(v_i)$ и $P(v_j)$ строго меньше величины r и никакая часть этого отрезка не проходит «под» ориентированной поверхностью S (прямая видимость).

2. Экстремальные характеристики геометрических графов

Как отмечалось выше, топологические характеристики сети дискретным образом зависят от ряда ее геометрических параметров. Это означает, что в мобильной сети при перемещении узлов может произойти «внезапное» значительное изменение топологии.

Изучим условия, при которых изменяется связность. Ясно, что если область расположения сети достаточно плотно заполнена узлами, то для любого узла найдется хотя бы один «сосед», находящийся на расстоянии менее 1. С другой стороны, при разреженной сети велика вероятность того, что некоторые узлы будут изолированными. Какова граничная плотность? Для анализа может быть использована теория упаковки [2], в частности плотной упаковки кругов в некоторой области. Простейшая упаковка Z^2 характеризуется плотностью, т.е. отношением суммарной площади кругов к общей площади обла-

сти, равной $\pi/4$. Наиболее плотной упаковкой является L_2 -гексагональная решетчатая упаковка, ее плотность равна $\pi\sqrt{3}/6$.

Для сети упаковка требует модификации, зоны приема/передачи могут пересекаться, но центр одной зоны не должен быть внутренней точкой другой зоны (зоны — это круги без границы). На рис. 1 показан пример плотного расположения сети в треугольной области, построенного на основе упаковки L_2 .

Часть узлов располагается на границе области, часть — внутри. Отдельные узлы располагаются на границах зон других узлов, однако ни один узел не является внутренней точкой какой-либо зоны, кроме своей. Таким образом, это наиболее плотная упаковка сети. В данном примере сеть содержит 28 узлов и располагается на площади, равной $9\sqrt{3}$. Плотность расположения равна $n/S = (28/27)\sqrt{3} \approx 1,796$.

Для подобных треугольных структур нетрудно получить следующую формулу для предельной плотности

$$\frac{n}{S} = \frac{2}{r^2\sqrt{3}} \left(1 + 3\frac{r}{l} + 2\left(\frac{r}{l}\right)^2 \right),$$

где l — длина стороны треугольника, r — радиус зоны приема/передачи.

При заданном количестве n узлов сети минимальная площадь области треугольной формы может быть определена как

$$S = r^2 \frac{\sqrt{3}}{8} (4n - 3\sqrt{8n + 1} + 5).$$

И обратно — на области заданной площади S можно разместить узлы, не имеющие между

собой связи, в количестве

$$n = \frac{2S}{r^2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3\sqrt{3}S}}{r} + 1.$$

Например, при $S = 36$ количество узлов $n \approx 56$, при $S = 16$ $n \approx 29$.

Все графы, порождаемые такими упаковками, вполне несвязные, т.е. состоят из изолированных вершин (узлов). Но малое увеличение радиуса $r \rightarrow r + \varepsilon$ приводит граф $G(N)$ сети N к связному графу. Более того, граф содержит

$$q(n) = 3n - \frac{3}{2}\sqrt{8n+1} + \frac{3}{2}$$

ребер и является планарным, удовлетворяя необходимому условию [3] планарности, $q \leq 3n - 6$. Например, граф из 45 вершин получает сразу 108 ребер. Внутренние грани этого графа являются треугольниками, а внешняя грань представляет собой k -цикл, где

$$k = \frac{3}{2}\sqrt{8n+1} - \frac{9}{2}.$$

Три вершины имеют степень 2, а остальные — степень 6 или 4, т.е. граф не просто связный, но с высокой вершинной связностью.

Поскольку по теореме Л. Эйлера сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер, можно получить выражение для средней степени вершины

$$\deg_{mean}(n) = 6 - \frac{3}{n}(\sqrt{8n+1} - 1)$$

для экстремальных сетей.

При увеличении радиуса зоны приема/передачи от величины $r - \varepsilon$ в экстремальной упаковке сети степени внутренних вершин возрастают на 6 при достижении радиусов r_i . Радиусы r_i для нечетных $i = 2k - 1$ равны $r_i = kr$. Для четных индексов радиусы могут быть найдены из геометрических соображений, например, $r_2 = r\sqrt{3}$, $r_4 = r\sqrt{7}$, $r_6 = r\sqrt{11}$. Начиная с радиуса r_2 граф сети не является планарным.

3. Вероятностно-статистический анализ

Реальные компьютерные сети рассматриваемого класса гораздо более разнообразны, чем сети, построенные на основе экстремальных упаковок. Но, поскольку трудно сделать

какие-либо априорные предположения об архитектуре конкретной сети (к тому же она изменяется, так как сеть мобильна), адекватным для оценки характеристик представляется вероятностный подход, использующий понятие случайного графа.

Случайным графам посвящен ряд [4] математических исследований, выявивших интересные и неожиданные свойства таких графов. Основные определения, данные Эрдешем и Реньи, построены на фиксированном множестве вершин обыкновенного графа и задании вероятности смежности двух произвольных вершин этого графа.

Задача моделирования беспроводной компьютерной сети требует несколько иного подхода, основанного на случайных геометрических графах.

Определение. *Случайный однородный геометрический граф* — это набор $GGR = \{V, R, r, S\}$, где V — множество вершин, R — случайное отображение $R: V \rightarrow S$ (локализация вершин), r — радиус действия приемо-передатчиков компьютерных узлов (вершин графа), S — ориентированная ограниченная поверхность, на которой располагаются вершины.

Отображение R ставит в соответствие каждой вершине графа случайную точку в области S , характеризующуюся координатами — случайными величинами.

Случайный геометрический граф представляет все множество возможных беспроводных сетей с заданным количеством узлов на данной поверхности. Его анализ позволяет изучить такие массовые характеристики, как вероятность наличия изолированных узлов, вероятность связности сети, среднюю степень узла, распределение вероятностей количества компонент, длин маршрутов и пр. Эти характеристики включаются как составная часть в модель, используемую в автономной компьютерной системе в период ее функционирования.

Отображение R конструируется следующим образом: на поверхности S задается двумерное распределение вероятностей $A(x, y)$. Исходя из распределения $A(x, y)$, выбираются независимо n точек на S , являющихся координатами компьютеров ad hoc сети.

Поскольку координаты узлов сети случайны, то случайным является и присутствие в графе G ребра между произвольной парой вершин.

Для $n = 2$ существует только две неизоморфных реализации случайного графа — вполне несвязный граф G_0 с двумя изоли-

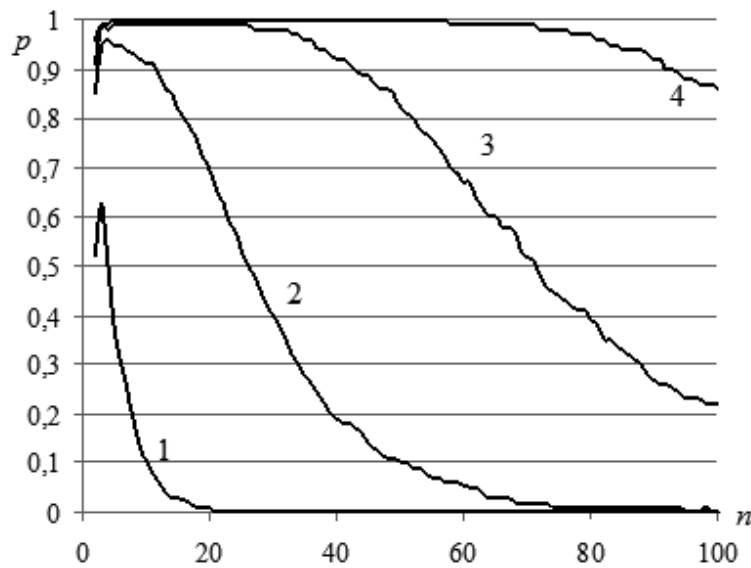


Рис. 2. Вероятность наличия изолированных узлов (различные площади)

рованными вершинами и связный граф G_1 с ребром между вершинами.

Если $r = 1$, область S — плоский квадрат со стороной c , функция $A(x, y)$ задает равномерное распределение, то распределение вероятностей $B(z)$ случайной величины ρ^2 — квадрата расстояния между двумя случайно выбранными вершинами v_i и v_j на интервале $0 \leq z \leq c^2$ имеет вид

$$B(z) = \frac{z^2}{2c^4} - \frac{8}{3c^3}z\sqrt{z} + \frac{\pi}{c^2}z.$$

В этот интервал попадает около 97% значений случайной величины. Остальные значения располагаются в интервале $c^2 < z \leq 2c^2$.

Особое значение имеет число $B(1)$ — вероятность того, что расстояние между вершинами меньше 1 и граф является графом G_1 . Эта вероятность равна $(2c^4)^{-1} - 8(3c^3)^{-1} + \pi c^{-2}$. С ростом величины c вероятность присутствия ребра между двумя вершинами быстро убывает. Например, $B(1) = 0,48$ при $c = 2$, $B(1) = 0,16$ при $c = 4$, $B(1) = 0,075$ при $c = 6$, $B(1) = 0,044$ при $c = 8$. Уже при $c = 20$ наличие ребра маловероятно.

Для оценки характеристик случайных графов при количестве узлов $n \leq 100$ было проведено статистическое моделирование. Генерировались случайные геометрические графы с равномерным распределением узлов в различных областях. Выбор равномерного распределения объясняется тем, что оно обеспечивает возможность сравнения резуль-

татов статистического моделирования с приведенными выше характеристиками экстремальных упаковок, которые также являются равномерными, хотя и не случайными.

На рис. 2 приведены графики зависимости вероятности присутствия в графе хотя бы одного изолированного узла от общего количества узлов в области расположения сети. Графики представлены для квадратных областей с различными длинами сторон (график 1: $c = 2$; 2: $c = 4$; 3: $c = 6$; 4: $c = 8$).

Данные приведены для значений n (тривиальный геометрический граф с $n = 1$ не рассматривается). Значения вероятностей сначала возрастают до некоторого максимума, а затем убывают до нуля. Стоит отметить связь с результатами из теории перечисления графов [5]. Отношение числа графов с изолированными вершинами к общему количеству графов (рассматриваются только неизоморфные графы) увеличивается от значения $1/2$ при $n = 2$ до значения $3/4$ при $n = 3$ и затем уменьшается до $4/11$ при $n = 4$ и далее. Это близко тому, что демонстрирует график 1. Другие графики, подтверждая закономерность, дают иные абсолютные значения вероятностей — сказывается эффект увеличения площади области.

Вероятность связности сети (рис. 3) увеличивается с ростом плотности расположения узлов в области (нумерация графиков такая же, как на рис. 2). Здесь интересно сравнение с экстремальными упаковками. Упаковка с характеристиками $S = 16$, $n \approx 29$ соответствует графику 2, а упаковка с пара-

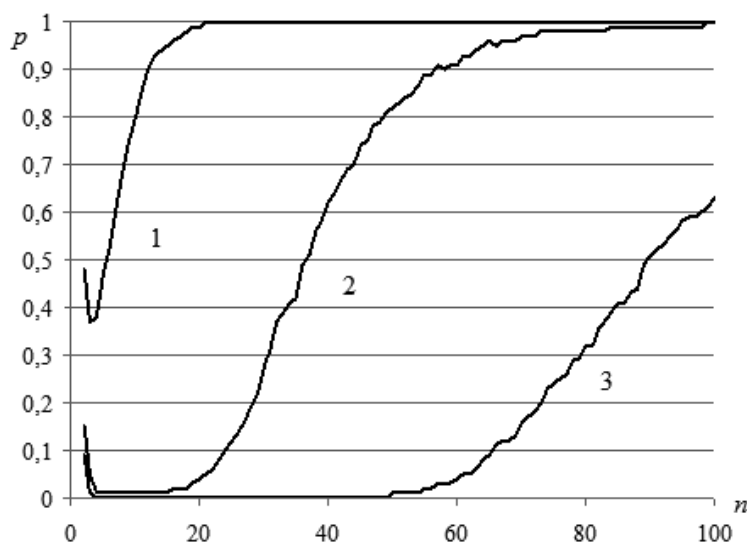


Рис. 3. Вероятность связности сети (различные площади)

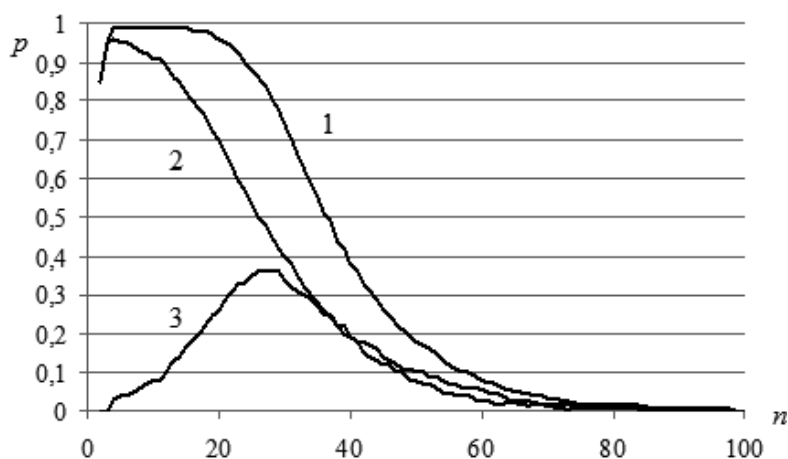


Рис. 4. Вероятности несвязности и наличия изолированных узлов

метрами $S = 36$, $n \approx 56$ — графику 3. В том и другом случае вероятность связности достаточно мала.

В модели случайного графа Эрдеша-Реньи известен эффект *критической вероятности* наличия ребра. При малой вероятности графы почти всегда несвязны, при большой вероятности — почти всегда связны. Переход происходит весьма быстро при увеличении вероятности вблизи критического значения. Рис. 3 демонстрирует *критическое количество узлов* случайного геометрического графа. При меньшем количестве узлов графы почти всегда несвязны, затем при увеличении количества узлов вероятность связности довольно быстро увеличивается до значений, близких к единице.

Графики на рис. 4 позволяют выявить различие между вероятностями несвязности графа (1) и наличия в нем изолированных узлов (2). Их разность (график 3) имеет характерный максимум при $S = 16$, $n \approx 29$, что также показывает связь с экстремальными упаковками.

Форма области расположения сети оказывает значительное влияние только в исключительных конфигурациях. Например, зависимости максимальной степени d узла сети от количества узлов n (рис. 5) в прямоугольных областях одной и той же площади мало отличаются для соотношения сторон 6:6 и 2:18 (графики 1 и 2), но значительно большее различие проявляется для соотношения 1:36 (график 3). Это связано с тем, что ширина области равна радиусу r зоны прие-

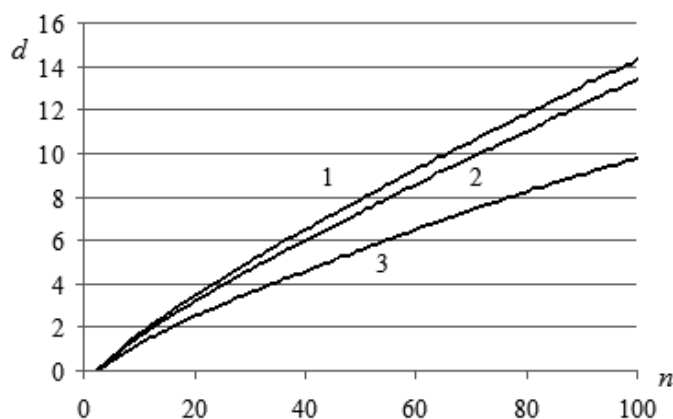


Рис. 5. Максимальная степень узла сети

ма/передачи и многие реализации случайного графа близки к простой цепи.

Заключение

В работе изучены зависимости характеристик связности беспроводных компьютер-

ных ad hoc сетей от количества узлов, площади и формы области расположения. Обнаружены особенности изменения структурных свойств, объясняемые с привлечением понятий экстремальных упаковок сетей. Результаты могут быть использованы при создании автономных распределенных компьютерных систем.

Литература

1. Миков А. И., Мезенцева А. С. Характеристики геометрических графов, моделирующих ad hoc сети // Информатизация и связь. 2012. № 5. С. 85–88.
2. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Том 1 [Packing of spheres, grids and

shetki i gruppy. M.: Мир, 1990. Т. 1. 415 с.

3. Харари Ф. Теория графов. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 297 с.
4. Bollobás B. Random Graphs. Cambridge University Press, 2001. 498 pp.
5. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 324 с.

References

1. Mikov A.I., Mezenceva A.S. Harakteristiki geometricheskikh grafov, modelirujushhih ad hoc seti [Features geometric graphs simulating ad hoc network]. *Informatizacija i svjaz'* [Informatization and communication], 2012, no. 5, pp. 85–88. (In Russian)
2. Konvej Dzh., Slojen N. *Upakovki sharov, reshetki i gruppy. Tom 1* [Packing of spheres, grids and

groups. Vol. 1]. Moscow, Mir Publ., 1990, 415 p. (In Russian)

3. Harari F. *Teorija grafov* [Graphs theory]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003, 297 p. (In Russian)
4. Bollobás B. *Random Graphs*. Cambridge University Press, 2001, 498 p.
5. Harari F., Palmer Je. *Perechislenie grafov* [Enumeration of graphs]. Moscow, Mir Publ., 1977, 324 c. (In Russian)